MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

70. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

70. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1958/59

Unveränderter Nachdruck 1972

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

1 B 1765

Inhalt des 70. Bandes

Seite

BACHMAN, G., Geometry in Certain Finite Groups 466

BARTHEL, W., Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz 407

BENZ, W., $(8_3, 6_4)$-Konfigurationen in Laguerre-, Möbius- und weiteren Geometrien 283

BUTZER, P. L., Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren . . . 93

DEKKER, J. C. E., Congruences in Isols with a Finite Modulus 113

DEKKER, J. C. E., The Factorial Function for Isols 250

DINGHAS, A., Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen vom Abel-Liouvilleschen Typus 174

FAN, K., On the Equilibrium Value of a System of Convex and Concave Functions 271

FARAHAT, H. K., and L. MIRSKY, Group Membership in Rings of Various Types . . 231

FULTON, C. M., and D. A. NORTON, Non-Existence of Fixed Subspaces under Affine Transformations 52

GOES, G., *BK*-Räume und Matrixformationen für Fourierkoeffizienten 345

GREEN, J. A., On the indecomposable representations of a finite group 430

HOEHNKE, H.-J., Über komponierbare Formen und konkordante hyperkomplexe Größen 1

HOFMANN, K. H., Topologische Loops 13

HOFMANN, K. H., Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen . . 125

HOFMANN, K. H., Topologische Doppelloops 213

ITÔ, N., Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen 165

KASCH, F., Über eine metrische Eigenschaft der *S*-Zahlen 263

KLEIN-BARMEN, F., Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz 83

KLINGENBERG, W., Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermiteschen Mannigfaltigkeiten 300

KRABBE, G. L., Convolution operators that satisfy the spectral theorem 446

LAUGWITZ, D., Eine Bemerkung über konvexe Kurven 463

MÜLLER, P. H., Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben 381

Seite

NARAIN, R., A Fourier Kernel 297

NASTOLD, H.-J., Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. II 55

NEUMER, W., Kritische Zahlen und bestimmt divergente transfinite Funktionen . . 190

PERRON, O., Über zwei ausgeartete Heinesche Reihen und einen Kettenbruch von Ramanujan 245

ROSENBERG, A., and D. ZELINSKY, Finiteness of the injective hull 372

STEIN, S. K., A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve (Addendum) . . . 465

STOLT, B., Zur Axiomatik des Brandtschen Gruppoids 156

THRON, W. J., Zwillingskonvergenzgebiete für Kettenbrüche $1 + K(a_n/1)$, deren eines die Kreisscheibe $|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2$ ist 310

VOGEL, W. O., Regelflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten 193

ZAREMBA, S. K., On Necessary Conditions for the Central Limit Theorem 281

HOEHNKE, H.-J.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 1–12 (1958)

Über komponierbare Formen und konkordante hyperkomplexe Größen

Von
HANS-JÜRGEN HOEHNKE

Die vorliegende Note hat das Ziel, Formeln für die Koeffizienten $g_k(\xi)$ der Minimalgleichung

$$\xi^n - g_1 \xi^{n-1} + \cdots + (-1)^n g_n \varepsilon = 0$$

des allgemeinen Elements ξ einer Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement ε für den Fall anzugeben, daß die Determinante der Matrix $\left(S(\omega_i \omega_j)\right)$ $\left(S(\xi) = g_1;\ \boldsymbol{\omega} = \omega_1, \ldots, \omega_m\right.$ eine Basis von $\left.\mathfrak{A}\right)$ nicht verschwindet. In diesem Fall lassen sich nämlich die Produktkonstanten von $\mathfrak{A}$, die als Parameter in die Spuren $S(\xi^i)$ der Potenzen von ξ eingehen, eliminieren. Dazu reicht schon die Berechnung der Größe $\xi\eta + \eta\xi$ für zwei allgemeine Elemente ξ und η aus. Man erhält

$$\xi\eta + \eta\xi = S(\xi)\eta + S(\eta)\xi - \varepsilon T(\xi, \eta) + U(\xi, \eta, \tilde{\boldsymbol{\omega}}),$$

wo $T(\xi, \eta)$ bzw. $U(\xi, \eta, \zeta)$ die zu $g_2(\xi)$ bzw. $g_3(\xi)$ gehörigen Multilinearformen sind und

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left(S(\omega_i \omega_j)\right)^{-1} \boldsymbol{\omega}$$

die zu $\boldsymbol{\omega}$ komplementäre Basis bezeichnet. Durch Elimination der Produktkonstanten aus den Newtonschen Formeln

$$S(\xi^i) - g_1 S(\xi^{i-1}) + \cdots + (-1)^i i g_i = 0$$

gewinnt man Beziehungen, welche es gestatten, alle g_k, insbesondere die Norm $N(\xi) = g_n$, aus den Koeffizienten der kubischen Form $g_3(\xi)$ zu berechnen. Ferner wird eine Lösung des auf H. BRANDT zurückgehenden Konkordanzproblems gegeben, dessen wesentlichster Punkt die Berechnung der Formen $g_k(\xi\eta)$ (wo $\xi\eta$ das Produkt zweier allgemeiner Größen ξ und η ist) allein aus den Koeffizienten der Formen $g_k(\xi)$ ist. Auch hierfür genügt bereits die Kenntnis von $g_3(\xi)$. Diese algebraische Seite des Problems ist übrigens aufs engste mit der Frage nach der Abhängigkeit der Eigenwerte des Produkts AB zweier Matrizen A und B von den Eigenwerten von A und B verbunden, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Den Entwicklungen dieser Arbeit werden statt der g_k allgemeiner die λ-Koeffizienten des Polynoms $G(\lambda\varepsilon - \xi)$ zugrunde gelegt, wo $G(\xi)$ eine komponierbare Form ist. Die Resultate beziehen sich auf beliebiges n. Da es mir aber bisher nicht gelang, die entsprechenden Formeln in der allgemeinsten Gestalt *geschlossen* anzugeben, habe ich besonderen Wert auf explizite Berechnung der Formeln für $n = 3, 4$ und 5 gelegt. Einige Zwischenformeln [(1°),

(20), (35), (36) und (37)] ließen sich allerdings durch Ausdrücke beliebiger Länge ersetzen. Die Beweise wären zwar nicht kompliziert, würden aber immerhin unnötig viel Raum beanspruchen, solange nicht auch die Endformeln in allgemeiner Form aufgestellt werden können.

1. Vorbemerkungen

Dieser vorbereitende Abschnitt enthält Bezeichnungen und Tatsachen, die später häufig verwendet bzw. als bekannt vorausgesetzt werden und deren Beweise man in den Arbeiten von FROBENIUS findet, auf die hier ein für allemal hingewiesen wird.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiger kommutativer Körper und

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\omega_1 + \cdots + \mathfrak{P}\omega_m$$

eine (assoziative) Algebra von endlichem Rang m mit $\omega_1, \ldots, \omega_m$ als Basis über $\mathfrak{P}$. Eine Darstellung r-ten Grades von $\mathfrak{A}$ mit einem Oberkörper $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{P}$ als Darstellungskörper ist eine bezüglich $\mathfrak{P}$ operatortreue, homomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}$ in den vollen Matrizenring $(\mathfrak{R})_r$ aller Matrizen über $\mathfrak{R}$ vom Format $r \times r$. Die meisten der nachstehenden Rechnungen lassen sich für Darstellungen durchführen, die nur der Bedingung genügen, daß der Bildbereich die Einheitsmatrix E enthält. Dabei sind aber zusätzlich Überlegungen erforderlich, die im Interesse einer leichteren Lesbarkeit übergangen werden. Im folgenden werden vielmehr einfachheitshalber ausschließlich treue Darstellungen einer Algebra $\mathfrak{A}$ mit Eins ε im Grundkörper $\mathfrak{P}$ betrachtet. Das Wort „Darstellung" wird hier nur in diesem Sinn benutzt. Eine solche Darstellung ist durch die (linear unabhängigen) Bildmatrizen $M_1, \ldots, M_m$ der Basiselemente $\omega_1, \ldots, \omega_m$ eindeutig bestimmt; das Bild eines Elements $\alpha = a_1\omega_1 + \cdots + a_m\omega_m$ $(a_i \in \mathfrak{P})$ von $\mathfrak{A}$ ist die Matrix

$$M(\alpha) = a_1 M_1 + \cdots + a_m M_m$$

von $(\mathfrak{P})_r$.

Besonders hervorzuheben sind die regulären Darstellungen. Zu ihrer expliziten Aufstellung benutzt man die durch

$$\omega_j \omega_k = \sum_{i=1}^{m} w_{jk}^i \omega_i$$

erklärten m^3 Produktkonstanten $w_{jk}^i \in \mathfrak{P}$, mit denen die Matrizen

$$\Omega(\alpha) = \left(\sum_j w_{jk}^i a_j\right), \qquad \Omega'(\alpha) = \left(\sum_k w_{jk}^i a_k\right)$$

vom Format $m \times m$ zu bilden sind. Die erste und zweite reguläre Darstellung von $\mathfrak{A}$ wird dann durch die Zuordnung

$$\alpha \to \Omega(\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \alpha \to \dot{\Omega}'(\alpha)$$

vermittelt (wobei der Punkt die transponierte Matrix bezeichnet).

Ein Oberkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$ gibt Anlaß zu einer Grundkörpererweiterung

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}\omega_1 + \cdots + \mathfrak{K}\omega_m$$

der Algebra $\mathfrak{A}$. Eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}$ mit $\omega_i \to M_i$ läßt sich auf genau eine Weise, nämlich gemäß

$$\varkappa = k_1\omega_1 + \cdots + k_m\omega_m \to M(\varkappa) = k_1 M_1 + \cdots + k_m M_m$$

($\varkappa \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, $k_i \in \mathfrak{K}$) zu einer Darstellung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ in $\mathfrak{K}$ fortsetzen.

Nun sei $\mathfrak{P}[x_1, \ldots, x_m]$ ein Polynomring in m Erzeugenden x_i, und $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ sei sein Quotientenkörper. Die Grundkörpererweiterung $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)}$ enthält insbesondere das Element $\xi = x_1\omega_1 + \cdots + x_m\omega_m$, das auch ein allgemeines Element der Algebra $\mathfrak{A}$ genannt wird. Setzt man die Darstellung r-ten Grades $\alpha \to M(\alpha)$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)}$ fort, so wird ξ auf die Matrix $M(\xi)$ abgebildet. Diese, *einer Darstellung von* $\mathfrak{A}$ *entsprechende Matrix* $M(\xi)$, ihre Determinante $|M(\xi)|$, sowie das zugehörige charakteristische Polynom

$$f(\lambda; \xi) = |\lambda E - M(\xi)| = |M(\lambda\varepsilon - \xi)| = \lambda^r - \Theta_1(\xi)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r\Theta(\xi)$$

sind bereits von FROBENIUS [2] untersucht worden. $f(\lambda; \xi)$ ist eine Form vom Grad r in den Unbestimmten $\lambda, x_1, \ldots, x_m$. $\Theta_i(\xi)$ ist homogen vom Grad i in $x_1, \ldots, x_m$ ($i = 1, \ldots, r$). Offenbar ist $\Theta_r(\xi) = |M(\xi)| \neq 0$, da $M(\varepsilon) = E$.

Es sei

$$\varphi(\lambda; \xi) = \lambda^n - g_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n g_n(\xi)$$

das zu $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)[\lambda]$ gehörende Minimalpolynom von ξ, das auch *Grundpolynom* der Algebra $\mathfrak{A}$ genannt wird. Seine Koeffizienten sind durch ξ eindeutig bestimmt; einige von ihnen werden besonders bezeichnet:

$$g_1(\xi) = S(\xi)\ \textit{Spur}, \quad g_2(\xi) = T(\xi), \quad g_3(\xi) = U(\xi), \quad g_n(\xi) = N(\xi)\ \textit{Norm}.$$

Da $\alpha \to M(\alpha)$ eine isomorphe Abbildung ist, ist $\varphi(\lambda; \xi)$ als Polynom in λ Teiler von $f(\lambda; \xi)$. Nach einem Satz von GAUSS gehören daher die Koeffizienten g_k bereits zu $\mathfrak{P}[x_1, \ldots, x_m]$. $g_k(\xi)$ ist homogen vom Grad k in $x_1, \ldots, x_m$. Die Norm $N(\xi)$ ist Teiler von $|M(\xi)|$. Da $f(\lambda; \xi)$ Teiler einer passenden Potenz von $\varphi(\lambda; \xi)$ ist, besitzen $|M(\xi)|$ und $N(\xi)$, abgesehen von der Vielfachheit, die gleichen Primfaktoren. Es sei

$$|M(\xi)| = F_1(x_1, \ldots, x_m) \ldots F_l(x_1, \ldots, x_m)$$

eine Primfaktorzerlegung in $\mathfrak{P}[x_1, \ldots, x_m]$. Da (insbesondere) $\alpha \to \Omega(\alpha)$ eine Darstellung ist, besteht $|M(\xi)|$ aus den gleichen Primfaktoren wie $|\Omega(\xi)|$ (abgesehen von ihrer Vielfachheit). Da die Primfaktoren von $|\Omega(\xi)|$ bekanntlich durch ξ eindeutig bestimmt sind, kann man $F_i(x_1, \ldots, x_m) = F_i(\xi)$ schreiben. Da $|M(\varepsilon)| = 1$ ist, können die $F_i(\xi)$ so normiert werden, daß auch $F_i(\varepsilon) = 1$. Es sei $G(\xi)$ eine Form, die nur aus solchen Primfaktoren $F_i(\xi)$ zusammengesetzt ist. Dann besteht bekanntlich für zwei allgemeine Elemente ξ und η

von $\mathfrak{A}$ die Kompositionsformel

$$G(\xi\eta) = G(\xi)\,G(\eta). \tag{1}$$

Daher soll $G(\xi)$ eine *komponierbare Form* heißen. Speziell ist die Norm $N(\xi)$ eine komponierbare Form, denn die bekannte Beziehung

$$\varphi(\lambda;\xi) = N(\lambda\varepsilon - \xi) \tag{2}$$

ergibt für $\lambda = 1$, $\xi = 0$, daß $N(\varepsilon) = 1$ ist.

Mit einer komponierbaren Form $G(\xi)$ bilde man das Polynoms

$$\varphi^*(\lambda;\xi) = G(\lambda\varepsilon - \xi) = \lambda^{n^*} - g_1^*(\xi)\,\lambda^{n^*-1} + \cdots + (-1)^{n^*} g_{n^*}^*(\xi)$$

und setze

$$g_1^* = S^*, \quad g_2^* = T^*, \quad g_3^* = U^*, \quad g_{n^*}^* = N^*.$$

Auch in diesem allgemeineren Fall soll $S^*(\xi)$ als Spur und $N^*(\xi)$ als Norm bezeichnet werden. Nach Definition ist

$$G(\xi) = N^*(\xi), \qquad \varphi^*(\lambda;\xi) = N^*(\lambda\varepsilon - \xi).$$

Für $G(\xi) = N(\xi)$ ist $\varphi^*(\lambda;\xi) = \varphi(\lambda;\xi)$. Genau dann ist ξ Nullstelle von $\varepsilon\varphi^*(\lambda;\xi)$, wenn $N(\xi)$ Teiler von $N^*(\xi)$ ist. Ferner ist

$$N^*(\lambda\varepsilon - \xi\eta) = N^*(\lambda\varepsilon - \eta\xi). \tag{3}$$

Somit gilt für die λ-Koeffizienten $g_k^*(\xi)$ des Polynoms $N^*(\lambda\varepsilon - \xi)$ die Vertauschungsregel

$$g_k^*(\xi\eta) = g_k^*(\eta\xi). \tag{4}$$

Soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, beziehen sich die nachstehenden Überlegungen auf beliebige komponierbare Formen $G(\xi)$. Der einfacheren Schreibung wegen sollen jedoch die Sterne bei den soeben eingeführten Größen durchweg unterdrückt werden.

Für (eine beliebige komponierbare Form) $N(\xi)$ vom Grad n gilt die Beziehung

$$N(\lambda\varepsilon - a_0\xi^i - a_1\xi^{i-1} - \cdots - a_i\varepsilon) = [\lambda - f(\lambda_1)]\ldots[\lambda - f(\lambda_n)],$$

wobei $f(\mu) = a_0\mu^i + a_1\mu^{i-1} + \cdots + a_i$ ist und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen (in einem Zerfällungskörper) des λ-Polynoms $N(\lambda\varepsilon - \xi)$ sind. Wendet man dies auf $f(\mu) = \mu^i$ an, so ergibt sich

$$N(\lambda\varepsilon - \xi^i) = \lambda^n - g_1(\xi^i)\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n g_n(\xi^i) = (\lambda - \lambda_1^i)\ldots(\lambda - \lambda_n^i)$$

und daraus insbesondere für die i-te Potenzsumme der Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$\lambda_1^i + \cdots + \lambda_n^i = g_1(\xi^i) = S(\xi^i). \tag{5}$$

Aus den gewöhnlichen Newtonschen Formeln folgt damit die Beziehung

$$S(\xi^i) - g_1(\xi)\,S(\xi^{i-1}) + \cdots + (-1)^i i\,g_i(\xi) = 0, \tag{6}$$

worin $g_i(\xi)=0$ für $i>n$ zu setzen ist. Die Auflösung dieser Formeln nach den $S(\xi^i)$ mittels der Waringschen Formel ergibt den uneingeschränkt gültigen Ausdruck

$$(7)\qquad S(\xi^i)=i\cdot\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=i}\frac{(-1)^{i_2+i_4+i_6+\cdots}(i_1+i_2+\cdots+i_n-1)!}{i_1!\,i_2!\dots i_n!}g_1^{i_1}g_2^{i_2}\dots g_n^{i_n}.$$

Speziell ist

$$(8)\qquad\begin{cases}S(\xi^2)=g_1^2-2g_2, & S(\xi^3)=g_1^3-3g_1g_2+3g_3,\\ S(\xi^4)=g_1^4-4g_1^2g_2+2g_2^2+4g_1g_3-4g_4,\\ S(\xi^5)=g_1^5-5g_1^3g_2+5g_1g_2^2+5g_1^2g_3-5g_2g_3-5g_1g_4+5g_5.\end{cases}$$

2. Übergang zu Multilinearformen

Aus den Newtonschen Formeln (6) lassen sich alle Koeffizienten $g_k(\xi)$ des Polynoms $N(\lambda\varepsilon-\xi)$ als Funktionen der Spuren $S(\xi^1),\dots,S(\xi^n)$ berechnen, falls $n!$ teilerfremd zur Charakteristik char $\mathfrak{P}$ ist. Wenn man g_k in der Form

$$(9)\qquad g_k=\sum_{j_1=1}^{m}\dots\sum_{j_k=1}^{m}c_{j_1\dots j_k}x_{j_1}\dots x_{j_k}\qquad(k=1,\dots,n)$$

schreibt, wobei die Koeffizienten $c_{j_1\dots j_k}$ ($\in\mathfrak{P}$) nicht notwendig symmetrisch in den Indizes $j_1,\dots,j_k$ zu sein brauchen (was sich für char $\mathfrak{P}$ teilt $k!$ auch gar nicht immer erreichen läßt), so ergeben die Formeln (6) bzw. (7) Gleichungen zwischen den $c_{j_1\dots j_k}$. Der Koeffizientenvergleich erfordert Fallunterscheidungen. Man betrachte z.B. die Formel

$$(10)\qquad S(\xi^2)=S^2(\xi)-2T(\xi).$$

Setzt man

$$(11)\qquad d_{jk}=\sum_{i=1}^{m}c_i\,w_{jk}^i.\qquad(j,k=1,\dots,m),$$

so wird

$$(12)\qquad S(\xi\eta)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}d_{jk}x_jy_k.$$

Nach (4) gilt $S(\xi\eta)=S(\eta\xi)$, d.h. $S(\xi\eta)$ ist eine symmetrische Bilinearform, so daß $d_{jk}=d_{kj}$ wird. Aus (10) ergibt sich

$$(13\,a)\qquad d_{jj}=c_j^2-2c_{jj},$$

$$(13\,b)\qquad 2d_{jk}=2c_jc_k-2(c_{jk}+c_{kj})\qquad(j\neq k).$$

Für char $\mathfrak{P}\neq 2$ folgt aus (13 b)

$$d_{jk}=c_jc_k-(c_{jk}+c_{kj})\qquad(j\neq k)$$

und mit (13 a) weiter

$$(14)\qquad S(\xi\eta)=S(\xi)\,S(\eta)-T(\xi,\eta),$$

mit der Abkürzung

$$(15)\qquad T(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(c_{jk}+c_{kj})\,x_jy_k.$$

Es erhebt sich die Frage, ob Gl. (14) ohne die Einschränkung char $\mathfrak{P} \neq 2$ richtig bleibt. Die Newtonschen Formeln geben darüber keine Auskunft, und aus dem gleichen Grund ist auch der Weg, auf dem FROBENIUS die Koeffizienten $\chi(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ des Ausdrucks (15.) auf S. 1353 seiner Arbeit [*1*] [vgl. auch die Formeln (14.) und (20.) daselbst] berechnet, unbrauchbar. Trotzdem kann die Frage positiv beantwortet werden, wie anschließend gezeigt wird.

Im allgemeinen Fall ersetze man alle in der Relation (6) vorkommenden k-gradigen Formen durch gewisse k-fach lineare Formen, und zwar werde an Stelle der Form $g_k(\xi)$ in der Gestalt (9) die Multilinearform

$$g_k(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}) = \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_k=1}^{m} c_{(j_1 \ldots j_k)} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_k}^{(k)} \tag{16}$$

eingeführt, mit den symmetrischen Koeffizienten

$$c_{(j_1 \ldots j_k)} = \sum_{(\iota_1, \ldots, \iota_k)} c_{j_{\iota_1} \ldots j_{\iota_k}}, \tag{16a}$$

wo $(\iota_1, \ldots, \iota_k)$ alle $k!$ Permutationen der Zahlen $1, \ldots, k$ durchläuft.

Zur Herleitung von Beziehungen zwischen den Multilinearformen (16) bilde man die Norm des Elements

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i \varepsilon - \xi^{(i)}) = \Lambda \varepsilon - \Xi \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

wobei

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \tag{17a}$$

und

$$\Xi = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{h_1 < \cdots < h_i} \xi^{(h_1)} \cdots \xi^{(h_i)} \frac{\Lambda}{\lambda_{h_1} \cdots \lambda_{h_i}} \tag{17b}$$

ist, und bestimme die Koeffizienten von Λ^{n-1} in der Gleichung

$$\begin{aligned} N(\Lambda \varepsilon - \Xi) &= \Lambda^n - g_1(\Xi)\Lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^k g_k(\Xi)\Lambda^{n-k} + \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{k} N(\lambda_i \varepsilon - \xi^{(i)}) = \cdots + (-1)^k \Lambda^{n-1} \prod_{i=1}^{k} S(\xi^{(i)}) + \cdots . \end{aligned}$$

Dabei kommen, wie man sich leicht überlegen kann, nur die angeschriebenen Glieder in Betracht. Man erhält mit den Abkürzungen

$$g_2(\xi, \eta) = T(\xi, \eta), \quad g_3(\xi, \eta, \zeta) = U(\xi, \eta, \zeta) \tag{18}$$

insbesondere die Relationen

$$S(\xi^{(1)})\, S(\xi^{(2)}) = T(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) + S(\xi^{(1)} \xi^{(2)}), \tag{19.1}$$

$$\begin{cases} S(\xi^{(1)})\, S(\xi^{(2)})\, S(\xi^{(3)}) = U(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) + S(\xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)}) + \\ \qquad + T(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \xi^{(3)}) + T(\xi^{(2)}, \xi^{(1)} \xi^{(3)}) + T(\xi^{(3)}, \xi^{(1)} \xi^{(2)}), \end{cases} \tag{19.2}$$

$$
(19.3)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(\xi^{(1)})\,S(\xi^{(2)})\,S(\xi^{(3)})\,S(\xi^{(4)}) = g_4(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)},\xi^{(4)}) + S(\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)}\xi^{(4)}) + \\
&\quad + T(\xi^{(1)},\xi^{(2)}\xi^{(3)}\xi^{(4)}) + T(\xi^{(2)},\xi^{(1)}\xi^{(3)}\xi^{(4)}) + T(\xi^{(3)},\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(4)}) + \\
&\quad + T(\xi^{(4)},\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)}) + T(\xi^{(1)}\xi^{(2)},\xi^{(3)}\xi^{(4)}) + T(\xi^{(1)}\xi^{(3)},\xi^{(2)}\xi^{(4)}) + \\
&\quad + T(\xi^{(1)}\xi^{(4)},\xi^{(2)}\xi^{(3)}) + U(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)}\xi^{(4)}) + U(\xi^{(1)},\xi^{(3)},\xi^{(2)}\xi^{(4)}) + \\
&\quad + U(\xi^{(1)},\xi^{(4)},\xi^{(2)}\xi^{(3)}) + U(\xi^{(2)},\xi^{(3)},\xi^{(1)}\xi^{(4)}) + U(\xi^{(2)},\xi^{(4)},\xi^{(1)}\xi^{(3)}) + \\
&\quad + U(\xi^{(3)},\xi^{(4)},\xi^{(1)}\xi^{(2)}),
\end{aligned}\right.
$$

die später verwendet werden sollen, aus denen aber auch das allgemeine Bildungsgesetz ohne weiteres abzulesen ist. Mit Hilfe von (19.1) und (19.2) ergeben sich aus (19.2) bzw. (19.3) die Formeln

$$
(20a)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(\xi\eta\zeta) + S(\xi\zeta\eta) = U(\xi,\eta,\zeta) + 2S(\xi)\,S(\eta)\,S(\zeta) - \\
&\qquad - S(\xi)\,T(\eta,\zeta) - S(\eta)\,T(\xi,\zeta) - S(\zeta)\,T(\xi,\eta),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(20b)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(\xi\eta\zeta\vartheta) + S(\xi\eta\vartheta\zeta) + S(\xi\zeta\eta\vartheta) + S(\xi\zeta\vartheta\eta) + S(\xi\vartheta\eta\zeta) + S(\xi\vartheta\zeta\eta) \\
&\quad = -g_4(\xi,\eta,\zeta,\vartheta) + 6S(\xi)\,S(\eta)\,S(\zeta)\,S(\vartheta) - 2S(\xi)\,S(\eta)\,T(\zeta,\vartheta) - \\
&\quad - 2S(\xi)\,S(\zeta)\,T(\eta,\vartheta) - 2S(\xi)\,S(\vartheta)\,T(\eta,\zeta) - 2S(\eta)\,S(\vartheta)\,T(\xi,\zeta) - \\
&\quad - 2S(\eta)\,S(\zeta)\,T(\xi,\vartheta) - 2S(\zeta)\,S(\vartheta)\,T(\xi,\eta) + T(\xi,\eta)\,T(\zeta,\vartheta) + \\
&\quad + T(\xi,\zeta)\,T(\eta,\vartheta) + T(\xi,\vartheta)\,T(\eta,\zeta) + S(\xi)\,U(\eta,\zeta,\vartheta) + \\
&\quad + S(\eta)\,U(\xi,\zeta,\vartheta) + S(\zeta)\,U(\xi,\eta,\vartheta) + S(\vartheta)\,U(\xi,\eta,\zeta).
\end{aligned}\right.
$$

3. Elimination der Produktkonstanten

Man kann die Newtonschen Formeln (6) bzw. die Formeln (19) als Beziehungen zwischen den Formen $g_k(\xi)$ bzw. zwischen den Multilinearformen $g_k(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(k)})$ auffassen, wobei aber in den Spuren $S(\xi^i)$ bzw. $S(\xi^{(i_1)}\ldots\xi^{(i_s)})$ noch die Produktkonstanten w_{jk}^i der Basiselemente $\omega_i \in \mathfrak{A}$ als Parameter auftreten. Diese Parameter lassen sich nun (unter gewissen Voraussetzungen) auf rationale Weise eliminieren. Man gewinnt damit neue, fundamentale Formeln für die g_k allein.

Es sei

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} e_i \omega_i$$

die Eins von $\mathfrak{A}$. Aus

$$N(\lambda\varepsilon - \varepsilon) = (\lambda - 1)^n$$

ergibt sich

$$(21)\qquad g_k(\varepsilon) = \binom{n}{k} \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Für ε bestehen die Gleichungen $\Omega(\varepsilon) = \Omega'(\varepsilon) = E$, bzw.

$$(22)\qquad \sum_j w_{jk}^i e_j = \sum_j w_{kj}^i e_j = \delta_{ik},$$

wo δ_{ik} das Kroneckersche Symbol ist. Da nach (9), (12), (16) und (19.1)

$$d_{jk} = c_j c_k - c_{(jk)} \tag{23}$$

gilt, und nach (11) und (22)

$$\sum d_{jk} e_k = c_j \tag{24}$$

ist, während nach (21) $S(\varepsilon) = n$ ist, so hat man $c_j = n c_j - \sum_k c_{(jk)} e_k$, bzw.

$$\sum_k c_{(jk)} e_k = (n-1)\, c_j. \tag{25}$$

Zwischen den Determinanten $|c_{(jk)}|$ und $|d_{jk}|$ besteht auf Grund von (23), (24) und (21) eine Beziehung: Da $|c_{(jk)}| = |c_j c_k - d_{jk}|$

$$= (-1)^m \begin{vmatrix} 1, & c_1, & \ldots, & c_m \\ c_1, & d_{11}, & \ldots, & d_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_m, & d_{m1}, & \ldots, & d_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 - \sum c_k e_k, & c_1, & \ldots, & c_m \\ 0, & d_{11}, & \ldots, & d_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & d_{m1}, & \ldots, & d_{mm} \end{vmatrix},$$

so wird

$$|c_{(jk)}| = (-1)^{m-1} (n-1)\, |d_{jk}|. \tag{26}$$

Wenn char $\mathfrak{P}$ kein Teiler von $n-1$ ist, so sind hiernach die Forderungen

$$|c_{(jk)}| \neq 0 \quad \text{und} \quad |d_{jk}| \neq 0$$

gleichwertig. Da im folgenden wenigstens eine dieser beiden Ungleichungen benötigt wird, so sei von nun an

$$|d_{jk}| \neq 0 \tag{27}$$

vorausgesetzt, weil ja $|c_{(jk)}| = 0$ ist, sobald char $\mathfrak{P} | (n-1)$. Die Bedingung (27) ist z.B. erfüllt, wenn $\mathfrak{A}$ eine halbeinfache Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 ist und für $N(\xi)$ die Norm in der Minimalgleichung von ξ genommen wird.

Nach Voraussetzung ist die Matrix (d_{jk}) umkehrbar. Die inverse Matrix sei (d^{ik}). Ferner sei

$$S(\xi\eta\zeta) + S(\xi\zeta\eta) = \sum_{h,j,k} p_{hjk}\, x_h\, y_j\, z_k. \tag{28}$$

Die Koeffizienten p_{hjk} $(\in \mathfrak{P})$ sind offenbar symmetrisch in h, j, k. Mit der Abkürzung

$$w^i_{(jk)} = w^i_{jk} + w^i_{kj} \tag{29}$$

folgt aus (28)

$$\sum_i d_{hi}\, w^i_{(jk)} = p_{hjk}, \qquad w^i_{(jk)} = \sum_h d^{ih}\, p_{hjk}. \tag{30}$$

Die Koeffizienten p_{hjk} können aus (20a) berechnet werden. Man erhält

$$p_{hjk} = c_j d_{hk} + c_k d_{hj} - c_h c_{(jk)} + c_{(hjk)} \tag{31}$$

und daraus nach (30) und (42)

$$w^i_{(jk)} = c_j \delta_{ik} + c_k \delta_{ij} - e_i c_{(jk)} + \sum_{h=1}^{m} d^{ih} c_{(hjk)}. \tag{32}$$

Dieser Ausdruck gestattet die Berechnung von Produktbildungen hyperkomplexer Größen wie

$$\xi\eta + \eta\xi = \sum \omega_i w^i_{(jk)} x_j y_k \tag{33}$$

und (bei Ausnutzung der Assoziativität der Multiplikation)

$$2^{i-1}\xi^i = \sum \omega_{k_1} w^{k_1}_{(j_1 k_2)} w^{k_2}_{(j_2 k_3)} \cdots w^{k_{i-2}}_{(j_{i-2} k_{i-1})} w^{k_{i-1}}_{(j_{i-1} j_i)} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i}, \tag{34}$$

aus den Formen $S(\xi)$, $T(\xi,\eta)$ *und* $U(\xi,\eta,\zeta)$. Mittels (32) lassen sich die Produktkonstanten aus allen Beziehungen, in denen sie symmetrisch in den unteren Indizes auftreten, eliminieren. Die Komponenten e_i von ε werden mitunter auf fest vorgegebene Werte beschränkt. So werden z.B. sehr oft nur solche Basissysteme ω_i verwendet, bei denen $\omega_1 = \varepsilon$, d.h. $e_1 = 1$, $e_i = 0$ $(i > 1)$ („reduzierte" Basis) ist. Die Elimination sei hier schon einmal an Gl. (20b) demonstriert.

Zunächst ergibt die Anwendung der Vertauschungsregel (4)

$$\begin{aligned} &S[(\xi\eta + \eta\xi)(\zeta\vartheta + \vartheta\zeta)] + S[(\xi\vartheta + \vartheta\xi)(\eta\zeta + \zeta\eta)] - \\ &\quad - S[(\xi\zeta + \zeta\xi)(\eta\vartheta + \vartheta\eta)] = S(\xi\eta\zeta\vartheta) + S(\vartheta\xi\eta\zeta) + \\ &\quad + S(\eta\xi\vartheta\zeta) + S(\xi\vartheta\zeta\eta) + S(\xi\eta\vartheta\zeta) - S(\zeta\xi\eta\vartheta) + \\ &\quad + S(\eta\xi\zeta\vartheta) - S(\xi\zeta\vartheta\eta) + S(\vartheta\xi\zeta\eta) - S(\xi\zeta\eta\vartheta) + \\ &\quad + S(\xi\vartheta\eta\zeta) - S(\zeta\xi\vartheta\eta) = 2[S(\xi\eta\zeta\vartheta) + S(\eta\xi\vartheta\zeta)], \end{aligned} \tag{35}$$

und andererseits ist nach (32) bzw. (33)

$$\begin{aligned} &S[(\xi\eta + \eta\xi)(\zeta\vartheta + \vartheta\zeta)] = \sum d^{gh} c_{(gij)} c_{(hkl)} x_i y_j z_k t_l + \\ &\quad + 4S(\xi)S(\eta)S(\zeta)S(\vartheta) - S(\xi)S(\zeta)T(\eta,\vartheta) - S(\xi)S(\vartheta)T(\eta,\zeta) - \\ &\quad - S(\eta)S(\zeta)T(\xi,\vartheta) - S(\eta)S(\vartheta)T(\xi,\zeta) - 2S(\xi)S(\eta)T(\zeta,\vartheta) - \\ &\quad - 2S(\zeta)S(\vartheta)T(\xi,\eta) - (n-4)T(\xi,\eta)T(\zeta,\vartheta) + S(\xi)U(\eta,\zeta,\vartheta) + \\ &\quad + S(\eta)U(\xi,\zeta,\vartheta) + S(\zeta)U(\xi,\eta,\vartheta) + S(\vartheta)U(\xi,\eta,\zeta). \end{aligned} \tag{36}$$

Damit folgt aus (20b) die Formel

$$\begin{aligned} 2g_4(\xi,\eta,\zeta,\vartheta) = &- \sum d^{gh} c_{(gij)} c_{(hkl)} (x_i y_j z_k t_l + x_i y_k z_j t_l + x_i y_k z_l t_j) + \\ &+ (n-2)[T(\xi,\eta)T(\zeta,\vartheta) + T(\xi,\zeta)T(\eta,\vartheta) + \\ &+ T(\xi,\vartheta)T(\eta,\zeta)] - S(\xi)U(\eta,\zeta,\vartheta) - S(\eta)U(\xi,\zeta,\vartheta) - \\ &- S(\zeta)U(\xi,\eta,\vartheta) - S(\vartheta)U(\xi,\eta,\zeta), \end{aligned} \tag{37}$$

durch welche *die Koeffizienten von* $g_4(\xi,\eta,\zeta,\vartheta)$ *für* char $\mathfrak{P} \neq 2$ *als rationale Funktionen der Koeffizienten von* $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$, $g_3(\xi)$ *ausgedrückt werden.* Entsprechende Formeln bestehen für die Multilinearformen g_k vom Grad $k > 4$.

4. Zurückführung der Formen $g_k(\xi)$ auf die Form $g_3(\xi)$

Die Bedeutung der Formeln des vorigen Abschnitts liegt darin, daß durch sie die Formen $g_k(\xi)$ $(k \geqq 4)$ (unter gewissen Annahmen über char $\mathfrak{P}$) auf die Formen $g_1(\xi), g_2(\xi), g_3(\xi)$ zurückgeführt werden, wobei nach Hinzunahme der Komponenten e_i von ε auch g_1 und g_2 durch g_3 bestimmt sind, da vermöge (25) und (31)

$$T(\varepsilon, \xi) = (n-1)\, S(\xi), \quad U(\varepsilon, \xi, \eta) = (n-2)\, T(\xi, \eta). \tag{38}$$

Es zeigt sich also, daß die Form $g_3(\xi) = U(\xi)$ von grundlegender Bedeutung für die Bestimmung (der Koeffizienten) aller komponierbaren Formen ist. Die $\binom{m+2}{3}$ Koeffizienten $c_{(ijk)}$ von $U(\xi, \eta, \zeta)$ sind natürlich (für $m \geqq 3$) nicht algebraisch unabhängig voneinander, denn die Parameterzahl der allgemeinsten Transformation einer reduzierten Basis ist $m^2 - m$, also gibt es auch höchstens $m^2 - m$ unabhängige Koeffizienten $c_{(ijk)}$.

Um die Schritte bei der Elimination besser zu überblicken, sollen jetzt an Stelle der Multilinearformen wieder die Formen $g_k(\xi)$ selbst, zusammen mit den Newtonschen Formeln (6) bzw. (8), betrachtet und char $\mathfrak{P}$ teilerfremd zu $n!$ angenommen werden. Dann darf man auch voraussetzen, daß die Koeffizienten $c_{j_1 \ldots j_k}$ von $g_k(\xi)$ in (9) symmetrisch sind. Außerdem werden die kettenartigen Bildungen

$$\begin{cases} u_4(\xi) = \sum\limits_{i,k,q,r} c_{ikl} d^{lp} c_{pqr} x_i x_k x_q x_r, \\ u_5(\xi) = \sum c_{ikl} d^{lp} c_{pqr} d^{rs} c_{stv} x_i x_k x_q x_t x_v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ usw.} \end{cases} \tag{39a}$$

eingeführt und vollständigkeitshalber

$$u_1(\xi) = g_1(\xi) = S(\xi), \quad u_2(\xi) = g_2(\xi) = T(\xi), \quad u_3(\xi) = g_3(\xi) = U(\xi) \tag{39b}$$

gesetzt. Die Formen u_k sind rationale Funktionen der Koeffizienten von $U(\xi)$. Sie werden bei der Berechnung der Spuren der Potenzen ξ^i verwendet, die nach (32), (34) und (38) durch $U(\xi)$ (und die Komponenten e_i von ε) bestimmt sind. Sobald man die Spuren $S(\xi^i)$ kennt, kann man gemäß (6) oder (8) auch die $g_k(\xi)$ als Funktionen von $U(\xi)$ schreiben. Da nun der Ausdruck für $g_4(\xi)$ schon aus (37) zu entnehmen ist, soll als nächstes Beispiel die Form $g_5(\xi)$ berechnet werden. Für g_4 erhält man

$$4g_4 = (n-2)\, u_2^2 - 2u_1 u_3 - 9u_4, \tag{40}$$

und für $S(\xi^5)$:

$$\begin{cases} 2S(\xi^5) = 2u_1^5 - 10u_1^3 u_2 - (n^2 - 14)\, u_1 u_2^2 \\ \qquad\qquad + 18u_1^2 u_3 + 6(n-4)\, u_2 u_3 + 45 u_1 u_4 + 54 u_5. \end{cases} \tag{41}$$

Diese letzte Formel folgt aus (32) und (34), wenn man noch die zu (24) „inverse" Beziehung

$$\sum_j c_j d^{jk} = e_k \tag{42}$$

beachtet. Das Einsetzen von (40), (41) in die letzte Zeile von Formel (8) ergibt für g_5 den Ausdruck

$$(43)\qquad \begin{cases} 4\cdot 5\,g_5 = -(2n-1)(n-2)\,u_1u_2^2 \\ \qquad\qquad + 6u_1^2u_3 + 4(3n-7)\,u_2u_3 + 5\cdot 9u_1u_4 + 4\cdot 27u_5. \end{cases}$$

5. Lösung des Konkordanzproblems

Die vorstehenden Formeln gestatten eine (positive) Beantwortung der Frage, ob sich die Funktionen $g_k(\xi\eta)$ des Produkts $\xi\eta$ zweier hyperkomplexer Größen ξ und η allein aus den Formen $g_i(\xi)$, also ohne Kenntnis der Produktkonstanten w_{jk}^i, berechnen lassen. Das ist für die Arithmetik der Algebren von großem Nutzen. Dort tritt das Problem auf, zu entscheiden, wann mit zwei ganzen hyperkomplexen Größen α und β auch $\alpha\pm\beta$ und $\alpha\beta$ ganz sind. Zwei derartige Größen α und β nennt H. Brandt *konkordant*. Die einzige Schwierigkeit bietet dabei für $n\geqq 3$ das Produkt $\alpha\beta$, da es bisher überhaupt eine offene Frage war, ob die Ganzheit der Koeffizienten der Hauptgleichung von $\alpha\beta$ (das ist die Minimalgleichung von ξ für $\xi=\alpha\beta$) oder der charakteristischen Gleichung von $\alpha\beta$ oder der Minimalgleichung von $\alpha\beta$ allein durch die Koeffizienten der Minimalgleichung von ξ und der Komponenten von α und β (d.h. unabhängig von den Produktkonstanten) erfaßt wird. Dies läuft auf die obige Frage nach der Bestimmtheit der Funktionen $g_k(\xi\eta)$ hinaus.

Da sich die $g_k(\xi\eta)$ nach den Newtonschen Formeln (6) durch die Spuren $S[(\xi\eta)^i]$ ausdrücken lassen, genügt es, diese Spuren zu berechnen. Nun erhält man mit Hilfe der Vertauschungsregel

$$\begin{aligned} S[(\xi\eta+\eta\xi)^2] &= S(\xi\eta\,\xi\eta) + S(\xi\eta^2\xi) + S(\eta\xi^2\eta) + S(\eta\xi\eta\xi) \\ &= 2S[(\xi\eta)^2] + 2S(\xi^2\eta^2), \end{aligned}$$

also

$$(44)\qquad 2S[(\xi\eta)^2] = S[(\xi\eta+\eta\xi)^2] - 2S(\xi^2\eta^2).$$

Hierbei ist die rechte Seite bereits durch die Komponenten von ξ und η und die Koeffizienten von $U(\xi)$ ausdrückbar, da man nach (32) die Bildungen

$$\xi\eta+\eta\xi,\quad (\xi\eta+\eta\xi)^2,\quad \xi^2 \text{ und } \eta^2$$

aus x_i, y_j und $U(\xi)$ berechnen kann, und da mit ξ^2 und η^2 auch $S(\xi^2\eta^2)$ bekannt ist. Auf ähnliche Weise ergeben sich die Formeln

$$(45)\qquad 2S[(\xi\eta)^3] = S[(\xi\eta+\eta\xi)^3] - 3S[(\xi^2\eta^2+\eta^2\xi^2)(\xi\eta+\eta\xi)] + 6S(\xi^3\eta^3),$$

$$(46)\qquad \begin{cases} 2S[(\xi\eta)^4] = S[(\xi\eta+\eta\xi)^4] + \\ \quad + 4S[(\xi^3\eta^2+\eta^2\xi^3)(\xi\eta^2+\eta^2\xi)] + 4S[(\xi^2\eta^3+\eta^3\xi^2)(\xi^2\eta+\eta\xi^2)] - \\ \quad - 2S\{[(\xi\eta+\eta\xi)\xi^2+\xi^2(\xi\eta+\eta\xi)][(\xi\eta+\eta\xi)\eta^2+\eta^2(\xi\eta+\eta\xi)]\} - \\ \quad - 2S[(\xi\eta+\eta\xi)^2(\xi^2\eta^2+\eta^2\xi^2)] + 8S[(\xi\eta+\eta\xi)(\xi^3\eta^3+\eta^3\xi^3)] - \\ \quad - S[(\xi^2\eta^2+\eta^2\xi^2)^2] - 26S(\xi^4\eta^4), \end{cases}$$

usw.

Die rechten Seiten dieser Formeln sind wiederum nur Funktionen von x_i, y_j und der Koeffizienten von $U(\xi)$. Übrigens lassen sich für $S[(\xi\eta)^4]$ mehrere derartige Ausdrücke angeben.

Literatur

BRANDT, H.: Idealtheorie in Quaternionenalgebren. Math. Ann. **99**, 1–29 (1928), insbes. S. 6, Abschn. 12. — FROBENIUS, G.: [*1*] Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante. I. S.-B. preuß. Akad. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl. **1896**, 1343–1382. — [*2*] Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. I. S.-B. preuß. Akad. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl. **1897**, 994–1015. — [*3*] Theorie der hyperkomplexen Größen. I. u. II. S.-B. preuß. Akad. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl. **1903**, 504–537, 634–645.

Berlin W 8, Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften

(Eingegangen am 15. März 1958)

HOFMANN, K. H.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 13–37 (1958)

Topologische Loops

Von

KARL HEINRICH HOFMANN

EINLEITUNG. Einer der wichtigsten Ausgangspunkte und der zugleich wesentlichste Anwendungsbereich der Theorie der nichtassoziativen algebraischen Strukturen liegt auf dem Feld der Gewebe und projektiven Ebenen; mit den Geweben sind gruppenartige und mit den Ebenen körperartige Strukturen gekoppelt. Seit man topologische Ebenen untersucht (etwa SALZMANN [*22*] oder SKORNYAKOV [*23*]), interessiert man sich in wachsendem Maße auch für allgemeine Ansätze in einer Theorie nichtassoziativer topologisch-algebraischer Strukturen (z. B. MALCEV [*11*]). Im allgemeinen hat man sich jedoch gerade bei den Untersuchungen, die sich nicht eng an die Geometrie anlehnen, kaum wesentlich weiter vorgewagt, als dies mit den in der Gruppentheorie bekannten Methoden mühelos möglich war; dies gilt auch für die Versuche von MALCEV [*12*], analytische Mannigfaltigkeiten den betrachteten Strukturen zugrunde zu legen und ihre Verknüpfungen analytisch vorauszusetzen.

In dieser Arbeit und ihren beiden Fortsetzungen wird weder von Geweben, noch von Ebenen die Rede sein; dementsprechend werden Begriffe, die organisch mit diesen Gebilden verwachsen sind — wie z. B. der der Isotopie —, nicht auftauchen. Jedoch sollte man bei alledem, was über topologische Loops und insbesondere über topologische Doppelloops aufgeführt werden wird, die Anwendungsmöglichkeiten in der Theorie der Ebenen nicht ganz aus dem Auge verlieren.

Die vorliegende Arbeit (im folgenden mit I zitiert) entfaltet die Theorie der topologischen Loops, soweit keine Annahmen über ihre besondere algebraische Beschaffenheit (Kommutativität, Abschwächungen des Assoziativgesetzes oder ähnliches) eingehen. Sie befaßt sich mit den spezifischen Schwierigkeiten, die durch das Fehlen des Assoziativgesetzes bei der Untersuchung topologisch-algebraischer Strukturen auftreten, und zwar schon bei Begriffsbildungen, die bei Gruppen zum längst selbstverständlichen Bestandteil der Theorie gehören, wie z. B. bei der Frage der Homogenität oder der Uniformisierbarkeit.

Es werden die Teile der Theorie der topologischen Gruppen für Loops zusammengestellt werden, die sich durch mehr oder weniger einschneidende Modifikationen übertragen lassen. Insbesondere wird auch die Theorie der nichtassoziativen Überlagerungsstrukturen entwickelt, die an späterer Stelle benützt wird. Da die Behandlung von Äquivalenzrelationen (und von den algebraisch spezielleren Kongruenzrelationen) in der Theorie nichtassoziativer Strukturen an zentraler Stelle steht, werden wir den Begriff der Äquivalenzrelation auch in topologischen Fragen in den Vordergrund stellen; daher werden wir etwa den Zusammenhang topologischer Räume im Hinblick auf algebraische Anwendungen rein relationentheoretisch behandeln, mag dieses Vorgehen

auf den ersten Augenblick auch etwas künstlich erscheinen. Eine Zahl von Beispielen soll gewisse Modellvorstellungen der Art und Weise wecken, wie man sich die Pathologien und Bildungsmöglichkeiten nichtassoziativer Strukturen vorzustellen hat. Einige in der Literatur schon bekannte Ergebnisse werden mit aufgeführt.

Während in der vorliegenden Arbeit keine speziellen algebraischen Vorkehrungen getroffen werden, soll eine anschließende Arbeit (im folgenden als II zitiert) *topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen* behandeln. Dort setzen wir fast durchweg voraus, daß das neutrale Element der betrachteten Loops keine beliebig kleinen Umgebungen besitze, welche ganze zyklische Untergruppen mit mehr als einem Element enthalten. Es werden Untergruppen gesucht werden, die homomorphe Bilder der additiven Gruppe des Körpers der reellen Zahlen darstellen; es wird festgestellt werden, wie „zahlreich" solche Untergruppen vorkommen. Die Struktur lokalkompakter Loops, in denen stets zwei Elemente in einer abelschen aber nicht „beliebig kleinen" Gruppe liegen, wird aufgeklärt. Sind solche Loops kompakt, so sind sie stets assoziativ. Bekanntlich haben GLEASON [*5*], MONTGOMERY und ZIPPIN [*14*] vor einigen Jahren die berühmte Hilbertsche Frage, ob jede lokal euklidische Gruppe analytisch sei, positiv entscheiden können. Für Loops werden wir die analoge Frage mit nein beantworten, indem wir in der eben erwähnten, algebraisch schon sehr speziellen Klasse topologischer Loops eine zum dreidimensionalen Raum homöomorphe Loop konstruieren, die nicht assoziativ ist, und deren Verknüpfungen in keinem Koordinatensystem analytisch sind.

In einer weiteren Arbeit (*Topologische Doppelloops*, zitiert als III) behandeln wir dann Strukturen mit zwei Verknüpfungen, die ring- oder körperartige Eigenschaften aufweisen, und untersuchen zunächst deren topologisches Verhalten. Später setzen wir Distributivgesetze voraus und wenden einige Resultate aus II an, um einen Satz zu beweisen, der die Alternativkörper über dem Körper der reellen Zahlen unter allen lokalkompakten Doppelloops auszeichnet auf Grund lokaler Eigenschaften der Addition (nämlich lokal Moufangsch und frei von kleinen Untergruppen zu sein) und der Eigenschaft der Multiplikation, Rechts- und Linksinverse zu besitzen. Weitere Kennzeichnungen des Körpers der komplexen Zahlen als zunächst nicht notwendig assoziative Struktur werden angegeben. Wir werden ein Beispiel einer Doppelloop konstruieren, deren multiplikative Loop der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorph, deren additive Loop kommutativ und nicht assoziativ ist, und zwar so, daß jedes Element in einer Gruppe liegt, und daß überdies beide Distributivgesetze gelten. Auch dieses Beispiel ist im Zusammenhang mit dem fünften Hilbertschen Problem von Interesse. Die im ersten Paragraphen von III dargestellten Beweise topologischer Eigenschaften einer Doppelloop zeigen, daß viele Merkmale topologischer Ebenen gar nicht entscheidend an geometrischen oder speziellen Ternärkörpereigenschaften hängen. Ein Teil der dort niedergelegten Sätze hat Berührungspunkte mit Ergebnissen von SALZMANN [*22*].

Über die verwendeten Zeichen und Abkürzungen sei vorab folgendes angemerkt:

Ist E eine Menge, die die Menge F umfaßt, so bezeichne F^c das relative Komplement von F in E, wobei in den meisten Fällen die Abhängigkeit dieses Symbols von E aus dem Zusammenhang hervorgeht. Die Bezeichnungen $E-F$ und $E \cap F^c$ sind gleichbedeutend. Wenn $A(x)$ eine Aussageform der Variablen x angibt, so sei unter $\{x; A(x)\}$ die Menge aller x verstanden, für die $A(x)$ wahr ist, unter $\bigcup\{x; A(x)\}$ die Vereinigung und unter $\bigcap\{x; A(x)\}$ der Durchschnitt aller dieser x. Ist $\{E_i; i \in I\}$ eine Familie von Mengen E_i, wobei I eine gewisse Indexmenge bezeichnet, so bedeutet $P\{E_i; i \in I\}$ die Produktmenge dieser Mengen, d.h. die Gesamtheit aller Abbildungen von I in $\bigcup\{E_i; i \in I\}$, die jedem $i \in I$ ein $x \in E_i$ zuordnen. Gilt insbesondere $E_i = E$ für alle $i \in I$, so soll der Ausdruck E^I gleichwertig mit $P\{E_i; i \in I\}$ verwendet werden. Ist f eine Abbildung von E in F und g eine Abbildung von F in G, so bedeutet $g \circ f$ die Abbildung von E in G, die durch Hintereinanderanwendung von f und g entsteht. Gelegentlich wird von der Freiheit Gebrauch gemacht werden, die Abbildungen als Exponenten hinter das Argument zu setzen: dann wird zweckmäßigerweise die Reihenfolge der Funktionszeichen vertauscht; in diesem Fall sei $g \circ f$ durch fg ersetzt, so daß also die Ausdrücke $g \circ f(x)$ und x^{fg} synonym verwendet werden. Ferner sollen die Zeichen f und $x \to f(x)$ als gleichwertig gelten, wenn f eine Abbildung bezeichnet; die Gleichung $g = (x \to f(x))$ ist also eine sinnvolle Proposition, die genau für $f = g$ zu einer wahren Aussage wird. Die Menge der reellen Zahlen wird stets mit R bezeichnet ohne Rücksicht auf die gerade betrachteten algebraischen oder topologischen Eigenschaften; R_+ bedeutet die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen. Bei konvergenztopologischen Fragen bedienen wir uns wahlweise des bei BOURBAKI [1], Chap. I, § 5 eingeführten Begriffs des Filters oder aber der Moore-Smith-Folge, die wir auch als Netz bezeichnen, und die bei KELLEY [9], Chap. II, behandelt wird. Beide Begriffe sind völlig äquivalent (s. KELLEY [9], p. 83); unser Vorgehen hat neben dem Nachteil, methodisch nicht rein zu sein, den Vorzug der Bequemlichkeit; denn in den Anwendungen haben diese Begriffe ihre bestimmten Vor- und Nachteile, die sich häufig komplementär verhalten. Abzählbarkeitsfragen werden höchstens am Rande gestreift. Vom Auswahlaxiom wird unbedenklich Gebrauch gemacht.

§ 1. Definitionen und elementare Eigenschaften einfacher algebraischer Strukturen

(1.1) Bekanntlich bezeichnet man als *algebraische Struktur* einen Satz von Elementen $\{G; f_i; i \in I\}$ bestehend aus einer Menge G und gewissen Abbildungen f_i, die zu jedem i eine Produktmenge G^{l_i} aus endlich vielen Faktoren G in G abbilden. Ist $l_i = 2$, so nennt man f_i eine zweistellige *Verknüpfung*; dieser Fall wird uns im folgenden vorwiegend beschäftigen; der etwas unbeholfenen Schreibweise $(x, y) \to f(x, y)$ ziehen wir die vertrauteren Varianten $(x, y) \to xy$, oder $(x, y) \to x + y$, oder $(x, y) \to x \circ y$ oder ähnliche Spielarten vor. Falls keine Verwechslungen möglich sind, beschränken wir uns darauf, statt der genauen

Angabe $(G, f_i; i \in I)$ die kürzere, aber eigentlich nicht vollständige Bezeichnung G für eine algebraische Struktur zu verwenden.

(1.2) In der vorliegenden Arbeit wird es sich ausschließlich um Strukturen mit einer zweistelligen Verknüpfung $(x, y) \to xy$ handeln; die algebraischen Eigenschaften, die zum Verständnis der topologisch-algebraischen Struktureigenschaften unerläßlich sind, seien nun in aller Kürze und ohne Beweise zusammengestellt. Der an Einzelheiten interessierte Leser mag sich die nicht schwierigen Beweise selbst zurechtlegen und muß im übrigen auf die sehr umfangreiche Spezialliteratur verwiesen werden, etwa auf die Arbeit von BRUCK [2]. Die Abbildungen $R_a = (x \to xa)$ und $L_a = (x \to ax)$ von G in sich nennt man *Rechts-* bzw. *Linkstranslationen* und schreibt sie stets als Exponenten. Sind sie beide für alle a aus G eineindeutige Abbildungen von G auf G, so bezeichnen wir G als *Quasigruppe*. Existiert überdies ein Element e in G mit der Eigenschaft, daß $R_e = L_e$ gilt, und diese Translation der identischen Abbildung gleich ist, so nennt man dieses dann eindeutig bestimmte Element das *neutrale Element* von G und G eine *Loop*. Besitzt G ein neutrales Element, und sind alle Translationen Abbildungen von G auf G, so nennen wir G eine *Halbloop*. In einer Quasigruppe betrachten wir im allgemeinen die Abbildungen $(x, y) \to y^{L_x^{-1}} = x \backslash y$ und $(x, y) \to x^{R_y^{-1}} = x/y$ als zusätzliche Verknüpfungen mit den sie vollständig charakterisierenden Eigenschaften $(x/y)y = x$ und $x(x \backslash y) = y$.

(1.3) Wählt man in einer Quasigruppe mit der Verknüpfung $(x, y) \to xy$ ein beliebiges Element e aus, so kann man neue Verknüpfungen $(x, y) \to x \circ y = (x(e \backslash e))/(y \backslash e)$, $(x, y) \to x \backslash\!\backslash y = e/(y \backslash (x(e \backslash e)))$ und $(x, y) \to x /\!/ y = (x(y \backslash e))/(e \backslash e)$ angeben, bezüglich derer G zu einer Loop mit neutralem Element e wird; vgl. MALCEV [11]. Spezielle algebraische Eigenschaften der Verknüpfung $(x, y) \to xy$ können und werden bei diesem Übergang im allgemeinen verlorengehen; da wir in dem vorliegenden Kapitel bei der Behandlung topologischer Loops keine wesentlich einschränkenden algebraischen Voraussetzungen zugrunde legen, gelten viele der für Loops formulierten Aussagen bei entsprechenden Abänderungen schon für Quasigruppen. Eine assoziative Quasigruppe ist eine *Gruppe*.

(1.4) Die von den Rechts- und Linkstranslationen erzeugte Gruppe bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$; ihre Elemente nennen wir Translationen schlechthin. Alle Translationen der Form $R_{x,y} = R_x R_y R_{xy}^{-1}$ und $M_{x,y} = R_y L_x R_{xy}^{-1}$ erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, die sogenannte *innere Transformationsgruppe* von G, die im assoziativen Fall mit der Gruppe der inneren Automorphismen übereinstimmt ohne aber im nichtassoziativen Fall notwendig eine Automorphismengruppe darzustellen. Gibt es in einer Loop G eine Abbildung $x \to x^{-1}$ in sich, so daß die Identitäten $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$ und $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$ stets erfüllt sind, so nennen wir x^{-1} das *inverse Element* von x und G eine Loop mit inversem Element oder kurz eine *I-Loop*. Es versteht sich, daß $x \to x^{-1}$ eine involutorische Abbildung von G bildet, und daß die Beziehung $x^{-1} = e/x = x \backslash e$ erfüllt ist.

(1.5) Die Abbildung h einer Loop G in eine algebraische Struktur F heißt üblicherweise ein *algebraischer Homomorphismus*, wenn für eine gewisse Verknüpfung $(x, y) \to x \circ y$ in F stets die Identität $h(xy) = h(x) \circ h(y)$ gilt. Durch $R = \{(x, y);\ h(x) = h(y)\}$ wird auf G eine Äquivalenzrelation R erklärt (es sei daran erinnert, daß man eine Relation R auf einer Menge E immer als Teilmenge der Produktmenge $E \times E$ anzusehen hat). Bezeichnet man die Abbildung $x \to R(x)$, die jedem Element seine Äquivalenzklasse zuordnet, in unmißverständlicher Weise ebenfalls mit dem Buchstaben R, so gibt es eine eineindeutige Abbildung g von G/R — dem Äquivalenzklassenraum von G — auf $h(G)$, die der Klasse $R(x)$ das Bild $h(x)$ zuordnet, und es gilt $g \circ R = h$. (An dieser Stelle sei angemerkt, daß die Hintereinanderausführung der Abbildungen R und g gerade der Produktrelation $g \circ R$ entspricht, wobei der Definition einer Funktion als Relation zwischen den Elementen zweier Mengen Rechnung getragen wird.) Die Teilmenge $R(e)$ von G ist eine Unterloop von G. Jede Unterloop H von G, die in dieser Weise als Kern eines Homomorphismus von G dargestellt werden kann, sei als *normale Unterloop* oder als *Normalteiler* von G bezeichnet. Statt G/R schreiben wir dann auch G/H. Das homomorphe Bild einer Loop ist eine Halbloop (aber nicht notwendig eine Loop); das homomorphe Bild einer I-Loop ist wieder eine I-Loop. Ist H eine Unterloop einer Loop G, so ist die Aussage: „H ist Normalteiler von G und G/H ist eine Loop" gleichwertige mit der Aussage: „H wird von allen Translationen der inneren Transformationsgruppe $\mathfrak{H}$ in sich abgebildet". Der hier gegebene Normalteilerbegriff ist etwas schwächer als der in der Literatur übliche, vgl. dazu etwa BRUCK [2], p. 252; in der Regel werden dort nämlich nur Kerne von Homomorphismen h von G Normalteiler genannt, wenn $h(G)$ in einer Loop liegt. In vielen Fällen können wir diese Bedingung aus unserem schwächeren Begriff ableiten [I, (3.6), I, (5.10)]; später handeln wir von I-Loops [vgl. II, (1.1)], wo beide Begriffe zusammenfallen. Wir nehmen die kleine Unbequemlichkeit in Kauf, gelegentlich zusätzlich zu fordern, daß G/H eine Loop sei. Eine Äquivalenzrelation auf einer Halbloop G heiße (etwas abweichend vom üblichen Gebrauch) eine *Kongruenz*, wenn für alle $(a, b) \in G \times G$ die Beziehung $R(a)^{R_b} = R(ab) = R(b)^{L_a}$ gilt. *Charakteristisch* nennen wir eine Äquivalenzrelation auf G dann, wenn für jeden algebraischen Automorphismus h aus der Beziehung $x \in R(y)$ allemal $h(x) \in R\big(h(y)\big)$ folgt. (Es erübrigt sich, darauf hinzuweisen, daß die Begriffe eines *algebraischen Endo-*, *Iso-* und *Automorphismus* sich aus dem Homomorphiebegriff in genau derselben Weise ableiten lassen, wie das in der Gruppentheorie geläufig ist.) Eine *charakteristische Unterloop* H von G liegt dann vor, wenn jeder Automorphismus von G sie in sich abbildet. Nicht jede charakteristische Unterloop ist normal! Ist R eine Kongruenz auf G, so ist $x \to R(x)$ ein algebraischer Homomorphismus von G auf G/R bezüglich einer Verknüpfung in G/R, die durch $R(x) \cdot R(y) = \{z;$ es gibt ein $x' \in R(x)$ und ein $y' \in R(y)$, so daß $z = x'y'$ gilt$\}$ definiert wird; man weist sehr rasch nach, daß diese Festsetzung wirklich eine Verknüpfung bestimmt; G/R ist bezüglich dieser Verknüpfung eine Halbloop und sicher dann eine Loop, wenn G eine I-Loop ist. Ist das Bild von G bei einem Homo-

morphismus h eine Loop, so ist die durch $R=\{(x, y); h(x)=h(y)\}$ definierte Äquivalenzrelation eine Kongruenz. In einer beliebigen Loop G sind den Kongruenzen eindeutig gewisse Homomorphismen mit normalen Unterloops als Kernen zugeordnet und umgekehrt allen Homomorphismen, die G in eine Loop abbilden, eindeutig gewisse Kongruenzrelationen. In I-Loops kann diese letzte Zusatzbedingung weggelassen werden.

(1.6) Sind R_1 und R_2 Kongruenzen auf G, ist R_1 feiner als R_2 (d.h. $R_1 \subseteq R_2$), und ist G/R_2 eine Loop (bezüglich der eben definierten Klassenverknüpfung), dann sei die Äquivalenzrelation R_2/R_1 gebildet, welche diejenigen Mengen von Klassen $R_1(x)$ als Äquivalenzklassen hat, deren Vereinigung jeweils eine Klasse nach R_2 ausfüllt. Diese Relation R_2/R_1 ist dann eine Kongruenz auf G/R_1; die Restklassenstruktur $(G/R_1)/(R_2/R_1)$ ist isomorph zu G/R_2 und ist also insbesondere eine Loop. Ist H ein Normalteiler von G, der zu einem Homomorphismus h als Kern gehört, welcher G in eine Loop abbildet, so kommen wir überein, unter G/H die Restklassenstruktur G/R von G nach der dem Homomorphismus h zugeordneten Kongruenz R zu verstehen.

(1.7) Das *Zentrum* einer Loop ist die Menge aller Elemente x, für die stets $xa=ax$, $(ab)x=a(bx)$, $(ax)b=a(xb)$ und $x(ab)=(xa)b$ gilt, welches auch die Elemente a und b aus G seien. Ein Element x liegt dann und nur dann im Zentrum von G, wenn es bei jeder Translation der inneren Transformationsgruppe von G festbleibt.

§ 2. Definitionen und elementare Eigenschaften einfacher topologisch-algebraischer Strukturen

(2.1) Zunächst seien einige immer wiederkehrenden Bezeichnungen festgelegt. Ein *topologischer Raum* ist durch die Menge E seiner Elemente und die Menge $\mathfrak{O}(E)$ seiner offenen Mengen, die wir als seine Topologie bezeichnen, vollständig gekennzeichnet. Im allgemeinen werden wir von einem topologischen Raum E reden und nicht, wie es genau genommen geschehen müßte, von dem Paar $(E, \mathfrak{O}(E))$ als topologischem Raum. Den Umgebungsfilter eines Punktes $x \in E$ bezeichnen wir stets mit $\mathfrak{U}(x)$. An den Anfang der Behandlung unseres eigentlichen Gegenstandes stellen wir die Definition:

Eine *topologisch-algebraische Struktur* ist ein Paar bestehend aus einer algebraischen Struktur über der Elementemenge G und einem topologischen Raum über derselben Menge, bezüglich dessen Topologie alle Verknüpfungen f_i stetige Abbildungen der Produkträume $G^{l_i}=G\times\cdots\times G$ in G bilden. Denken wir uns eine Loop durch die drei Verknüpfungen $(x, y)\to xy$, $(x, y)\to x\backslash y$ und $(x, y)\to x/y$ gegeben, so ist eine *topologische Loop* durch die Stetigkeit der drei Abbildungen $(x, y)\to xy$, $(x, y)\to x\backslash y$ und $(x, y)\to x/y$ gekennzeichnet. Wiederum werden wir uns in der Regel darauf beschränken, die Elementemenge G als einziges der Bestimmungsstücke einer topologisch-algebraischen Struktur aufzuführen.

(2.2) Eine Abbildung f eines topologischen Raumes E auf einen topologischen Raum wird *offen* (bzw. *abgeschlossen*) genannt, wenn jede offene (bzw.

abgeschlossene) Menge von E auf eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge des Bildraums F abgebildet wird. Wir nennen eine Abbildung g von E in F *relativ offen* (bzw. *relativ abgeschlossen*), wenn die Abbildung g von E auf den Relativ- oder Teilraum $g(E)$ von F offen (bzw. abgeschlossen) ist. Bekanntlich wird jede umkehrbar eindeutige stetige und relativ offene Abbildung als *Homöomorphismus* bezeichnet. Es ist nun zu beachten, daß aus der Definition einer topologischen Loop folgt, daß die Translationen Homöomorphismen sind. Aus der Stetigkeit der Abbildungen $(x, y) \to x \backslash y$ und $(x, y) \to x/y$ folgt natürlich die von $y \to x \backslash y = y^{L_x^{-1}}$ und $x \to x/y = x^{R_y^{-1}}$. Um die Homogenität einer Loop zu erzwingen, hätte es also ausgereicht, die Stetigkeit der Abbildungen $y \to x \backslash y$ für alle x und $x \to x/y$ für alle y zu fordern. Das erste der folgenden Beispiele weist eine topologisch-algebraische Struktur mit den algebraischen Eigenschaften einer Quasigruppe auf, in der die Abbildungen $(x, y) \to xy$ und $(x, y) \to x/y$ stetig sind, aber die Linkstranslationen keine Homöomorphismen bilden; das dritte Beispiel leistet dasselbe für den Fall einer Loop. Im zweiten Beispiel einer Quasigruppe sind die Abbildungen $(x, y) \to xy$ und $x \to x \backslash y$ für alle y sowie $y \to x/y$ für alle x stetig, und keine Translation ist ein Homöomorphismus.

(2.3) BEISPIELE: a) G sei der (nicht vollständige) lineare Raum aller Folgen reeller Zahlen mit höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern, mit der von der starken Topologie des Hilbertraums der quadratisch summierbaren reellen Folgen induzierter Topologie; A sei eine stetige lineare umkehrbare Abbildung von G auf sich, deren Umkehrung nicht stetig ist (man wähle z.B. eine Transformation mit der Matrix $A = (a_{ik})_{i,k=1,2,\ldots}$, mit $a_{ik} = 0$, wenn $i \neq k$ und mit $a_{ik} = \frac{1}{i}$, wenn $i = k$). G wird zu einer Quasigruppe mit den angekündigten Eigenschaften, wenn als Verknüpfung $(x, y) \to xy = x + A(y)$ definiert wird. Es ist dann $x \backslash y = A^{-1}(y - x)$, $x/y = x - A(y)$, $R_a = (x \to x + A(a))$, und $L_a = (x \to a + A(x))$.

b) Auf demselben G wird mit Hilfe eben derselben Abbildung A die Verknüpfung $(x, y) \to xy = A(x + y)$ eingeführt. G ist dann eine kommutative Quasigruppe mit $x \backslash y = y/x = A^{-1}(y) - x$ und $R_a^{-1} = L_a^{-1} = (x \to A^{-1}(x) - a)$.

c) Nicht ganz so einfach rechnet man nach, daß G zu einer Loop mit dem neutralen Element 0 gemacht werden kann, indem man mit einem festen $a \in G$, $a \neq 0$ die Verknüpfung $(x, y) \to xy = x + (1 - \langle x, a \rangle \cdot A)(y)$ definiert mit der Einheitsabbildung 1 und einer festen stetigen Bilinearform $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ auf G. Diese Verknüpfung ist stetig und die Linkstranslationen sind Homöomorphismen, nicht aber die Rechtstranslationen. (Man beachte: $x \to xy - y$ ist bei festem y eine umkehrbare stetige eineindeutige lineare Abbildung von G auf G; die Abbildung $y \to xy - x$ ist bei festem x eineindeutig, linear, stetig, aber nicht umkehrbar stetig; sie bildet G auf G ab.)

(2.4) Ist G eine I-Loop, und ist G ein topologischer Raum, auf dem die Abbildung $(x, y) \to xy$ stetig ist, so sind die Translationen Homöomorphismen; denn es gilt ja $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$ und $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$. Ist überdies $x \to x^{-1}$ eine stetige

Abbildung, so ist sie als involutorische Abbildung ein Homöomorphismus, und G ist wegen $x\backslash y = x^{-1}y$ und $x/y = xy^{-1}$ eine topologische Loop.

In einem speziellen Fall folgt aus einer topologischen Voraussetzung über den einer Loop G zugrunde liegenden topologischen Raum und aus der Stetigkeit der Abbildung $(x, y) \to xy$ die Offenheit der Translationen:

(2.5) Ist G eine Loop und ein topologischer Raum zugleich, und ist die Abbildung $(x, y) \to xy$ stetig, so sind die Translationen Homöomorphismen, wenn G kompakt ist.

BEWEIS. Eine eineindeutige stetige Abbildung, die auf einem kompakten Raum definiert ist, ist immer ein Homöomorphismus.

(2.6) Ist G eine Loop von den in I, (2.5) angegebenen Eigenschaften, die aber nicht kompakt, sondern nur lokalkompakt ist, dann sind die Translationen jedenfalls dann Homöomorphismen, wenn kompakte Teilmengen immer kompakte Urbilder besitzen. Diese Tatsache folgt aus dem Hilfssatz

(2.7) Eine stetige eineindeutige Abbildung f eines lokalkompakten Raumes E auf einen lokalkompakten Raum F ist dann ein Homöomorphismus, wenn E kompakt ist oder jeder kompakte Teilraum von F ein kompaktes Urbild hat.

BEWEIS. Wir nehmen sofort an, daß E nicht kompakt sei; dann ist natürlich auch F nicht kompakt. $E' = E \cup \{a\}$ und $F' = F \cup \{b\}$ seien die Einpunktkompaktifizierungen von E und F. Ist K ein kompakter Teilraum von E, so ist $f(K)$ ein kompakter Teilraum von F und $f(E-K) = F - f(K)$ ist eine Umgebung von b. Es seien $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ die Filterbasen aus den Komplementen aller kompakten Mengen in E bzw. F. Dann gilt $f(\mathfrak{B}) \subseteqq \mathfrak{C}$. Da umgekehrt jeder kompakte Teilraum von F ein kompaktes Urbild hat, gilt sogar $f(\mathfrak{B}) = \mathfrak{C}$. Man hat also $\lim_{x \to y,\ x \in E} f(x) = b$, und die durch $f'(u) = \lim_{x \to u,\ x \in E} f(x)$ erklärte stetige Abbildung des kompakten Raumes $E \cup (a)$ auf den kompakten Raum $F \cup \{b\}$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist natürlich die Abbildung f^{-1} von F auf E stetig.

(2.8) Es sei angemerkt, daß man elementar eine eineindeutige stetige Abbildung eines lokalkompakten nicht kompakten Raumes auf einen kompakten Raum angeben kann, die also sicher kein Homöomorphismus ist. Bezeichnen z. B. r und s Polarkoordinaten in einer reellen Ebene, so wird durch die Vorschrift $t \to (s, r)$ mit $s = \pi \operatorname{Tg} t$ und $r = \sin s$ die reelle Halbgerade $R_+ = [0, \infty)$ eineindeutig und stetig auf die kompakte Punktmenge $\{(s, r);\ r = \sin s,\ 0 \leqq s < \pi\}$ abgebildet. Dieses Beispiel ist in anderem Zusammenhang auch bei PONTRJAGIN [19], S. 77 zu finden. Mit seiner Hilfe konstruieren wir eine eineindeutige stetige Abbildung eines lokalkompakten nicht kompakten Raumes auf einen kompakten Teilraum. Die eben konstruierte stetige eineindeutige Abbildung der Halbgeraden R_+ auf einen eindimensionalen Torus heiße f. Nun sei E das topologische Produkt von R_+ mit abzählbar vielen Torusexemplaren T. Ist $(x_i)_{i \in N}$ (N sei die Menge der natürlichen Zahlen) ein Element aus E, so liegt x_1 in R_+ und x_i in T sonst. Die Abbildung g,

die dem Element $(x_i)_{i\in N}$ das Element $(y_i)_{i\in N}$ mit $y_1=0$, $y_2=f(x_1)$ und $y_i=x_{i-1}$ $(i\geqq 2)$ zuordnet, leistet das Verlangte. Dieses Beispiel gestattet leicht, eine lokalkompakte, nicht kompakte topologisch-algebraische Struktur G mit stetiger zweistelliger Verknüpfung anzugeben, in der die Translationen eineindeutig, aber keine Homöomorphismen sind, sondern vielmehr sämtlich G auf einen kompakten Teilraum abbilden. Man setze etwa $G=E$ und statte E mit der Verknüpfung $(x, y)\to xy=g(x)+g(y)$ aus, wobei „+" die natürliche Verknüpfung der Torusgruppe bezeichne.

Es braucht nicht eigens darauf hingewiesen zu werden, daß die Homöomorphieeigenschaft der Rechts- und Linkstranslationen einer Loop G diejenige aller Translationen aus $\mathfrak{G}$ nach sich zieht. Jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(a)$ $(a\in G)$ wird durch jede Translation $S\in\mathfrak{G}$ wieder in einen Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(a^S)$ übergeführt.

(2.9) Sind G und H topologische Loops, und ist h ein algebraischer Homomorphismus, so heißt h ein *topologischer Homomorphismus* oder *Homomorphismus* schlechthin, wenn h stetig und relativ offen ist. Entsprechendes gelte für *Endo-*, *Iso-* und *Automorphismen*.

(2.10) Es sei E ein topologischer Raum und R eine auf ihm erklärte Topologie. Der Quotientenraum E/R von E nach R ist bekanntlich die Menge der Äquivalenzklassen von E ausgestattet mit der feinsten Topologie, in der die Abbildung $x\to R(x)$ noch stetig ist. Diese Abbildung ist dann auch offen. Wir nennen eine Äquivalenzrelation R auf E abgeschlossen (bzw. offen), wenn ihre Klassen sämtlich abgeschlossen (bzw. offen) sind. An späterer Stelle verwenden wir folgenden Hilfssatz:

Eine offene Äquivalenzrelation R auf einem topologischen Raum ist stets abgeschlossen.

Beweis. Eine Äquivalenzklasse $R(x)$ ist das Komplement der Vereinigungsmenge aller übrigen nach Voraussetzung offenen Klassen und ist daher abgeschlossen.

(2.11) Ist h ein stetiger algebraischer Homomorphismus einer topologischen Loop G in eine T_1-Loop H, d.h. eine Loop, in der eine (und damit jede) Menge aus einem Punkt abgeschlossen ist, so ist die dem Homomorphismus h auf G gemäß I, (1.5) zugeordnete Äquivalenzrelation R abgeschlossen, weil $R(x)=h^{-1}(h(x))$ zusammen mit $\{h(x)\}$ abgeschlossen ist. Der Quotientenraum G/R genügt dem Trennungsaxiom T_1. Der Homomorphismus h bewirkt eine eineindeutige Abbildung h' von G/R auf $h(G)$ [vgl. I, (1.5)]. h' ist stetig; denn ist $A\subseteqq h(G)$ relativ offen, dann ist $h^{-1}(A)$ und $\mathrm{R}\circ h^{-1}(A)=h'^{-1}(A)$ offen.

(2.12) Genau dann ist h ein Homomorphismus, wenn h' relativ offen ist.

Beweis. Es sei B eine offene Menge in G. Nun ist R eine Kongruenz, weswegen die Gleichung $aR(e)=R(a)$ gilt. Daher ist $\cup\{R(x);\, x\in B\}=BR(e)=\{z;$ es gibt ein $x\in B$ und ein $y\in R(e)$, so daß $z=xy\}$. Diese Menge ist aber dann gleich $\cup\{Bx;\, x\in R(e)\}$ und ist demnach offen, denn Rechtstranslationen sind Homöomorphismen. $R(B)$ ist also offen in G/R und geht bei der relativ offenen Abbildung h' in die relativ offene Menge $h(B)$ über. Die

Abbildung h ist also relativ offen. Es sei nun umgekehrt h relativ offen und B' eine offene Menge in G/R. Dann ist $B = R^{-1}(B')$ offen in G und wird durch h in die relativ offene Menge $h(B)$ in $h(G)$ abgebildet. Wegen $h(B) = h'(B')$ ist h' relativ offen. Da h' eineindeutig ist, ist übrigens diese Abbildung genau dann relativ offen, wenn sie relativ abgeschlossen ist.

(2.13) Ist h ein stetiger algebraischer Homomorphismus von einer kompakten topologischen Loop G in eine topologische Loop H, so ist h ein Homomorphismus.

BEWEIS. Wir haben nachzuweisen, daß die Abbildung h' von G/R auf H ein Homöomorphismus ist. G und damit G/R sind kompakt, h' ist stetig und also ein Homöomorphismus.

Es gibt trivialerweise eine lokalkompakte Gruppe G, eine kompakte Gruppe H und einen stetigen algebraischen Isomorphismus von G auf H, der natürlich nicht offen ist. Man nehme z.B. eine nicht abzählbare kompakte Gruppe H und betrachte die topologische lokalkompakte Gruppe G, die entsteht, wenn auf H die diskrete Topologie genommen wird. Die identische Abbildung von G auf H leistet das Verlangte.

Haben G und H abzählbare Basen der offenen Mengen, dann genügt es, G lokalkompakt vorauszusetzen [11].

(2.14) Ist G eine topologische Loop und h ein algebraischer Homomorphismus von G in eine topologische Loop H, so ist er stetig (bzw. relativ offen), wenn er in einem Punkt a stetig ist (bzw. relativ offen, d.h. $\mathfrak{U}(a)$ auf einen Filter abbildet, der gröber ist als die Spur von $\mathfrak{U}(h(a))$ auf H).

BEWEIS. Es sei x ein beliebiger Punkt von G; wir müssen beweisen, daß h in x stetig (bzw. relativ offen) ist. Nun ist $g = h \circ R_{a \setminus x} = R_{h(a \setminus x)} \circ h$ eine in a stetige (bzw. relativ offene) Abbildung; also ist $h = g \circ (R_{a \setminus x})^{-1}$ in x stetig (bzw. relativ offen).

(2.15) Ein *lokaler Homomorphismus* h ist eine auf einer Umgebung U des neutralen Element e einer topologischen Loop erklärte stetige und relativ offene Abbildung in eine topologisch-algebraische Struktur derart, daß aus $x \in U$, $y \in U$ und $xy \in U$ immer $h(x)h(y) = h(xy)$ folgt. Ist die Abbildung in sich, dann heißt sie ein *lokaler Endomorphismus*, ist sie eineindeutig, ein *lokaler Isomorphismus* und ist sie eineindeutig auf eine Umgebung von e, heißt sie ein *lokaler Automorphismus*.

ANMERKUNGEN. Die Beispiele von I, (2.3) zeigen, wie entscheidend die stetige Auflösbarkeit der Identitäten $xu = y$ und $vy = x$ nach u bzw. v zum Nachweis der Homogenität nichtassoziativer Loops ohne Existenz inverser Elemente benötigt wird. Sie geben zugleich eine erste Vorstellung davon, wie nichtassoziative Quasigruppen und Loops anzugeben sind. Die Beispiele I, (2.3) a) und b) sind übrigens Isotope einer topologischen Gruppe mit einer nicht umkehrbar stetigen Isotopie. Auf den in I, (2.13) erwähnten aber nicht bewiesenen Satz weist MALCEV hin [11].

§ 3. Normalteiler, Trennungseigenschaften und kompakte Unterräume

(3.1) Eine *Unterloop H einer topologischen Loop G* ist eine Unterloop im algebraischen Sinne sowie ein Unterraum des topologischen Raumes $(G, \mathfrak{O}(G))$. Jede solche Unterloop ist eine topologische Loop.

Jede offene Unterloop H einer topologischen Loop G ist abgeschlossen.

BEWEIS. Der Teilraum $(G-H)H$ ist als Vereinigung $\bigcup\{xH; x\in G-H\}$ von offenen Mengen xH offen. Er hat mit H leeren Durchschnitt, denn aus $gh=h'$ (wobei h und h' Elemente aus H bezeichnen) folgt $g=h'/h\in H$. Andrerseits ist $(G-H)H\cup H\supseteq(G-H)\cup H=G$. Damit ist H Komplement einer offenen Menge und daher abgeschlossen.

(3.2) *In einer topologischen Loop ist jede Unterloop H offen, wenn sie eine offene Menge A enthält.*

BEWEIS. Wenn x aus H und a aus A stammen, bildet $R_{a\backslash x}$ die Menge A auf die offene Menge $A^{R_{a\backslash x}}$ ab, die x enthält und ganz in H enthalten ist.

(3.3) Sind R_1 und R_2 zwei Kongruenzen auf einer topologischen Loop G, ist R_1 feiner als R_2 und ist schließlich G/R_2 in der Quotiententopologie eine topologische Loop, dann ist R_2/R_1 eine Kongruenz auf G/R_1, und G/R_2 ist zu $(G/R_1)/(R_2/R_1)$ isomorph. Der Beweis dieser Tatsache bedarf nach I, (1.6) noch des Nachweises, daß die Abbildung, die G/R_2 auf $(G/R_1)/(R_2/R_1)$ abbildet, ein Homöomorphismus ist, wenn alle Räume mit den entsprechenden Quotiententopologien ausgestattet werden, was hier als bekannt vorausgesetzt sein mag.

(3.4) Die Relation $R=\{(x, y); y\in\overline{\{x\}}\}$ auf einem topologischen Raum E ist eine Ordnungsrelation, deren Abschnitte in E abgeschlossen sind. (Querstrich über dem Zeichen für einen Teilraum bedeutet wie üblich die Bildung der abgeschlossenen Hülle.)

BEWEIS. $y\in\overline{\{x\}}$ ist genau dann erfüllt, wenn für alle $U\in\mathfrak{U}(y)$ immer $U\cap\{x\}\neq\emptyset$ oder $x\in U$, d.h., wenn $\mathfrak{U}(y)\subseteq\mathfrak{U}(x)$ gilt. Es ist also $R=\{(x, y); \mathfrak{U}(y)\subseteq\mathfrak{U}(x)\}$ und der erste Teil der Behauptung ist evident. Da allemal $R(x)=\overline{\{x\}}$ gilt [es sei daran erinnert, daß unter $R(x)$ stets die Menge der Elemente y zu verstehen ist, die zu x in der Relation R stehen, und daß $R(x)$ der Abschnitt von x heißt, falls R eine Ordnungsrelation ist], sind die Abschnitte $R(x)$ der Ordnungsrelation R stets abgeschlossen.

(3.5) Auf einer Loop G ist die eben definierte Relation R eine abgeschlossene Kongruenz.

BEWEIS. Ist S ein Homöomorphismus von G auf G, dann ist $\overline{\{a\}}^S=\overline{\{a^S\}}$; denn aus $x\in\overline{\{a\}}^S$, d.h. aus $\mathfrak{U}(x^{S^{-1}})=\mathfrak{U}(a)$ folgt $\mathfrak{U}(x)=\mathfrak{U}(x^{S^{-1}})^S=(\mathfrak{U}(a))^S=\mathfrak{U}(a^S)$, d.h. $x\in\overline{\{a^S\}}$; damit ist $\overline{\{a\}}^S\subseteq\overline{\{a^S\}}$ bewiesen; die umgekehrte Beziehung folgt aus derselben Schlußkette durch Ablesen in der entgegengesetzten Reihenfolge. Die Abbildungen $x\to x^T$ ($T\in\mathfrak{G}$), sind für jedes feste T aus $\mathfrak{G}$ Homöomorphismen von G auf sich; dies gilt dann auch von den Abbildungen $x\to x\backslash a$ und $x\to a/x$. Man hat also die Gleichungen $\overline{\{a\}}=\overline{\{e\}a}=\overline{\{e\}}\backslash a=a/\overline{\{e\}}$ und es ist $R=\{(x, y)$; es gibt ein $z\in\overline{\{e\}}$, so daß $y=zx\}$. Aus $y\in\overline{\{x\}}$ folgt also $x=z\backslash y$ mit einem $z\in\overline{\{e\}}$ oder $x\in\overline{\{y\}}$, d.h. R ist symmetrisch. R ist also eine wegen I, (3.4) abgeschlossene Äquivalenzrelation. Infolge $\overline{\{x\}}^{R_a}=\overline{\{xa\}}$ und $\overline{\{x\}}^{L_a}=\overline{\{ax\}}$ ist sie eine Kongruenz. $\overline{\{e\}}$ ist also eine normale Unterloop von G.

(3.6) *Die topologische Halbloop $G/\overline{\{e\}}$ ist eine T_1-Loop.*

BEWEIS. Jeder Punkt von $G/\overline{\{e\}}$ ist abgeschlossen, d.h. $G/\overline{\{e\}}$ erfüllt das Trennungsaxiom T_1. Es ist noch nachzuprüfen, daß diese Halbloop sogar eine Loop ist. Es sei $\overline{\{a\}}\,\overline{\{x\}} = \overline{\{a\}}\,\overline{\{y\}}$; dann ist $\overline{\{ax\}} = \overline{\{ay\}}$ (denn $\overline{\{a\}}\,\overline{\{x\}}$ ist diejenige Klasse, die ax enthält) und damit $\mathfrak{U}(ax) = \mathfrak{U}(ay)$. Nach Anwendung des Homöomorphismus L_a^{-1} erkennt man $\mathfrak{U}(x) = \mathfrak{U}(y)$ und damit $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Analog folgt aus $\overline{\{x\}}\,\overline{\{a\}} = \overline{\{y\}}\,\overline{\{a\}}$ stets die Gleichheit $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

(3.7) *Jede T_1-Loop ist G regulär.*

BEWEIS. V sei eine Umgebung von e, und es sei $a \in \overline{V}$. Es gibt einen gegen a konvergierenden Filter $\mathfrak{F}$ auf V; es gilt dann $\lim_{\mathfrak{F}} a/x = e$. Dann existiert also sicher ein $z \in V$, so daß $a/z \in V$. Nun ist aber $a = (a/z)z \in VV$. Hat man $U \in \mathfrak{U}(e)$ beliebig vorgegeben, so gibt es immer eine Umgebung V mit $VV \subseteqq U$, für die dann also auch $\overline{V} \subseteqq U$ gilt. Infolge der Homogenität von G ist dies schon die Behauptung.

Im folgenden betrachten wir stets reguläre Loops.

(3.8) *Ist A ein abgeschlossener und K ein kompakter Teilraum einer topologischen Loop G, und ist ferner $K \cap A$ leer, dann gibt es eine Umgebung U von e, für die $AU \cap KU = \emptyset$ gilt. Dasselbe ist bei entsprechender Wahl von U bei Multiplikation mit U von links richtig.*

BEWEIS. Angenommen, für kein $U \in \mathfrak{U}(e)$ sei $((AU)/U) \cap K$ die leere Menge. Das System dieser Mengen bildet dann eine Filterbasis auf K, die wenigstens einen Adhärenzpunkt z besitzt, da ja K kompakt ist. Läge z nicht in A, so gäbe es wegen der Stetigkeit der Abbildung $(u, v, w) \to ((zu)v)/w$ ein $V \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $A \cap ((zV)V)/V = \emptyset$ oder $AV/V \cap zV = \emptyset$ gelten würde; dann wäre aber z kein Adhärenzpunkt der Filterbasis mit den Mengen $(AU)/U \cap K$ mit $U \in \mathfrak{U}(e)$. Also muß z auch in A liegen im Widerspruch zur Voraussetzung.

(3.9) *Das Produkt AK einer abgeschlossenen Menge A und einer kompakten Menge K in einer topologischen Loop G ist abgeschlossen.*

BEWEIS. Es sei $x \in \overline{AK}$. Es existiert ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ von Punkten x_i aus AK, das gegen x konvergiert. Es gibt für jedes $i \in I$ ein $y_i \in A$ und ein $z_i \in K$, so daß $x_i = y_i z_i$, und zwar auf Grund der Definition des Komplexprodukts AK. Nun ist $(z_i)_{i \in I}$ ein Netz auf dem kompakten Raum K. Es existiert ein Unternetz $(z_i)_{i \in J}$ (J kofinal zu I), das gegen einen Punkt $z \in K$ konvergiert, denn K ist kompakt. Das Netz $(x_i)_{i \in J}$ konvergiert gegen x. Da stets $y_i = x_i/z_i$ gilt, konvergiert $(y_i)_{i \in J}$ gegen einen Punkt y, der wegen der Abgeschlossenheit von A in A liegt; und es gilt schließlich $x = yz \in AK$; d.h. AK ist abgeschlossen.

(3.10) *G sei eine topologische Loop, H ein lokalkompakter abgeschlossener Normalteiler, und G/H sei lokalkompakt. Dann ist G lokalkompakt.*

Den Beweis dieser Behauptung brauchen wir hier nicht auszuführen, da der von MONTGOMERY und ZIPPIN in [15] auf p. 52 gegebene Beweis sich ohne größere Abwandlungen für Loops formulieren läßt.

ANMERKUNGEN. In (3.1) beachte man, daß H keine Klassenteilung von G definiert und daher der Hilfssatz aus 2.10 nicht unmittelbar anzuwenden ist. Der Satz (3.7) wurde

zuerst von MALCEV [11] und SALZMANN [21] bewiesen. Die Sätze (3.8) bis (3.10) sind in der Gruppentheorie bekannt [15, 2.1 und 2.2]. Die Sätze (3.8) und (3.9) werden in der Gruppentheorie in der Regel unter Benutzung der auf Gruppen natürlich gegebenen uniformen Strukturen bewiesen, die wir hier nicht zur Verfügung haben.

§ 4. Uniforme Strukturen und Loops

(4.1) Es sei $(G, \mathfrak{O}(G))$ eine topologische Loop. Wir nennen eine mit der Topologie verträgliche uniforme Struktur eine *rechtsuniforme Struktur* $\mathfrak{U}_r$, wenn sie eine Basis $\mathfrak{B}$ besitzt aus den Mengen $\bigcup(\{x\} \times U x;\ x \in G\}$, wo U den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(e)$ des neutralen Elementes in G durchläuft. Wir nennen eine rechtsuniforme Struktur $\mathfrak{U}_r$ auf G *rechtsinvariant*, wenn ihre Mengen von allen Rechtstranslationen in sich übergeführt werden, und wir nennen sie *invariant* schlechthin, wenn ihre Mengen von allen Translationen aus $\mathfrak{G}$ in sich übergeführt werden. Entsprechendes gelte bei Vertauschung bei Begriffe rechts und links. Eine Loop G, die eine rechts- und linksuniforme Struktur besitzt, nennen wir *uniform*.

Notwendig und hinreichend dafür, daß auf einer topologischen Loop eine rechtsuniforme Struktur existiert, sind folgende Bedingungen:

a) Zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ existiert eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(e)$, so daß aus $y \in V x$ immer $x \in U y$ folgt.

b) Zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ existiert eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $V(V x) \subseteqq U x$ für alle $x \in G$ richtig ist.

BEWEIS. Zum Beweis prüft man direkt die Axiome, die eine uniforme Struktur definieren, und die bei N. BOURBAKI [1], Chap. II, § 1 oder bei J. L. KELLEY [8], Chap. 6, p. 176 angegeben sind, und achtet dabei auf die spezielle Entstehungsweise einer rechtsuniformen Struktur $\mathfrak{U}_r$.

(4.2) Eine rechtsuniforme Struktur ist immer Hausdorffsch; denn wir setzen für G das Trennungsaxiom T_1 voraus [vgl. I, (3.7)], und $\bigcap\{U;\ U \in \mathfrak{U}(e)\}$ ist wegen der Regularität von G gleich (e). Dann ist aber der Durchschnitt aller Bänder (entourages) aus $\mathfrak{U}_r$ der Diagonalen D von $G \times G$ gleich.

(4.3) Eine rechtsuniforme Struktur ist genau dann rechtsinvariant, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

a) Zu jedem $U \in \mathfrak{U}(e)$ und $y \in G$ existiert ein $V_y \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $V_y(x y) \subseteqq (U x) y$ für alle $x \in G$. $\mathfrak{U}_r$ ist genau dann invariant, wenn außer a) noch die folgende Bedingung erfüllt ist:

b) Zu jedem $U \in \mathfrak{U}(e)$ und jedem $y \in G$ existiert ein $V_y \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $V_y(y x) \subseteqq y(U x)$.

Der Beweis besteht wiederum in einer direkten Ausrechnung.

(4.4) *Es gibt lokalkompakte topologische Loops, die keine rechts- und linksuniforme Struktur besitzen.*

BEWEIS. Auf der Menge R der reellen Zahlen wird durch die Verknüpfung

$$(x, y) \to x \circ y = \begin{cases} x + y, & \text{wenn } x \leqq 0 \text{ oder } y \leqq 0 \\ x + y + (x y)^2, & \text{wenn } x \geqq 0 \text{ und } y \geqq 0 \end{cases}$$

die Struktur einer kommutativen Loop erklärt; denn es ist

$$\frac{d(x \circ y)}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \leqq 0 \text{ oder } y \leqq 0, \\ 1 + 2xy^2, & \text{wenn } x \geqq 0 \text{ und } y \geqq 0, \end{cases}$$

weshalb die Translationen eineindeutige Abbildungen von R auf R darstellen. Jede mögliche rechtsuniforme Struktur ist linksuniform und umgekehrt. Indessen ist die Bedingung I, (4.1) b) bezüglich der natürlichen Topologie auf R sicher nicht für alle $x \in R$ erfüllt: Denn sind $W = [0, a]$ und $V = [-a, a]$ Intervalle auf R und bezeichnet A_n die Menge der n-ten Potenzen aller Elemente aus einer Teilmenge A von R, so ist für positive x die Länge von $V \circ x = V + x + W_2 x^2$ größer oder gleich $a^2 x^2$, aber andererseits kleiner oder gleich $2a + a^2 x^2$. Falls $x < a$, ist die Länge von $V \circ (V \circ x) = V + (V \circ x) + W_2 (V \circ x)_2$ größer als die von $W_2 (W_2 x^2)_2$, welche wie x^4 wächst, während die Länge von $U \circ x$ für jedes symmetrisches Intervall U um 0 höchstens wie x^2 wächst.

(4.5) *Jede kompakte Loop G besitzt eine eindeutig bestimmte invariante rechts- und linksuniforme Struktur.*

BEWEIS. Jeder kompakte Raum G besitzt eine eindeutig bestimmte uniforme Struktur $\mathfrak{U}$, nämlich den Filter der Umgebungen der Diagonalen D in $G \times G$. Es muß lediglich nachgewiesen werden, daß $\mathfrak{U}$ eine invariante rechts- und linksuniforme Struktur bildet. $\mathfrak{U}$ ist eine rechtsuniforme Struktur: Für alle U aus dem Umgebungsfilter von e ist $\bigcup \{\{x\} \times Ux;\ x \in G\}$ eine Umgebung der Diagonalen in $G \times G$, denn jede solche Menge ist homöomorphes Bild der Menge $\bigcup \{\{x\} \times U;\ x \in G\} = G \times U$ bei dem Homöomorphismus $(x, y) \to (x, yx)$, und $G \times U$ ist eine Umgebung von $G \times \{e\}$. Es sei nun umgekehrt $W \in \mathfrak{U}$ eine Umgebung der Diagonalen D in $G \times G$. Angenommen, die Menge W enthalte keine Menge der Form $\bigcup \{\{x\} \times Ux;\ x \in G\}$. Dann bilden die Mengen $\bigcup \{\{x\} \times Ux;\ x \in G\} \cap W^c$ eine Filterbasis mit einem Adhärenzpunkt (x, y). Wegen $(x, y) \in \overline{W^c}$ gilt sicher $x \neq y$. Wir wählen eine abgeschlossene Umgebung U_0 von (x, y), welche, wenn $x \neq y$ ist, stets so bestimmt werden kann, daß $U_0 \cap D = \emptyset$, weil G und damit auch $G \times G$ regulär ist. Da $G \times G$ bezüglich der Verknüpfung $((x, y), (x, y)) \to (x, y) \cdot (x, y) = (xx, yy)$ eine kompakte topologische Loop bildet, gibt es nach I, (3.8) eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$, so daß mit $(U \times U) \cdot D = \bigcup (Ux \times Ux;\ x \in G)$ die Beziehung $U_0 \cap (U \times U) \cdot D = \emptyset$ gilt. Erst recht ist dann $U_0 \cap \bigcup (\{x\} \times Ux;\ x \in G) = \emptyset$, und dies ist ein Widerspruch dazu, daß (x, y) ein Adhärenzpunkt der Filterbasis $\mathfrak{B}$ mit den Mengen $\bigcup (\{x\} \times Ux;\ x \in G)$ ist. $\mathfrak{U}$ ist also in der Tat eine rechtsuniforme Struktur; und daß auch eine linksuniforme Struktur in $\mathfrak{U}$ vorliegt, beweist man genauso.

Alle Translationen sind gleichmäßig stetige Abbildungen, wie das bei allen Homöomorphismen eines kompakten Raumes auf sich der Fall ist. Deswegen führen sie $\mathfrak{U}$ als Ganzes in sich über; d.h. $\mathfrak{U}$ ist invariant.

Aus Satz (4.5) *ergibt sich eine Fülle von Aussagen über den Umgebungsfilter des neutralen Elements einer kompakten topologischen Loop: nämlich alle die in* (4.1) *und* (4.3) *aufgeführten sowie alle sich durch Vertauschung von rechts und links daraus ergebenden Aussagen.* Solche Relationen geben in diesem

Spezialfall ein Analogon zu der Tatsache ab, daß bei topologischen Gruppen die mit der Gruppenstruktur verträglichen Topologien schon durch gewisse Eigenschaften des Umgebungsfilters des neutralen Elements gekennzeichnet werden können. Dies ist bei Loops nicht allgemein der Fall. Daß nicht kompakte lokalkompakte Loops keine rechtsuniforme Struktur zu besitzen brauchen, zeigt das Beispiel (4.4). Selbstverständlich besagt dies nichts über die Möglichkeit, auf dem topologischen Raum, der einer topologischen Loop zugrunde liegt, eine mit seiner Topologie verträgliche uniforme Struktur einzuführen. Bekanntlich ist dies immer möglich, wenn seine Topologie vollständig regulär ist oder, wenn er, was dasselbe besagt, einem Unterraum eines kompakten Raums homöomorph ist. Es gibt reguläre Räume, die nicht vollständig regulär sind ([6], [16], [24]); die dazu bekannten Beispiele sind jedoch nicht homogen, so daß sie keinen topologischen Loops als topologische Räume zugrunde liegen können.

ANMERKUNGEN. Zur Terminologie in diesem Paragraphen verdient die Bemerkung Beachtung, daß wir eine uniforme Struktur nennen, was in der englischen Literatur etwa bei KELLEY [9] als uniformity und in der französischen bei BOURBAKI [1] als filtre des entourages bezeichnet wird; eine uniforme Struktur auf einer Menge E ist also ein Filter $\mathfrak{U}$ von Relationen, die gröber sind als die Diagonale von $E \times E$, wobei mit jeder Relation auch die konverse in $\mathfrak{U}$ enthalten ist, und zu jeder Relation $U \in \mathfrak{U}$ eine Relation $V \in \mathfrak{U}$ existiert, deren Relationenprodukt $V \circ V$ mit sich selbst noch feiner ist als U.

Zwischen den uniformen Strukturen auf dem Raum einer topologischen Loop und den Verknüpfungen besteht im allgemeinen nicht der von der Gruppentheorie her vertraute Zusammenhang. Man kann die Möglichkeit der Einführung einer uniformen Struktur, wie sie in I, (4.1) beschrieben ist, immerhin schon durch die Kenntnis der Umgebungen von e und der Art und Weise, wie sie bei Translationen befördert werden, entscheiden. Das mag nützlich sein, wenn auf einem topologischen Raum Verknüpfungen explizit gegeben sind, wie z. B. in (4.4). Im Hinblick auf eine Theorie der Vervollständigung nicht vollständiger nicht assoziativer topologisch-algebraischer Strukturen darf man nicht allzuviel erwarten. So z. B. besitzt die additive Gruppe G aller reellen Zahlen der Form $r\sqrt{2}$ mit rationalem r als Vervollständigung eine zur Gruppe aller reellen Zahlen isomorphe Gruppe. Nimmt man etwa nun die Abbildung f, die einer Irrationalzahl mit der Dualbruchentwicklung $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ die Zahl mit der Entwicklung $,0, x_2 x_1 x_3 \ldots$ zuordnet (die einen involutorischen Homöomorphismus von G auf sich darstellt) und bildet auf G die Verknüpfung $(x, y) \to x \circ y = f(x + y)$, so ist $(G, \circ)$ eine kommutative [zu $(G, +)$ isotope] Quasigruppe, deren Verknüpfung sich nicht stetig auf die Vervollständigung von G fortsetzen läßt.

§ 5. Zusammenhang

(5.1) Ein topologischer Raum $(E, \mathfrak{O}(E))$ heißt bekanntlich *zusammenhängend*, wenn auf ihm die gröbste, d. h. die triviale Äquivalenzrelation $T = E \times E$ die einzige offene Äquivalenzrelation ist. Er heißt *in einem Punkt x lokalzusammenhängend*, wenn $\mathfrak{U}(x)$ eine Basis aus zusammenhängenden Umgebungen besitzt. Ist E in jedem Punkt lokalzusammenhängend, so nennt man E *lokalzusammenhängend* schlechthin. Zusammenhang bleibt bei stetiger Abbildung und bei Produktbildung erhalten, ebenso bei Bildung der Vereinigung zusammenhängender Teilräume mit nicht leerem Durchschnitt von je zweien von ihnen. *Die Relation $\{(x, y)$; x und y liegen in einem zusammenhängenden Teilraum von $E\}$ ist eine abgeschlossene Äquivalenzrelation Z.* Die

Klasse $Z(x)$ des Punktes x bezeichnet man als *Zusammenhangskomponente* von x. Ein topologischer Raum $(E, \mathfrak{O}(E))$ heißt *total unzusammenhängend*, wenn Z gleich der Diagonalen D von $E \times E$ ist. *Genau dann ist also E zusammenhängend und total unzusammenhängend zugleich, wenn $D = T$, d.h. wenn E nur aus einem Punkt besteht.*

(5.2) *Ist E ein beliebiger topologischer Raum, so ist E/Z ein total unzusammenhängender T_1-Raum.*

BEWEIS. Z ist abgeschlossen; also genügt E/Z dem Axiom T_1. Angenommen K sei eine aus wenigstens zwei Punkten bestehende Zusammenhangskomponente auf E/Z. Ihr Urbild F bei der Abbildung $x \to Z(x)$ enthielte wenigstens zwei verschiedene Komponenten in E, wäre also nicht zusammenhängend. Auf F gäbe es also eine nicht triviale offene Äquivalenzrelation R und F/R wäre diskret. R ist gröber als Z. $(F/Z)/(R/Z)$ ist homöomorph zu F/R und ist demnach diskret. (Es sei daran erinnert, daß R/Z diejenigen Äquivalenzklassen nach Z zu einer Klasse auf F/Z zusammenfaßt, die in einer Klasse nach R enthalten sind.) R/Z ist offen auf F/Z und, da $F/Z = K$ zusammenhängend ist, trivial; d.h. es bestünden $(F/Z)/(R/Z)$ und damit auch F/R nur aus einem Punkt im Widerspruch zur Bestimmung von R.

(5.3) Ist E ein beliebiger topologischer Raum, so bezeichnen wir mit Z' den *Durchschnitt aller offenen Äquivalenzrelationen*. Die Äquivalenzklasse $Z'(x)$ eines Punktes x nach Z' bezeichnet man als *Quasikomponente* von x. *Jede offene Äquivalenzrelation ist gröber als Z'.* Die Quasikomponente von x ist der Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Umgebungen von x. Ist $Z' = D$, so nennen wir den Raum E *nirgends zusammenhängend. Ein nirgends zusammenhängender Raum ist total unzusammenhängend, aber nicht umgekehrt.*

Ist E ein beliebiger topologischer Raum, so ist E/Z' ein nirgends zusammenhängender T_1-Raum.

BEWEIS. Z' ist abgeschlossen, also genügt E/Z' dem Axiom T_1. Angenommen K sei eine aus wenigstens zwei Punkten $Z'(a)$ und $Z'(b)$ bestehende Quasikomponente auf E/Z'. Ihr Urbild F bei der Abbildung $x \to Z'(x)$ enthielte wenigstens zwei verschiedene Quasikomponenten $Z'(a)$ und $Z'(b)$. Es gibt dann offene und abgeschlossene Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(a)$ und $V \in \mathfrak{U}(b)$, so daß $Z'(a) \subsetneqq U$ und $Z'(b) \subsetneqq V$ und ferner $a \notin V$ und $b \notin U$. Die offenen und abgeschlossenen Teilräume $U - (U \cap V)$ und $V - (U \cap V)$ enthalten ausschließlich volle Z'-Klassen und werden durch $x \to Z'(x)$ daher in punktfremde offene und abgeschlossene Teilräume U' und V' in E/Z' abgebildet, die $Z'(a)$ bzw. $Z'(b)$ enthalten. $Z'(a)$ und $Z'(b)$ können daher nicht in einer Quasikomponente K auf E/Z' enthalten sein.

(5.4) Es ist nicht richtig, daß E/S total unzusammenhängend sein muß, wenn S eine Äquivalenzrelation bezeichnet, die gröber ist als Z. Bekannt ist das Beispiel des total unzusammenhängenden Raums aller Folgen rationaler Zahlen in der schwachen Topologie, dessen Quotientenraum nach der Relation $S = \{(x, y);\ x - y$ ist eine Cauchyfolge$\}$ dem Raum der reellen Zahlen homöomorph ist.

Ist E lokal zusammenhängend, dann ist Z offen. Jede offene Äquivalenzrelation ist gröber als Z. Auf einem kompakten Raum ist $Z=Z'$. Daraus folgt insbesondere fast unmittelbar, daß jeder Punkt eines kompakten total unzusammenhängenden Raums eine Umgebungsbasis aus zugleich offenen und abgeschlossenen Umgebungen besitzt.

(5.5) Nun sei G eine topologische Loop und U eine Umgebung von e. Die Menge aller Paare $(x, y)\in G\times G$, für die wenigstens eines der Elemente $x\backslash y$, $y\backslash x$, y/x oder x/y in U liegt, sei mit Q_U bezeichnet. Z_U sei die Menge aller Paare $(x, y)\in G\times G$, zu denen eine endliche Punktmenge $a_0=x, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n=y$ existiert, so daß $(a_m, a_{m+1})\in Q_U$ für $m=0, \ldots, n-1$ gilt. Dann ist Z_U eine offene Äquivalenzrelation auf G.

Beweis. Trivialerweise ist Z_U eine Äquivalenzrelation. Es sei $x\in Z_U(y)$. Dann ist $Ux\in\mathfrak{U}(x)$; nach Definition ist aber $Ux\subseteq Z_Z(y)$, d.h. Z_U ist offen.

Trivial ist auch die folgende Aussage:

(5.6) Die von einer Umgebung $U\in\mathfrak{U}(e)$ in G erzeugte offene Unterloop H enthält $Z_U(e)$.

Da jede offene Äquivalenzrelation gröber ist als Z, folgt daraus unmittelbar

(5.7) *Jede zusammenhängende topologische Loop wird von jeder Umgebung des neutralen Elements erzeugt.*

(5.8) *In einer topologischen Loop sind Z und Z' abgeschlossene Kongruenzen; es gilt natürlich stets $Z\subseteq Z'$.*

Beweis. Der Automorphismus h von G führe das Element $a\in G$ in das Element $b\in G$ über. Die Homöomorphismen $R_{a\backslash b}$ und h führen $Z(a)$ und $Z'(a)$ in $Z(b)$ bzw. $Z'(b)$ über: Wegen der Homöomorphieeigenschaft von $R_{a\backslash b}$ und h und den Definitionen von Z bzw. Z' gilt z.B. $Z(a)^{R_{a\backslash b}}=Z(b)$ und $Z(b)^{R_{a\backslash b}^{-1}}=Z(a)$. Ist ferner S eine offene Äquivalenzrelation, so auch diejenige Relation, die die Klassen $S(x)^{R_{a\backslash b}}$ besitzt. Es gilt also $S(a)^{R_{a\backslash b}}\supseteq Z'(b)$. Daraus folgt aber dann $Z'(a)^{R_{a\backslash b}}\supseteq Z'(b)$. Analog gewinnt man $Z'(b)^{R_{a\backslash b}^{-1}}\supseteq Z'(a)$ und die entsprechenden Beziehungen für h und Z bzw. h und Z'. Allgemeiner gilt, daß Z und Z' bei jedem Homöomorphismus von G auf sich in sich transformiert werden.

Da Z und Z' sogar bei jedem Automorphismus von G in sich übergeführt werden, bilden diese Relationen sogar charakteristische Kongruenzen [I, (1.5)].

(5.9) *Die Zusammenhangskomponente $Z'(e)$ und die Quasikomponente $Z'(e)$ (d.h. der Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Umgebungen von e) sind in einer topologischen Loop G abgeschlossene charakteristische Normalteiler. $Z(e)$ ist in $Z'(e)$ enthalten und ist gleich $Z'(e)$, wenn G kompakt ist.*

Beweis. Zum Beweis genügt außer dem schon Bekannten die Feststellung, daß jeder Automorphismus e und damit $Z(e)$ und $Z'(e)$ festläßt.

(5.10) *Ist G eine topologische Loop, so sind die Halbloops G/Z und G/Z' topologische Loops. G/Z ist total unzusammenhängend und G/Z' nirgends zusammenhängend.*

Beweis. Wir haben noch nachzuweisen, daß G/Z eine Loop ist. Es sei $Z(a)Z(x)=Z(a)Z(y)$. Dann ist $Z(ax)=Z(ay)$ oder $aZ(x)=aZ(y)$ oder

$Z(x)=Z(y)$. Genauso folgt aus $Z(x)Z(a)=Z(y)Z(a)$ immer $Z(x)=Z(y)$. Entsprechendes gilt für Z' statt Z.

Der folgende Hilfssatz ist wieder frei von algebraischen Begriffen.

(5.11) Ist E ein topologischer Raum und F ein total unzusammenhängender topologischer Raum, dann ist jede stetige Abbildung f von E in F auf jeder Zusammenhangskomponente von E konstant.

BEWEIS. Das Bild einer Komponente von E bei f ist zusammenhängend in F und besteht also nur aus einem Punkt.

Daraus folgt nun der Satz:

(5.12) *Ein total unzusammenhängender Normalteiler H einer zusammenhängenden topologischen Loop G liegt stets im Zentrum von G (d.h. jedes seiner Elemente kommutiert mit jedem Element von G und assoziiert mit jedem Elementepaar aus G in jeder Reihenfolge).*

BEWEIS. Es sei a ein Element aus H. Die Abbildungen $(x, y)\to a^{R_x R_y R_{xy}^{-1}}$ und $(x, y)\to a^{R_y L_x R_{xy}^{-1}}$ sind stetige Abbildungen von $G\times G$ in H, weil H ein Normalteiler ist. Nach I, (5.11) sind diese Abbildungen konstant. Jedes Element von H bleibt also bei den Translationen eines Erzeugendensystems der inneren Transformationsgruppe $\mathfrak{H}$ fest, also auch bei jeder Translation aus $\mathfrak{H}$. Nach einer Bemerkung aus I, (1.7) folgt daraus die Behauptung.

(5.13) *$(G, \mathfrak{O}(G))$ sei eine topologische Loop, in der jeder Punkt in jeder seiner Umgebungen eine nichttriviale Zusammenhangskomponente besitzt. Dann gibt es eine feinere nicht diskrete Topologie $\mathfrak{O}'(G)\supseteq\mathfrak{O}(G)$, bezüglich der $(G, \mathfrak{O}(G))$ eine lokal zusammenhangende topologische Loop bildet.*

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x bezüglich $\mathfrak{O}(G)$. Mit $\mathfrak{B}(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Zusammenhangskomponenten von x in allen Mengen $U\in\mathfrak{U}(x)\cap\mathfrak{O}(G)$; von jenen ist Voraussetzung keine gleich $\{x\}$. Aus $U'\in\mathfrak{B}(x)$ folgt trivialerweise $x\in U'$. Es sei y ein Element aus $U'\in\mathfrak{B}(x)$. U sei eine offene Umgebung von x, deren x-Komponente U' bildet. Es gibt eine offene Umgebung $V\in\mathfrak{U}(y)$ mit $V\subseteq U$, und die y-Komponente V' von V ist in U' enthalten, d.h. es gibt ein $V'\in\mathfrak{B}(y)$ mit $V'\subseteq U'$. Damit kann auf G eine Topologie $\mathfrak{O}'(G)$ definiert werden, in der jeder Punkt $x\in G$ als Basis der offenen Umgebungen gerade die Filterbasis $\mathfrak{B}(x)$ besitzt. $\mathfrak{U}'(x)$ sei der zu x gehörende Umgebungsfilter bezüglich $\mathfrak{O}'(G)$. Weil $\{x\}$ keine Umgebung von x darstellt, ist $\mathfrak{O}'(G)$ sicher nicht diskret. Ist $U\in\mathfrak{U}(x)$, so stimmen die Relativtopologie des Teilraums U' und die neue Topologie auf U' überein; d.h. U' ist in der neuen Topologie auch zusammenhängend und G ist lokal zusammenhängend.

Nun sei (a, b) ein beliebiger Punkt aus $G\times G$. Zu jeder offenen Umgebung U' aus $\mathfrak{U}'(ab)$ gibt es ein $U\in\mathfrak{U}(ab)\cap\mathfrak{O}(G)$, dessen ab-Komponente $= U'$ ist. Zu U finden wir infolge der Stetigkeit der Verknüpfung $(x, y)\to xy$ bezüglich $\mathfrak{O}(G)$ zwei Umgebungen $V\in\mathfrak{U}(a)\cap\mathfrak{O}(G)$ und $W\in\mathfrak{U}(b)\cap\mathfrak{O}(G)$, so daß $VW\subseteq U$. Ist V' (bzw. W') die a-(bzw. b-) Komponente von V (bzw. W), so ist $V'W'$ als stetiges Bild des zusammenhängenden Raums $V'\times W'$ zusammenhängend bezüglich $\mathfrak{O}(G)$ und ist also in U' enthalten und enthält seinerseits natürlich ab. Das

besagt aber gerade, daß die Abbildung $(x, y) \to xy$ auch in der neuen Topologie stetig ist. Analoges gilt für die Verknüpfungen $(x, y) \to x\backslash y$ und $(x, y) \to x/y$.

Man beachte, daß von den spezifischen Loopeigenschaften nichts in den Beweis eingegangen ist. Der Satz gilt also für beliebige topologisch-algebraische Strukturen.

(5.14) $(G, \mathfrak{T}(G))$ *sei eine zusammenhängende, lokalkompakte Loop. Dann besteht G nur aus einem Punkt oder jeder Punkt von G hat in jeder seiner Umgebungen eine nichttriviale Zusammenhangskomponente.*

Beweis. $a \in G$ sei ein Punkt, der in $W \in \mathfrak{U}(a)$ die Komponente $\{a\}$ besitze. Jedem Punkt b ist also eine Umgebung $W^{R_a \backslash b}$ zugeordnet, in der er die Komponente $\{b\}$ hat. Es sei $U = W^{R_a \backslash b}$ und W' eine Umgebung von e, für die $W'W' \subseteq U$ gilt. Für $x \in W'$ hat man also $W' \subseteq U^{R_x^{-1}}$. Nun ist $e^{R_x^{-1}} = e/x$ und da $x \to e/x$ die stetige Umkehrabbildung $z \to z\backslash e$ hat, sind e/W' und damit $V = W' \cap e/W'$ Umgebungen von e. Jeder Punkt $y \in V$ hat eine Darstellung in der Form e/y' mit $y' \in W'$; es gilt also $y = e/y' = e^{R_{y'}^{-1}}$ mit $y' \in W'$. Der Punkt y hat die Umgebung $U^{R_{y'}^{-1}}$, die V enthält, und in der $\{y\}$ die Komponente von y ist. Dann ist aber auch $\{y\}$ die Komponente von y in V. Nun ist also V eine total unzusammenhängende Umgebung von e. Ein beliebiger Punkt $x \in G$ hat die total unzusammenhängende Umgebung Vx, die wir nach Voraussetzung kompakt annehmen dürfen. Zu jedem x wählen wir ein $U_x \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $U_x(U_x x) \subseteq Vx$. Jede in $U_x x$ enthaltene relativ offene und relativ abgeschlossene Umgebung A von x hat eine in G abgeschlossene Hülle, die wegen $U_x(U_x x) \subseteq Vx$ in Vx enthalten ist. Jede solche Umgebung ist also auch in G offen und abgeschlossen. Da Vx total unzusammenhängend ist, besitzt x eine Basis aus offenen und abgeschlossenen Umgebungen in Vx, dann nach dem Dargelegten auch eine Basis von in G offenen und abgeschlossenen Umgebungen. Der Durchschnitt Z' aller offenen Äquivalenzrelationen auf G ist also die identische Relation D, d.h. die Diagonale in $G \times G$. Die Zusammenhangsrelation Z ist feiner als Z' und ist daher gleich D; damit ist G als total unzusammenhängend erkannt. Da G aber auch zusammenhängend ist, kann G nur aus einem Punkt bestehen.

(5.15) *Ist G eine zusammenhängende lokalkompakte Loop, so ist G in der feineren Topologie gemäß* I, (5.13), *lokalkompakt und lokal zusammenhängend.*

Beweis. U sei eine kompakte Umgebung von e. Die e-Komponente U' von e ist abgeschlossen in U, also kompakt. Da die Relativtopologie auf U' mit der verfeinerten Topologie übereinstimmt, ist U' in der feineren Topologie kompakt.

(5.16) Ist G in der Ausgangstopologie kurvenzusammenhängend, dann auch in der verfeinerten Topologie.

Beweis. K sei ein Kurvenbogen in G, d.h. ein homöomorphes Bild des Intervalls $[0, 1]$ in G bezüglich der alten Topologie bei einem Homöomorphismus f. Ferner sei V eine offene Umgebung von e in G, und V' sei die e-Komponente von V. Die x-Komponente W_x von Vx ist gleich $V'x$; denn es gilt ja $V'x \subseteq W_x$ und $W_x^{R_x^{-1}} \subseteq V'$. Da $f^{-1}(K \cap V'x)$ für ein $x \in K$ ein offenes Intervall auf $[0, 1]$ darstellt, genügen schon endlich viele Mengen $V'x_i$ $(x_i \in K, i = 1, \ldots, n)$, um K zu überdecken. K liegt in dem zusammenhängenden Unterraum $\cup\{V'x_i;$

$i=1, \ldots, n\}$ und ist bezüglich der Relativtopologie auf diesem Raum ein homöomorphes Bild von $[0, 1]$. Die Relativtopologie auf diesem Raum ist aber identisch mit der Relativtopologie in der verfeinerten Topologie, bezüglich der jener Raum einen offenen zusammenhängenden Teilraum bildet. Also ist auch in der feineren Topologie K ein homöomorphes Bild von $[0, 1]$. Zwei Punkte, die sich in $(G, \mathfrak{O}(G))$ durch eine Kurve verbinden lassen, lassen sich auch $(G, \mathfrak{O}(G))$ durch einen Kurvenbogen verbinden.

Es gibt Beispiele von topologischen Gruppen, die kompakt und zusammenhängend sind, und die bei Verfeinerung ihrer Topologie im obigen Sinne zu lokalkompakten, lokal zusammenhängenden und nicht zusammenhängenden Gruppen werden (z.B. die sogenannten Solenoide von VAN DANTZIG).

ANMERKUNGEN. Wie bereits in der Einleitung betont wurde, haben wir alle Zusammenhangsfragen weitgehend relationentheoretisch formuliert. Der Satz I, (5.7) wurde (mit einem anderen Beweis) von MALCEV [*11*] angegeben, ebenso der Satz I, (5.12), jedoch letzterer mit der unnötig scharfen Einschränkung, daß H diskret vorausgesetzt wurde. Einen Satz ähnlichen Typs beweisen wir im zweiten Paragraphen des zweiten Kapitels. Die Satzgruppe (5.13) bis (5.15) wird uns in III weiter beschäftigen.

§ 6. Überlagerungsstrukturen

(6.1) Wir befassen uns mit der Existenz von Überlagerungsstrukturen und stützen uns im wesentlichen auf den von CHEVALLEY in [*3*] verwendeten Überlagerungsbegriff.

Es sei f eine stetige Abbildung eines topologischen Raumes $(\tilde{E}, \mathfrak{O}(\tilde{E}))$ in einen topologischen Raum $(E, \mathfrak{O}(E))$. Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt *schlicht überlagert* von E bezüglich f, wenn jede Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(A)$ zu A homöomorph ist. Es sei nun $(E, \mathfrak{O}(E))$ ein topologischer Raum. Ein *Überlagerungsraum* von $(E, \mathfrak{O}(E))$ ist ein Paar $((\tilde{E}, \mathfrak{O}(\tilde{E})); f)$ bestehend aus einem zusammenhängenden topologischen Raum $(\tilde{E}, \mathfrak{O}(\tilde{E}))$ und einer stetigen Abbildung f von $\tilde{E}$ auf E mit der Eigenschaft, daß mindestens eine Umgebung jedes Punktes von E schlicht überlagert ist bezüglich f. Es folgt, daß f eine offene Abbildung ist. Zwei Überlagerungsräume $(\tilde{E}_1, f_1)$ und $(\tilde{E}_2, f_2)$ nennt man *isomorph*, wenn ein Homöomorphismus g von E_1 auf E_2 existiert, so daß $f_2 \circ g = f_1$. Ein topologischer Raum E heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend und lokal zusammenhängend ist, und jeder Überlagerungsraum dem trivialen (E, i) (i sei die identische Abbildung) isomorph ist. *Das direkte Produkt von einfach zusammenhängenden Räumen ist wieder einfach zusammenhängend.* Der im folgenden zitierte Satz ist der Kern aller späteren Anwendungen:

(6.2) *Es sei F ein einfach zusammenhängender topologischer Raum, E ein topologischer Raum, $(\tilde{E}, f)$ ein einfach zusammenhängender Überlagerungsraum von E. Es sei g eine stetige Abbildung von F in E. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{g}$ von F in $\tilde{E}$, so daß $f \circ \tilde{g} = g$. Ist $x_0 \in F$ ein fester Punkt und $y_0 \in f^{-1}(g(x_0))$ beliebig aber fest, so kann $\tilde{g}$ so gewählt werden, daß $\tilde{g}(x_0) = y_0$ gilt. g ist dann eindeutig bestimmt.*

(6.3) *Zu jedem zusammenhängenden, lokal zusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden topologischen Raum gibt es einen einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum. (Ein topologischer Raum heißt lokal einfach zusammenhängend, wenn jeder seiner Punkte wenigstens eine einfach zusammenhängende Umgebung besitzt.) Jeder einfach zusammenhängende Überlagerungsraum ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Man nennt ihn den universellen Überlagerungsraum.*

(6.4) Ist $(\tilde{E}, f)$ ein einfach zusammenhängender Überlagerungsraum von E, dann nennt man die Gruppe aller Homöomorphismen g von $\tilde{E}$ auf sich, für die $f \circ g = f$ gilt, die *Poincaré- oder Fundamentalgruppe* von E. *Sie ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Sind x und y Punkte aus E, für die $f(x) = f(y)$ gilt, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus aus der Poincaré-Gruppe, der x auf y abbildet* (s. CHEVALLEY [3]).

Nachdem wir die wichtigsten Gesichtspunkte aus der Theorie der Überlagerungsräume zusammengestellt haben, können wir zur Konstruktion von einfach zusammenhängenden Überlagerungsstrukturen topologisch-algebraischer Strukturen übergehen.

(6.5) G sei eine topologisch-algebraische Struktur mit einer zweistelligen Verknüpfung $(x, y) \to xy$. Der topologische Raum $(G, \mathfrak{O}(G))$ besitze einen einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum $(\tilde{G}, f)$ (z.B. trifft dies zu, wenn G zusammenhängend, lokal zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend ist). Dann kann der topologische Raum $\tilde{G}$ mit einer stetigen zweistelligen Verknüpfung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} + \tilde{y}$ ausgestattet werden, und f stellt einen Homöomorphismus dar. Hat G ein neutrales Element e, dann gibt es auch in $\tilde{G}$ ein neutrales Element, das in $f^{-1}(e)$ liegt.

BEWEIS. Es sei e ein zunächst beliebiger Punkt von G, und $\tilde{e}$ sei aus $f^{-1}(e)$ fest gewählt. Das direkte Produkt $\tilde{G} \times \tilde{G}$ ist einfach zusammenhängend. Nach (6.2) gibt es zu der stetigen Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to f(\tilde{x}) f(\tilde{y})$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in G eine stetige Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} + \tilde{y}$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in $\tilde{G}$ mit der Eigenschaft, daß $f(\tilde{x} + \tilde{y}) = f(\tilde{x}) f(\tilde{y})$. Da f stetig und offen ist, stellt dies schon den ersten Teil der Behauptung dar. Nun sei e neutrales Element von G. Dann kann die Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} + \tilde{y}$ wegen $f(\tilde{e} + \tilde{e}) = f(\tilde{e}) f(\tilde{e}) = ee = e$ so bestimmt werden, daß $\tilde{e} + \tilde{e} = \tilde{e}$. Das Elemnt $\tilde{e}$ ist dann bezüglich $+$ ein neutrales Element von $\tilde{G}$; denn $\tilde{x} \to \tilde{x} + \tilde{e}$ ist diejenige stetige Abbildung des einfach zusammenhängenden Raumes G in G, die wegen $\tilde{e} \to \tilde{e}$ und $f(\tilde{x} + \tilde{e}) = f(\tilde{x})$ der stetigen Abbildung $\tilde{x} \to f(\tilde{x})$ von $\tilde{G}$ in G gemäß (6.2) eindeutig zugeordnet ist. Die kennzeichnenden Eigenschaften jener Abbildung hat aber auch die identische Abbildung $\tilde{x} \to \tilde{x}$, die deshalb mit ihr übereinstimmen muß; d.h. es gilt $\tilde{x} + \tilde{e} = \tilde{x}$. Entsprechend beweist man $\tilde{e} + \tilde{x} = \tilde{x}$.

(6.6) *Ist G eine topologische Loop mit den Verknüpfungen $(x, y) \to xy$, $(x, y) \to x \backslash y$ und $(x, y) \to y/x$, dann ist auch $\tilde{G}$ eine topologische Loop, und die Auflösung der Gleichungen $\tilde{x} + \tilde{u} = \tilde{y}$ und $\tilde{v} + \tilde{x} = \tilde{y}$ geschieht gerade durch die-*

jenigen Abbildungen $(x, y) \to \tilde{u} = \tilde{x} \backslash \tilde{y}$ *und* $(x, y) \to \tilde{v} = \tilde{y} / \tilde{x}$, *die durch den in* (6.5) *angegebenen Prozeß aus den Verknüpfungen* $(x, y) \to x \backslash y$ *und* $(x, y) \to y / x$ *auf* G *hervorgehen unter der Maßgabe, daß* $\tilde{e} \backslash \tilde{e} = \tilde{e} / \tilde{e} = \tilde{e}$ *gelte.*

BEWEIS. Die stetigen Abbildungen $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} + (\tilde{x} \backslash \tilde{y})$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (\tilde{y} / \tilde{x}) + \tilde{x}$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in $\tilde{G}$ bilden beide den Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e})$ auf $\tilde{e}$ ab und haben die Eigenschaft, daß $f(\tilde{x} + (\tilde{x} \backslash \tilde{y})) = f(\tilde{x}) f(\tilde{x} \backslash \tilde{y}) = f(\tilde{x}) (f(\tilde{x}) \backslash f(\tilde{y})) = f(\tilde{y})$ und entsprechend $f((\tilde{y} / \tilde{x}) + \tilde{x}) = f(\tilde{y})$. Sie stellen also beide die nach (6.2) eindeutig bestimmte stetige Abbildung von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in $\tilde{G}$ dar, die zu der stetigen Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to f(\tilde{y})$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in G gehört; zu dieser Abbildung gehört aber auch die Projektion $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{y}$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in $\tilde{G}$. Es folgt daraus $\tilde{x} + (\tilde{x} \backslash \tilde{y}) = \tilde{y}$ und $(\tilde{y} / \tilde{x}) + \tilde{x} = \tilde{y}$, d.h. die Gleichungen $\tilde{x} + \tilde{u} = \tilde{y}$ bzw. $\tilde{v} + \tilde{x} = \tilde{y}$ werden tatsächlich durch $\tilde{u} = \tilde{x} \backslash \tilde{y}$ und $\tilde{v} = \tilde{y} / \tilde{x}$ gelöst. Gilt nun etwa $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{u}'$, so folgt daraus immer $f(\tilde{y}) = f(\tilde{x}) f(\tilde{x} \backslash \tilde{y}) = f(\tilde{x}) f(\tilde{u}')$ oder $f(\tilde{u}') = f(\tilde{x} \backslash \tilde{y})$. Die Abbildung $\tilde{z} \to \tilde{z} + \tilde{u}'$ von $\tilde{G}$ auf $\tilde{G}$ hat die Eigenschaft, daß $f(\tilde{z} + \tilde{u}') = f(\tilde{z}) f(\tilde{u}') = f(\tilde{z} + (\tilde{x} \backslash \tilde{y}))$ und daß $\tilde{x} + \tilde{u}' = \tilde{y}$ gilt. Nach einem mehrfach ausgeführten Schluß ist also $\tilde{z} + \tilde{u}' = \tilde{z} + (\tilde{x} \backslash \tilde{y})$ für alle $\tilde{z}$, insbesondere also für $\tilde{z} = \tilde{e}$; d.h. es ist $\tilde{u}' = \tilde{x} \backslash \tilde{y}$. Entsprechend behandelt man die Gleichung $\tilde{v} + \tilde{x} = \tilde{y}$; man erkennt so, daß $\tilde{G}$ in der Tat eine topologische Loop darstellt. Das Tripel $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ nennen wir eine einfach zusammenhängende Überlagerungsloop von G.

Ist G eine I-Loop, so läßt sich ohne Schwierigkeiten mit den eben dargelegten Methoden zeigen, daß auch $\tilde{G}$ mit der Struktur einer I-Loop ausgestattet werden kann.

Der Kern $\tilde{H} = f^{-1}(e)$ *ist nach* I, (1.5) *ein Normalteiler von* $\tilde{G}$.

(6.7) *Es sei* $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ *eine einfach zusammenhängende Überlagerungsloop einer topologischen Loop* G. *Die Poincaré-Gruppe von* G *ist isomorph zu dem Normalteiler* $\tilde{H} = f^{-1}(e)$ *von* $\tilde{G}$, *dieser ist also eine Gruppe, die sich überdies als abelsch erweist. Jede zusammenhängende, lokal zusammenhängende und lokal einfach zusammenhängende topologische Loop hat demnach eine kommutative Fundamentalgruppe.*

BEWEIS. Es sei $\tilde{a} \in \tilde{H}$. Dann sind $R_{\tilde{a}}$ und $L_{\tilde{a}}$ Homöomorphismen von $\tilde{G}$ auf sich, für die wegen $f(\tilde{a}) = e$ stets $f \circ R_{\tilde{a}} = f \circ L_{\tilde{a}} = f$ gilt; $R_{\tilde{a}}$ und $L_{\tilde{a}}$ gehören der Poincaré-Gruppe an. Andererseits sei T ein Homöomorphismus aus der Poincaré-Gruppe und $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ seien Elemente aus $\tilde{G}$, so daß $\tilde{x}^T = \tilde{y}$ gilt. Dann gibt es, da $\tilde{G}$ eine Loop ist, eindeutig bestimmte Elemente $\tilde{a}'$ und $\tilde{a}''$ aus $\tilde{G}$, so daß $\tilde{x} + \tilde{a}' = \tilde{a}'' + \tilde{x} = \tilde{y}$. Aus $f(\tilde{x}) f(\tilde{a}') = f(\tilde{a}'') f(\tilde{x}) = f(\tilde{y}) = f(\tilde{x})$ folgt, daß $\tilde{a}'$ und $\tilde{a}''$ in $\tilde{H}$ liegen, daß $R_{\tilde{a}'}$ und $L_{\tilde{a}''}$ der Poincaré-Gruppe angehören und beide gleich T sein müssen [I, (6.4)]. Wegen $\tilde{e}^T = \tilde{e}^{R_{\tilde{a}'}} = \tilde{e}^{L_{\tilde{a}''}}$ gilt $\tilde{a}' = \tilde{a}''$. Zu jeder Operation T der Poincaré-Gruppe existiert also genau ein Element $\tilde{a}_T$ aus $\tilde{H}$, für welches $R_{\tilde{a}_T} = L_{\tilde{a}_T} = T$ gilt; zu $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ aus $\tilde{H}$ gibt es also ein wohlbestimmtes $\tilde{c}$ aus $\tilde{H}$, so daß $R_{\tilde{b}} \circ R_{\tilde{a}} = R_{\tilde{c}}$; infolge $e^{R_{\tilde{c}}} = \tilde{c} = \tilde{e}^{R_{\tilde{a}} R_{\tilde{b}}} = \tilde{a} + \tilde{b}$

ist $\tilde{a} \to R_{\tilde{a}}$ ein algebraischer Isomorphismus von $\tilde{H}$ auf die Fundamentalgruppe. $\tilde{H}$ ist also eine Gruppe, die überdies kommutativ ist, da Rechts- und Linkstranslationen auf $\tilde{H}$ übereinstimmen. Daher ist auch die Poincaré-Gruppe von G kommutativ.

Es ist noch anzumerken, *daß $\tilde{H}$ nicht nur Normalteiler von $\tilde{G}$, sondern auch im Zentrum von $\tilde{G}$ enthalten ist.* Dies ist eine Folge von Satz I, (5.12); H ist nämlich diskret und daher erst recht total unzusammenhängend [denn es existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ in G, so daß die Komponenten von $f^{-1}(U)$ zu U homöomorph sind; keine zwei Punkte von H können also einer Komponente angehören].

(6.8) Es seien $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ und $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ einfach zusammenhängende Überlagerungsloops von G. Die Verknüpfung in $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ sei mit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} + \tilde{y}$ und die in $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ mit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} \circ \tilde{y}$ bezeichnet. $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ und $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ sind isomorph.

Beweis. Es gibt ein $\tilde{a} \in f^{-1}(e)$, so daß $\tilde{a} + \tilde{e} = \tilde{e}'$. Die Abbildung $L_{\tilde{a}} = (\tilde{x} \to \tilde{a} + \tilde{x})$ ist eine Operation der Fundamentalgruppe. Also gilt für alle $\tilde{x} \in \tilde{G}$ die Gleichung $f(\tilde{a} + \tilde{x}) = f(\tilde{x})$. Es folgt daraus $f\big((\tilde{a} + \tilde{x}) \circ (\tilde{a} + \tilde{y})\big) = f(\tilde{x}) f(\tilde{y}) = f(\tilde{x} + \tilde{y}) = f\big(\tilde{a} + (\tilde{x} + \tilde{y})\big)$. Die Abbildungen $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (\tilde{a} + \tilde{x}) \circ (\tilde{a} + \tilde{y})$ und $(x, y) \to \tilde{a} + (\tilde{x} + \tilde{y})$ führen $(\tilde{e}, \tilde{e})$ in $(\tilde{a} + \tilde{e}) \circ (\tilde{a} + \tilde{e}) = \tilde{e}' \circ \tilde{e}' = \tilde{e}'$ bzw. in $\tilde{a} + (\tilde{e} + \tilde{e}) = \tilde{a} + \tilde{e} = \tilde{e}'$ über. Wir wenden wiederum (6.2) an, um zu schließen, daß die beiden Abbildungen übereinstimmen; d.h. es gilt $(\tilde{a} + \tilde{x}) \circ (\tilde{a} + \tilde{y}) = \tilde{a} + (\tilde{x} + \tilde{y})$. Die Abbildung $R_{\tilde{a}} = L_{\tilde{a}}$ ist also Isomorphismus von $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ auf $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$.

(6.9) Unter denselben Voraussetzungen wie in (6.8) sei $(\tilde{G}', f', \tilde{e}_0')$ eine neue einfach zusammenhängende Überlagerungsloop von G mit der Verknüpfung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} \,\&\, \tilde{y}$. Dann existiert ein Homöomorphismus h von $\tilde{G}$ auf $\tilde{G}'$, so daß $f' \circ h = f$ und $f \circ h^{-1} = f'$. Es sei $h^{-1}(\tilde{e}_0') = \tilde{e}'$; wegen $f(\tilde{e}') = f'(\tilde{e}_0') = e$ ist $\tilde{e}' \in f^{-1}(e)$ und es gibt nach der vorigen Nummer eine zu $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ isomorphe einfach zusammenhängende Überlagerungsloop $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ mit der Verknüpfung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} \circ \tilde{y}$. Die stetige Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} \wedge \tilde{y} = h^{-1}\big(h(\tilde{x}) \,\&\, h(\tilde{y})\big)$ des einfach zusammenhängenden Raums $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in den einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum $\tilde{G}$ von G hat die Eigenschaft, den Identitäten $f(\tilde{x} \wedge \tilde{y}) = f'\big(h(\tilde{x}) \,\&\, h(\tilde{y})\big) = f'\big(h(\tilde{x})\big) f'\big(h(\tilde{y})\big) = f(\tilde{x}) f(\tilde{y})$ und $\tilde{e}' \wedge \tilde{e}' = h^{-1}\big(h(\tilde{e}') \,\&\, h(\tilde{e}')\big) = h^{-1}(\tilde{e}_0' \,\&\, \tilde{e}_0') = h^{-1}(\tilde{e}_0') = \tilde{e}'$ zu genügen. Genau dieselben Eigenschaften hat die Abbildung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x} \circ \tilde{y}$ von $\tilde{G} \times \tilde{G}$ in $\tilde{G}$, die durch eben diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist. Es gilt also $\tilde{x} \wedge \tilde{y} = \tilde{x} \circ \tilde{y}$. Die Abbildung h ist also ein Isomorphismus der einfach zusammenhängenden Überlagerungsloop $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ auf $(\tilde{G}', f', \tilde{e}_0')$. Da $(\tilde{G}, f, \tilde{e}')$ zu $(\tilde{G}, f, \tilde{e})$ isomorph ist, haben wir folgenden Satz:

(6.10) *Die einfach zusammenhängende Überlagerungsloop einer zusammenhängenden, lokal zusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden Loop G ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(6.11) *G sei eine zusammenhängende, lokal zusammenhängende Loop. H sei ein diskreter Normalteiler von G. Der zu H als Kern gehörige Homomorphismus heiße h. Dann ist (G, h) eine Überlagerungsloop von G/H. Ist G einfach zusammenhängend, so ist (G, h) die universelle Überlagerungsloop von G/H, und H ist isomorph zu der Poincaré-Gruppe von G/H.*

BEWEIS. Nach I, (5.12) liegt H im Zentrum von G. Es sei $x' \in G/H$, d.h. $x' = Hx$ mit einem gewissen $x \in H$. Die Menge Hx ist diskret. Es sei ferner $U \in \mathfrak{U}(e)$ zusammenhängend und so gewählt, daß $(U/U) \cap H = \{e\}$. Erst recht gilt dann $U \cap H = \{e\}$, und $U' = h(U)$ ist homöomorph zu U. Sind x_1 und x_2 zwei verschiedene Punkte aus Hx, ist also etwa $x_n = h_n x$ $(n = 1, 2)$, wo $h_n \in H$; so ist $Ux_1 \cap Ux_2 = \emptyset$; denn sonst wäre, da H zentral ist $U(h_1 x) \cap U(h_2 x) = (Ux)h_1 \cap (Ux)h_2 \neq \emptyset$ oder $Ux \cap (Ux)h_3 = Ux \cap (h_3 U)x \neq \emptyset$ mit einem h_3 aus H; d.h. es gäbe ein $a \in U$ und ein $b \in U$, so daß $ax = (h_3 b)x$ oder $h_3 b = a$ gälte; dann wäre aber $h_3 \in (U/U) \cap H = \{e\}$ und $h_3 = h_2 h_1^{-1} = e$ bzw. $h_1 = h_2$ im Widerspruch zu $x_1 \neq x_2$. Die Abbildung h ist stetig und relativ offen und bildet jede zusammenhängende Umgebung Uy mit $y \in Hx$ eineindeutig, also homöomorph auf $h(U)h(y) = U'x'$ ab. $U'x'$ ist also bezüglich h schlicht überlagert von G. Somit ist (G, h) Überlagerungsloop von G/H. Die restlichen Behauptungen folgen aus den vorangehenden Sätzen.

ANMERKUNGEN. Die in den Sätzen I, (6.6) bis I, (6.10) dargelegte Theorie ruht fast ausschließlich auf dem Hilfssatz I, (6.2) und der Existenz von universellen Überlagerungsräumen für zusammenhängende, lokal zusammenhängende und lokal einfach zusammenhängende Räume. Jede von der Chevalleyschen Theorie abweichende Theorie der Überlagerungsräume und des einfachen Zusammenhangs, in der ein dem Lemma (6.2) entsprechender Hilfssatz gilt, läßt sich der dargestellten Theorie zugrunde legen, also insbesondere z.B. der von NOVOSAD in [17] geschaffene Begriff des Überlagerungsraums. Bei diesem heißt jedes Tripel $(\tilde{E}, f, y_0)$ aus einem kurvenzusammenhängenden Raum $\tilde{E}$, einer stetigen Abbildung f von $\tilde{E}$ auf einen kurvenzusammenhängenden Raum E und einem Punkt $y_0 \in \tilde{E}$ mit $z_0 = f(y_0)$ ein verallgemeinerter Überlagerungsraum, wenn zu jeder stetigen Abbildung g eines kontraktiblen Raumes F in E und einem Punkt $x_0 \in F$, auf den sich F zusammenziehen läßt und für den $z_0 = g(x_0)$ gilt, eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{g}$ von F auf $\tilde{E}$ mit den Eigenschaften $y_0 = g(x_0)$ und $g = f \circ \tilde{g}$ existiert. Es hat dann jeder kurvenzusammenhängende Raum E einen universellen Überlagerungsraum $\tilde{E}$, der verallgemeinerter Überlagerungsraum eines jeden verallgemeinerten Überlagerungsraumes ist. Ein kurvenzusammenhängender Raum heißt dann einfach zusammenhängend, wenn sein universeller Überlagerungsraum dem trivialen äquivalent ist. Es gilt folgender Satz: Ist $(\tilde{E}, f, y_0)$ ein verallgemeinerter Überlagerungsraum von (E, z_0) mit $z_0 = f(y_0)$ und ist g eine stetige Abbildung eines einfach zusammenhängenden Raumes F in E mit $g(x_0) = z_0$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{g}$ von F in $\tilde{E}$ für die $g = f \circ \tilde{g}$ und $\tilde{g}(x_0) = y_0$ gilt.

Die Sätze (6.5), (6.6) und (6.10) lassen sich also ohne weitere Zusätze auch für kurvenzusammenhängende Räume und die eben zitierten Begriffe formulieren. MALCEV behandelt Überlagerungsstrukturen mit Hilfe des Kurvenzusammenhangs [11].

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Eléments de Mathématique. Actual. sci. industr. **858** (194) = **1142** (1951). — [2] BRUCK, R. H.: Contribution to the theory of loops. Trans. Amer. math. Soc. **60**, 245–354 (1946). — [3] CHEVALLEY, C.: Theory of Lie Groups. Princeton: University Press 1946. — [4] GLEASON, A. M.: Structure of locally compact

groups. Duke math. J. **18**, 85–104 (1951). – [5] GLEASON, A. M.: Groups without small subgroups. Ann. of Math. **56**, 193–212 (1952). – [6] HEWITT, E.: On two problems of Urysohn. Casopis Pest. Mat. Fys. **73**, 58–68 (1948). – [7] HUREWICZ, W., and H. WALLMAN: Dimension Theory. Princeton: University Press 1948. – [8] JONES, F. B.: Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y)=f(x+y)$. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 115–120 (1942). – [9] KELLEY, J. L.: General Topology. Univ. Ser. of higher Math. 1950. – [10] KURATOWSKI, C.: Topologie I und II. Monogr. Mat., Tom XX und XXI, 1948. – [11] MALCEV, A. I.: Zur allgemeinen Theorie algebraischer Systeme. Mat. Sbornik, n. Ser. **36**, (77), 3–20 (1954). – [12] MALCEV, A. I.: Analytische Loops. Mat. Sbornik, n. Ser. **36**, (77), 569–576 (1954). – [13] MONTGOMERY, D.: Finite dimensional groups. Ann. of Math. **52**, 591–605 (1950). – [14] MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Small subgroups of finite dimensional groups. Ann. of Math. **56**, 213–241 (1952). – [15] MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological Transformation Groups, Interscience Tracts in pure and applied Mathematics. 1956. – [16] NOVAK, J.: Regular space, on which every continuous function is constant. Ann. of Math. **47**, 503–509 (1946). – [17] NOVOSAD, R. S.: Simply connected spaces. Trans. Amer. math. Soc. **79**, 216–228 (1955). – [18] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin: Springer 1955. – [19] PONTRJAGIN, L. S.: Topological Groups. Princeton: University Press 1938 (Übersetzung der 1. Aufl.). – [20] PONTRJAGIN, L. S.: Topologische Gruppen. I. Leipzig: Teubner 1957 (Übersetzung der 2. Aufl.). – [21] SALZMANN, H.: Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. Math. Z. **61**, 489–494 (1955). – [22] SALZMANN, H.: Topologische Ebenen. Math. Z. **67**, 436–466 (1957). – [23] SKORNYAKOV, L. A.: Topologische projektive Ebenen. Trudy Moscov. Mat. Obsč. **3**, 347–373 (1957). – [24] TYCHONOFF, A.: Über die topologische Erweiterung von Räumen. Math. Ann. **102**, 544–561 (1929). – [25] WEIL, A.: L'intégration dans les groupes topologiques. Actual. sci. industr.: **869** (1940) = **1145** (1951).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. März 1958)

KLEIN-BARMEN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 38–51 (1958)

Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz

Von

FRITZ KLEIN-BARMEN

Einleitung

Im Zuge des Ausbaus der verbandstheoretischen Begriffswelt habe ich zu Anfang der vierziger Jahre in Verallgemeinerung des Begriffs des Halbverbandes die Theorie der *Holoide* entwickelt[1]), die aber infolge der damaligen Zeitverhältnisse nur wenig beachtet worden ist. Neuerdings habe ich den Gegenstand wieder aufgegriffen und damit begonnen, den Verallgemeinerungsprozeß über das Holoid hinaus weiterzuführen, und zwar unter der Bedingung, daß dabei die beim Verband bestehende Halbordnung der Elemente uneingeschränkt erhalten bleibt[2]). Der allgemeinste Operationsbereich, der dieser Forderung genügt, ist das *Ordoid*. Was den zwischen Halbverband einerseits, Holoid und Ordoid andererseits bestehenden logisch-axiomatischen Zusammenhang anbetrifft, so kann an dieser Stelle folgendes gesagt werden. Während beim Halbverband alle Elemente idempotent sind, existiert beim Holoid und Ordoid allgemeiner für jedes x nur eine kleinste natürliche Zahl α derart, daß

$$x^{\alpha} = x^{\alpha+1}$$

ist, wobei für α auch der Wert ∞ zugelassen ist.

In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie der Ordoide erneut begründet, vertieft und nach verschiedenen Richtungen hin ausgebaut. Im einzelnen: In § 1 werden die Axiome zusammengestellt, die zur Konstituierung der als *Operativ*, *Assoziativ*, *Holoid* und *Ordoid* bezeichneten Operationsbereiche erforderlich sind. Anschließend werden die *neutralen* und *totalitären* Elemente des Operativs eingeführt. Thema von § 2 ist das Assoziativ, insbesondere das kommutative Assoziativ. Dabei wird eine zwar nicht alle Elemente erfassende, aber doch recht brauchbare *Ordnungsrelation* definiert. Gegenstand der beiden folgenden Paragraphen ist das Ordoid. Unter anderem wird in § 3 die für das Ordoid charakteristische, mit der eben erwähnten eng verwandte Ordnungsrelation untersucht. In § 4 wird ein Verfahren zur Herstellung von Ordoiden beschrieben und an Beispielen erläutert. In § 5 tritt die elementare *Mittelwertbildung* auf den Plan. Das erscheint zunächst unmotiviert. Es zeigt sich aber, daß bemerkenswerte Querverbindungen zu gewissen konkreten Ordoiden bestehen. In Spezialfällen ist die Mittelwertbildung *autodistributiv*.

[1]) Vgl. [H/S. ν], ($\nu = 1, 2, 3$). — Herrn G. PICKERT spreche ich für Hinweise, die mir bei der endgültigen Fassung des Manuskripts von Nutzen waren, meinen besten Dank aus.

[2]) Vgl. [N. 7].

In § 6 wird das aus dem konkreten Sachverhalt abstrahierte Doppelaxiom der Autodistributivität, genauer die Verflechtung desselben mit den übrigen Axiomen kurz erörtert[3]).

Axiome werden durch römische Ziffern oder große deutsche Buchstaben kenntlich gemacht. Bei der Formulierung von Aussagen werden gelegentlich — wenn die Darstellung dadurch vereinfacht wird, ohne daß die Verständlichkeit darunter leidet — auch einige logische und logistische Zeichen verwendet. Die in Frage kommenden Symbole und ihre Bedeutung sind aus Tabelle 1 zu ersehen.

Tabelle 1

$\mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}''$	$\mathfrak{C}'$ impliziert $\mathfrak{C}''$
$\mathfrak{C}' \nrightarrow \mathfrak{C}''$	$\mathfrak{C}'$ impliziert nicht $\mathfrak{C}''$
$\mathfrak{C}' \rightleftarrows \mathfrak{C}''$	$\mathfrak{C}'$ ist äquivalent $\mathfrak{C}''$
$\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}''$	$\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$
$\exists x$	Es gibt ein x derart, daß

§ 1. Die grundlegenden Axiome

1. Es sei M eine füllige[4]), im übrigen endliche oder unendliche Menge. Kleine lateinische Buchstaben sollen, wenn nichts anderes bemerkt wird, Elemente von M bezeichnen. Die Elemente seien einer zweistelligen, durch $\circ$ symbolisierten Verknüpfung fähig. Gibt es zu dem Paar x, y ein z derart, daß $x \circ y = z$ ist[5]), und kommt es dabei nicht auf den besonderen Wert von z an, so sagt man: „$x \circ y$ existiert" oder „$x \circ y$ ist definiert".

Die Verknüpfung wird auf axiomatischem Weg näher bestimmt. Zunächst werden die folgenden Axiome herangezogen:

I. Für jedes Paar x, y existiert $x \circ y$.

II. Für alle x, y, z ist

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

III. Für alle x, y ist

$$x \circ y = y \circ x.$$

IV. Zu jedem x gibt es mindestens ein y derart, daß

$$x = x \circ y = y \circ x$$

ist.

---

[3]) Zur Klärung eines Mißverständnisses, dem frühere Arbeiten von mir gelegentlich begegnet sind, bemerke ich, daß die mathematische *Identität* nach meiner Ansicht ein Grundbegriff inhaltlich-semantischer Natur ist. Als Relation hat die Identität natürlich auch formal-syntaktische Eigenschaften; aber diese allein reichen nicht aus, eindeutig festzulegen, was unter Identität zu verstehen ist.

[4]) „Füllig" bedeutet dasselbe wie „nicht leer".

[5]) Beim Paar ist die Reihenfolge der Elemente zu beachten.

V. Mit

$$x = y \circ y', \quad y = x \circ x'$$

ist $x = y$. Mit

$$x = y' \circ y, \quad y = x' \circ x$$

ist $x = y$.

Während I—IV *kategorische* Aussagen oder *Existentialaussagen* sind, ist V eine *konditionale* Aussage.

Ein dem Axiom I genügender Operationsbereich wird als *Operativ* bezeichnet.

2. Es sei M ein *Operativ*.

Erklärung 1. Gilt für alle x aus M

$$c \circ x = x \quad \text{bzw.} \quad x \circ c = x,$$

so werde c ein *links* bzw. *rechts neutrales* Element von M genannt. Gilt für alle x aus M

$$c \circ x = c \quad \text{bzw.} \quad x \circ c = c,$$

so werde c ein *links* bzw. *rechts totalitäres* Element von M genannt[6]).

Der folgende Satz ist bekannt[7]):

Satz 1. *Hat M wenigstens ein links neutrales und wenigstens ein rechts neutrales Element, so hat M genau ein links neutrales und genau ein rechts neutrales Element und beide Elemente fallen zusammen; entsprechend für die totalitären Elemente.*

Danach hat das Operativ höchstens ein beiderseits neutrales und höchstens ein beiderseits totalitäres Element.

Es gibt Operative, die mehr als ein links neutrales und somit kein rechts neutrales Element haben; entsprechend bei Vertauschung von links mit rechts und von neutral mit totalitär[8]).

Ein links neutrales Element von M, etwa c', ist natürlich auch ein links neutrales Element von N, wenn N ein c' enthaltendes Teiloperativ von M ist; das Umgekehrte trifft im allgemeinen nicht zu. Entsprechendes gilt in den übrigen Fällen.

Die vorhergehenden Betrachtungen geben Veranlassung, vier weitere Axiome einzuführen, nämlich zwei Axiome, die die Existenz eines links neutralen und eines rechts neutralen Elements postulieren, und zwei entsprechende Axiome für die totalitären Elemente. Die beiden ersten Existentialaxiome lauten:

$\mathfrak{P}_1^l$. Es gibt ein c derart, daß für alle x

$$(1)' \qquad c \circ x = x$$

ist.

[6]) In früheren Arbeiten habe ich die neutralen Elemente als Hauptelemente erster Art, die totalitären Elemente als Hauptelemente zweiter Art bezeichnet.

[7]) Vgl. z. B. [N. 2], S. 24.

[8]) Beispiele dafür bietet der Schiefhalbverband; vgl. [H. 4], S. 479.

$\mathfrak{H}_1''$. Es gibt ein c derart, daß für alle x

(1)'' $$x \circ c = x$$

ist.

Es gilt

(2) $$\mathfrak{H}_1' \to \text{IV}, \quad \text{IV} \nrightarrow \mathfrak{H}_1'; \qquad \mathfrak{H}_1'' \to \text{IV}, \quad \text{IV} \nrightarrow \mathfrak{H}_1''.$$

Ersetzt man in $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_1''$ die Variable x auf der rechten Seite von (1)' und (1)'' durch die Konstante c, so erhält man die Axiome $\mathfrak{H}_2'$ und $\mathfrak{H}_2''$, die aber in dieser Untersuchung nicht in Aktion treten.

3. Im Verlauf der Arbeit wird noch das Axiom der *Idempotenz* benötigt:

$\mathfrak{Z}$. Für jedes x ist $x \circ x = x$.

Analog zu (2) gilt

(3) $$\mathfrak{Z} \to \text{IV}, \quad \text{IV} \nrightarrow \mathfrak{Z}.$$

Tabelle 2 gibt einen Überblick über die axiomatischen Voraussetzungen, die zu den für diese Arbeit in Betracht kommenden Operationsbereichen führen.

Tabelle 2

I	Operativ
I, II	Assoziativ[9])
I, II, III	Kommutatives Assoziativ
I, II, III, IV, V	Ordoid
I, II, III, V, $\mathfrak{H}_1'$	Holoid
I, II, $\mathfrak{Z}$	Schiefhalbverband
I, II, III, $\mathfrak{Z}$	Halbverband

Wegen III kann beim Holoid an die Stelle von $\mathfrak{H}_1'$ auch $\mathfrak{H}_1''$ treten. Wegen (2) und (3) ist beim Holoid, Schiefhalbverband und Halbverband auch IV in Kraft.

Ohne weiteres leuchten die beiden folgenden Sätze ein:

Satz 2.1. *Ist M ein Assoziativ, so ist jedes Teiloperativ von M auch ein Teilassoziativ von M. Entsprechend für das kommutative Assoziativ, den Schiefhalbverband und Halbverband.*

Satz 2.2. *Ist M ein Ordoid, so ist ein Teiloperativ N von M dann und nur dann ein Teilordoid von M, wenn* IV *für N in Kraft ist.*

[9]) Für die Bezeichnung „Assoziativ", die ich 1940 in [A.V. 4] vorgeschlagen habe, sprechen mehrere Gründe. Einmal werden dadurch die deutsche *Halbgruppe*, die englische *semi-group* und die französische *demi-groupe* unter einen internationalen Hut gebracht. Sodann wird die Verwirrung beseitigt, deren Ursache ist, daß das deutsche Wort „Semigruppe" und die Übersetzung „semi-group" nicht denselben Operationsbereich bezeichnen. Schließlich empfiehlt sich der Name „Assoziativ" noch dadurch, daß die historisch verständliche, sachlich aber nicht berechtigte Hervorhebung der Gruppe gegenüber dem Halbverband und anderen Algebren vermieden ist.

Der nur ein Element umfassende Operationsbereich nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als dafür mit I automatisch auch die übrigen Axiome gelten. Da sich diese Eigentümlichkeit zuweilen bemerkbar macht, empfiehlt es sich, das aus einem einzigen Element bestehende Operativ besonders, etwa als *Unoid* zu bezeichnen.

§ 2. Das kommutative Assoziativ

1. Zunächst sei M ein *Assoziativ*. Wird

$$x^1 = x, \quad x^{\nu+1} = x^\nu \circ x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt, so gilt für die so definierten Potenzen

$$x^\varrho \circ x^\sigma = x^{\varrho+\sigma}, \quad (x^\varrho)^\sigma = x^{\varrho\sigma}.$$

Satz 3. *Für jedes x und jede natürliche Zahl α bilden die Potenzen x^α, $x^{\alpha+1}, \ldots$ ein kommutatives Teilassoziativ von M.*

Erklärung 2.1. Ein Element x heiße *potenzgebunden*, wenn es zwei Exponenten α und δ gibt derart, daß

$$x^\alpha = x^\alpha \circ x^\delta = x^{\alpha+\delta}$$

ist; andernfalls, wenn also die Potenzen $x, x^2, \ldots$ sämtlich verschieden sind, heiße x *potenzungebunden*.

Satz 4. *Ist x potenzgebunden, so gibt es zwei eindeutig bestimmte Exponenten α_0 und δ_0 derart, daß die Potenzen*

$$x, x^2, \ldots, x^{\alpha_0+\delta_0-1}$$

sämtlich verschieden sind, während

$$x^{\alpha_0} = x^{\alpha_0+\delta_0}$$

ist[10]).

Erklärung 2.2. Ist x potenzgebunden, so werde das zu x gehörende α_0 die *Potenzhöhe*, das zu x gehörende δ_0 die *Potenzperiodenlänge* von x genannt.

Ein Element ist dann und nur dann idempotent, wenn dafür $\alpha_0 = \delta_0 = 1$ ist.

2. Nunmehr sei M ein *kommutatives Assoziativ*. Bei diesem Operationsbereich braucht man nicht mehr zwischen links neutral und rechts neutral und ebenfalls nicht zwischen links totalitär und rechts totalitär zu unterscheiden; man kann einfach von neutralen bzw. totalitären Elementen sprechen.

Erklärung 3. Es bezeichne $\vdash$ die durch

$$x \vdash y \rightleftarrows x = x \circ y$$

definierte Relation. Gilt $x \vdash y$, so heiße y ein *Begleiter* von x.

---

[10]) Wegen des Beweises vgl. [N. 2], S. 26.

Wie die Sätze 5.1 bis 5.3 zeigen, ist $\vdash$ eine strenge Halbordnung für den aus den idempotenten Elementen von M gebildeten Halbverband[11]).

Satz 5.1. *Dann und nur dann, wenn x idempotent ist, ist $x \vdash x$.*

Damit ist selbstverständlich nicht gesagt, daß es idempotente Elemente gibt.

Satz 5.2. *Mit $x \vdash y$ und $y \vdash z$ ist $x \vdash z$.*

Beweis. Axiom II.

Satz 5.3. *Mit $x \vdash y$ und $y \vdash x$ ist $x = y$.*

Beweis. Axiom III.

Ferner gelten:

Satz 6.1. *Mit $x \vdash y$ und $x \vdash y'$ ist $x \vdash y \circ y'$. Mit $x \vdash y$ und $x' \vdash y$ ist $x \circ x' \vdash y$.*

Beweis. Mit $x = x \circ y$ und $x = x \circ y'$ ist $x = x \circ y \circ y'$. Der zweite Teil der Behauptung ist trivial.

Satz 6.2. *Mit $x \vdash y$ und $x' \vdash y'$ ist $x \circ x' \vdash y \circ y'$.*

Der nächste Satz verallgemeinert den zweiten Teil von Satz 6.1.

Satz 7.1. *Mit $x \vdash y$ ist $x \circ x' \vdash y$ für jedes x'.*

Satz 7.2. *Mit $x \vdash y$ ist $x \vdash y^\nu$ für jedes ν.*

Beweis. Mit $x = x \circ y$ und $x = x \circ y^\nu$ ist

$$x = x \circ y^\nu \circ y = x \circ y^{\nu+1}.$$

Satz 7.3. *Ist x potenzgebunden mit der Potenzhöhe α_0 und der Potenzperiodenlänge δ_0, so ist $x^{\alpha_0} \vdash x^{\delta_0}$.*

Satz 7.4. *Das Element c ist dann und nur dann neutral bzw. totalitär, wenn für alle x*

$$x \vdash c \quad \text{bzw.} \quad c \vdash x$$

ist.

3. Ist a ein festes Element des kommutativen Assoziativs M, so bezeichne $\{a\vdash\}$ die Menge der x, für die $a \vdash x$ ist, und $\{\vdash a\}$ die Menge der x, für die $x \vdash a$ ist. Zu beachten ist, daß a weder Element von $\{a\vdash\}$ noch von $\{\vdash a\}$ zu sein braucht.

Satz 8.1. *Ist $\{a\vdash\}$ füllig, so ist $\{a\vdash\}$ ein Teilassoziativ von M; entsprechend für $\{\vdash a\}$.*

Beweis. Satz 6.1 und 2.1.

Satz 8.2. *Gehört a einer der beiden Mengen $\{a\vdash\}$ und $\{\vdash a\}$ an, so auch der anderen. Dann und nur dann gehört a den beiden Mengen an, wenn a idempotent ist.*

---

[11]) Die Begleiterrelation ist ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Aufdeckung der feineren Struktureigenschaften der Verbände und Halbverbände. Aber auch bei anderen Algebren erweist sich die Einführung von Relationen vom Begleitertypus oder ähnlicher Relationen als vorteilhaft. So stützt sich die Quasiordnung der sog. *Homogruppen* auf eine Relation, die den Sätzen 5.1 und 5.2, aber nicht 5.3 genügt; näheres darüber in der Note von K. Iséki.

Satz 8.3. *Der Durchschnitt von* $\{a\vdash\}$ *und* $\{\vdash a\}$ *ist entweder leer oder besteht aus einem einzigen Element, und zwar a.*

Beweis. Gehört x dem Durchschnitt an, so ist $a\vdash x$ und $x\vdash a$; nach Satz 5.3 ist $x=a$.

Satz 8.4. *Mit* $x\in\{a\vdash\}$ *und* $y\in\{\vdash a\}$ *ist* $y\vdash x$.

Beweis. Satz 5.2.

Es bezeichne $\{|a|\}$ die Vereinigungsmenge von $\{\vdash a\}$ und $\{a\vdash\}$.

Satz 9.1. *Ist* $\{|a|\}$ *füllig, so ist* $\{|a|\}$ *ein Teilassoziativ von M.*

Beweis. Wegen Satz 8.1 darf angenommen werden, daß sowohl $\{\vdash a\}$ als auch $\{a\vdash\}$ füllig ist. Nach Satz 2.1 ist zu zeigen, daß $\{|a|\}$ ein Teiloperativ von M ist. Das trifft zu: Nach Satz 8.1 ist mit

$$x\in\{\vdash a\},\quad y\in\{\vdash a\}$$

auch $x\circ y\in\{\vdash a\}$ und mit

$$x\in\{a\vdash\},\quad y\in\{a\vdash\}$$

auch $x\circ y\in\{a\vdash\}$. Ist aber

$$x\in\{a\vdash\},\quad y\in\{\vdash a\},$$

so ist nach Satz 8.4

$$x\circ y=y,\quad \text{d.h.}\quad x\circ y\in\{\vdash a\}.$$

Somit ist I für $x, y\in\{|a|\}$ stets erfüllt.

Der letzte Satz läßt sich sofort verallgemeinern:

Satz 9.2. *Die Vereinigung eines Teilassoziativs von* $\{a\vdash\}$ *und eines Teilassoziativs von* $\{\vdash a\}$ *ist ein Teilassoziativ von* $\{|a|\}$.

§ 3. Das Ordoid

1. Eine Vorbemerkung. Zu den Operationsbereichen, die in logischer Hinsicht zwischen dem kommutativen Assoziativ und dem Ordoid liegen, gehört auch der, für den außer I, II, III noch das Existentialaxiom IV, aber nicht das Konditionalaxiom V in Kraft ist. Von dieser Beschaffenheit ist beispielsweise die Abelsche Gruppe, sofern diese nicht zum Unoid zusammenschrumpft. Im Hinblick auf die in § 4 angegebenen Beispiele werde darauf hingewiesen, daß insbesondere die Gesamtheit der reellen Zahlen kein Ordoid in bezug auf die Addition und die Gesamtheit der eigentlich positiven Zahlen kein Ordoid in bezug auf die Multiplikation ist.

2. Beim *Ordoid* hat jedes Element mindestens einen Begleiter. Bei der *Gruppe* hat jedes Element genau einen Begleiter, und zwar die Gruppeneinheit, also das neutrale Element. Bei der *Semigruppe* hat jedes Element höchstens einen Begleiter. Beim *Halbverband* schließlich besitzt jedes Element — abgesehen von einem etwa vorhandenen neutralen Element — mindestens zwei Begleiter; überdies ist jedes Element sein eigener Begleiter.

Das aus zwei Elementen bestehende Ordoid ist ein Halbverband.

Die beiden folgenden Sätze sind bekannt[12]).

[12]) Vgl. [N. 7], Satz 5.1 und 9.3.

Satz 10.1. *Die potenzgebundenen Elemente des Ordoids haben die Potenzperiodenlänge* 1.

Satz 10.2. *Das endliche Ordoid hat ein totalitäres Element.*

3. Es sei M ein *Ordoid*. Die beiden nächsten Sätze knüpfen an die Sätze 8.1 und 9.1 an.

Satz 11. *Ist* $\{a\vdash\}$ *füllig, so ist* $\{a\vdash\}$ *ein Teilordoid von* M. *Ist* $a\in\{\vdash a\}$, *so ist* $\{\vdash a\}$ *ein Teilordoid von* M.

Beweis. Nach Satz 8.1 und 2.2 ist nur zu zeigen, daß IV für $\{a\vdash\}$ und $\{\vdash a\}$ in Kraft ist. Das ist der Fall: Mit

$$x = x\circ y \qquad (x\in\{a\vdash\})$$

ist

$$a = a\circ x = a\circ x\circ y = a\circ y;$$

also gehört y zu $\{a\vdash\}$, wie IV verlangt. Auch für $\{\vdash a\}$ gilt IV, denn für $x\in\{\vdash a\}$ ist $x = x\circ a$ und a gehört nach Voraussetzung zu $\{\vdash a\}$.

Satz 12. *Ist* $\{a\vdash\}$ *füllig, so ist* $\{|a|\}$ *ein Teilordoid von* M.

Anders wie beim zweiten Teil von Satz 11 wird nicht vorausgesetzt, daß $a\in\{\vdash a\}$ ist.

Beweis. Für jedes x aus $\{a\vdash\}$ gilt IV nach Satz 11. Für jedes x aus $\{\vdash a\}$ und jedes y aus $\{a\vdash\}$ ist $x = x\circ y$. Somit gilt IV für jedes x aus $\{|a|\}$.

4. Die in der folgenden Erklärung beschriebene Relation $\geq$ ist die für das Ordoid charakteristische Halbordnung. Wie bereits erwähnt, steht $\geq$ in naher Beziehung zu der Begleiterrelation $\vdash$.

Erklärung 4. Es bezeichne $\geq$ die durch

$$x\geq y \rightleftarrows \exists\, y'(x = y\circ y')$$

und $>$ die durch

$$x > y \rightleftarrows (x\geq y)\cdot(x \neq y)$$

definierte Relation[13]).

Satz 13. *Ist* N *ein Teilordoid von* M *und bezeichnet* $\geqq$ *das auf* N *bezügliche Analogon zu* $\geq$, *so gilt mit* $x\geqq y$ *auch* $x\geq y$. *Umgekehrt braucht aber mit*

$$x\geq y \qquad (x, y\in N) \tag{4}$$

nicht $x\geqq y$ *zu gelten.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist trivial. Zur Umkehrung: (4) kann bestehen, ohne daß das mit x und y durch $x = y\circ y'$ verbundene y' zu N gehört.

Den Sätzen 5.1 bis 5.3 entsprechen:

Satz 14.1. *Für jedes* x *ist* $x\geq x$.

Satz 14.2. *Mit* $x\geq y$ *und* $y\geq z$ *ist* $x\geq z$. *Ist dabei* $x > y$ *oder* $y > z$, *so ist* $x > z$.

Satz 14.3. *Mit* $x\geq y$ *und* $y\geq x$ *ist* $x = y$.

In Analogie zu Satz 6.2 gilt:

Satz 15. *Mit* $x\geq y$ *und* $x'\geq y'$ *ist* $x\circ x'\geq y\circ y'$.

In allerdings nicht mehr vollständiger Analogie zu Satz 7.1 gilt:

Satz 16. *Für alle* x, y *ist* $x\circ y\geq x$ *und* $x\circ y\geq y$.

[13]) Beim Unoid kann die Relation $>$ nicht erfüllt werden.

In den folgenden Sätzen wirken die Relationen $\geq$ und $\vdash$ unmittelbar aufeinander ein.

Satz 17.1. *Mit $x \vdash y$ ist $x \geq y$.*

Es gibt sowohl Ordoide, bei denen auch die Umkehrung gilt, als auch Ordoide, bei denen das nicht der Fall ist. Das erste findet z.B. beim Halbverband, das zweite bei der ordoiden Semigruppe statt[14]).

Satz 17.2. *Mit $x \geq y$ und $y \vdash z$ ist $x \vdash z$.*

Beweis. Mit $x = y \circ y'$ und $y = y \circ z$ ist

$$x = y \circ z \circ y' = x \circ z.$$

Satz 18. *Ein Element c aus M ist dann und nur dann neutral bzw. totalitär, wenn für alle x*

$$x \geq c \quad \text{bzw.} \quad c \geq x$$

ist.

Beweis. Es sei c ein neutrales Element von M, also $x \vdash c$ für alle x. Nach Satz 17.1 ist $x \geq c$. Umgekehrt: Es sei $x \geq c$ für alle x. Alsdann ist auch $c \geq c$ und es gibt ein c' derart, daß $c = c \circ c'$ ist. Aus $c \geq c'$ und $c' \geq c$ folgt $c = c \circ c$. Nunmehr sei x wieder ein beliebiges Element. Wegen $x \geq c$ gibt es ein x' derart, daß $x = c \circ x'$ ist. Auf Grund der Idempotenz von c ist

$$x = c \circ c \circ x' = c \circ x, \quad \text{d.h.} \quad x \vdash c.$$

Es sei c ein totalitäres Element von M. Dann ist $c \vdash x$ und damit $c \geq x$ für alle x. Umgekehrt: Es sei $c \geq x$ für alle x. Nach I gibt es zu jedem x ein z derart, daß $x \circ c = z$ und somit $z \geq c$ ist. Da auch $c \geq z$ ist, ist $z = c$, also $x \circ c = c$, d.h. $c \vdash x$.

§ 4. Konstruktion von Ordoiden

1. Bei der Konstruktion von Ordoiden aus vorgegebenen Operationsbereichen leistet der folgende Satz, der als eine Erweiterung von Satz 12 angesehen werden kann, gute Dienste.

Es seien F_1 und F_2 Mengen mit leerem Durchschnitt und der Vereinigung F. Es sei F_1 ein *Ordoid* in bezug auf eine Verknüpfung $\circ_1$ und F_2 ein *kommutatives Assoziativ* in bezug auf eine von $\circ_1$ nicht notwendigerweise verschiedene Verknüpfung $\circ_2$; überdies sei für F_2 das Axiom $V_{\circ_1}$ in Kraft[15]).

Satz 19. *Unter den obigen Voraussetzungen ist F ein Ordoid in bezug auf die durch*

$$x \circ y \equiv x \circ_1 y \qquad (x, y \in F_1), \tag{5.1}$$

$$x \circ y \equiv x \circ_2 y \qquad (x, y \in F_2), \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} x \circ y \equiv y & (x \in F_1;\ y \in F_2), \\ x \circ y \equiv x & (x \in F_2;\ y \in F_1) \end{cases} \tag{6}$$

definierte Verknüpfung $\circ$.

[14]) Die ordoide Semigruppe habe ich in [N. 7], S. 150 eingeführt.

[15]) Da mehrere Verknüpfungen auftreten, ist es nötig, bei der Kennzeichnung der Axiome deutlich zu machen, auf welche Verknüpfung sich die Axiome beziehen.

Beweis. Daß I_o und III_o für F gelten, ist klar. Was II_o anbetrifft, so ist leicht einzusehen, daß der Gleichung

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \qquad (x, y, z \in F)$$

erstens genügt wird, wenn x, y, z zu F_1 gehören, zweitens, wenn x, y, z zu F_2 gehören, drittens, wenn genau eins der drei Elemente zu F_1 gehört, viertens, wenn genau eins der drei Elemente zu F_2 gehört. IV_o ist nach Voraussetzung für die Elemente von F_1 und wegen (6) für die Elemente von F_2 erfüllt. Hinsichtlich V_o ist zu zeigen: Mit

$$x = y \circ y', \quad y = x \circ x' \qquad (x, x', y, y' \in F) \tag{7}$$

ist $x = y$. Zweckmäßig werden zwei Fälle unterschieden. Erstens: Mindestens eins der beiden Elemente x, y gehört zu F_1. Dann gehört wegen (7) in Verbindung mit (5.1) und (6) auch das andere Element und weiter auch x' und y' zu F_1; also gilt V_o in diesem Fall, weil F_1 ein Ordoid in bezug auf $\circ_1$ ist. Zweitens: x und y gehören beide zu F_2. Gehört dann eins der beiden Elemente x' und y' zu F_1, so ist $x = y$, wie sich nach (6) ergibt. Gehören aber x' und y' zu F_2, so ist V_o in Kraft, weil für F_2 die Gültigkeit von V_{o_1} vorausgesetzt ist.

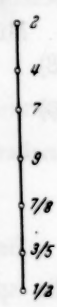

Fig. 1

2. Einige Beispiele.

Beispiel 1. Ist a eine reelle Zahl mit $a \geqq 0$, so sei F_1 eine endliche oder unendliche Menge von reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq a$ und F_2 eine endliche oder unendliche Menge von reellen Zahlen x mit $x > a$, so daß F eine Menge von nichtnegativen Zahlen ist. Für

$$x \circ_1 y \equiv \max(x, y) \qquad (x, y \in F_1),$$
$$x \circ_2 y \equiv \min(x, y) \qquad (x, y \in F_2)$$

ist F ein Halbverband in bezug auf die gemäß Satz 19 definierte Verknüpfung $\circ$.

Ist z. B. $a = 1$ und F_1 der aus den Brüchen $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}$ und F_2 der aus den ganzen Zahlen 2, 4, 7, 9 bestehende Halbverband, so kann die zwischen den Elementen des Halbverbandes F auf Grund der Relation $\geq$ bestehende Ordnung durch Fig. 1 veranschaulicht werden[16]).

In dem Grenzfall $a = 0$ ist F ein Halbverband in bezug auf $\min(x, y)$. In dem anderen Grenzfall, wenn nämlich a über alle Grenzen hinaus wächst, also F mit F_1 zusammenfällt, ist F ein Halbverband in bezug auf $\max(x, y)$.

Beispiel 2. Es sei a eine natürliche Zahl. Es sei F_1 die Menge der rationalen Zahlen x mit $0 < x \leqq 1$ und F_2 die Menge der ganzen Zahlen x mit $x > a$. Die Voraussetzungen von Satz 19 sind erfüllt, wenn sowohl $x \circ_1 y$ als auch $x \circ_2 y$ als das gewöhnliche Produkt der Zahlen x und y gedeutet wird. Somit ist die Vereinigungsmenge F ein Ordoid in bezug auf die aus $\circ_1$ und $\circ_2$ gemäß Satz 19 komponierte Verknüpfung $\circ$. Wie in Beispiel 1 fällt F für $a = \infty$ mit F_1 zusammen.

[16]) Für $x > y$ liegt der Bildpunkt von x oberhalb des Bildpunktes von y.

§ 5. Elementverknüpfung durch Zwischenwertbildung

1. In diesem Paragraphen ist die Grundmenge wieder ein Zahlbereich. In Anlehnung an die klassischen Zwischenwertbildungen, d.h. das arithmetische bzw. geometrische Mittel, läßt sich je eine Elementverknüpfung konstruieren, die mit der Addition bzw. Multiplikation distributiv gekoppelt ist. Da die additive Gruppe der reellen Zahlen ähnlich isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen ist, genügt es, die additiv gebildete Neuverknüpfung zu studieren.

2. Es sei R die Menge der reellen Zahlen, R_0^+ die Teilmenge der positiven Zahlen einschließlich 0 und R_0^- die Teilmenge der negativen Zahlen einschließlich 0.

Erklärung 5. Ist ε ein reeller Parameter mit $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, so bezeichne $\overset{\varepsilon}{\frown}$ die durch

$$x \overset{\varepsilon}{\frown} y \equiv \min(x, y) + \varepsilon[\max(x, y) - \min(x, y)] \qquad (x, y \in R)$$

bestimmte Verknüpfung.

Mit $x \geqq y$ ist

$$x \overset{\varepsilon}{\frown} y = y + \varepsilon(x - y), \tag{8}$$

$$x \geqq x \overset{\varepsilon}{\frown} y \geqq y. \tag{9}$$

Insbesondere ist

$$x \overset{0}{\frown} y \equiv \min(x, y), \qquad x \overset{1}{\frown} y \equiv \max(x, y), \qquad x \overset{\frac{1}{2}}{\frown} y \equiv \frac{x+y}{2}.$$

Bekanntlich ist R und jede Teilmenge von R ein Verband in bezug auf die speziellen Verknüpfungen $\overset{0}{\frown}$ und $\overset{1}{\frown}$. Im folgenden wird darauf nicht weiter eingegangen. Hier interessieren die allgemeine Verknüpfung $\overset{\varepsilon}{\frown}$ und der Spezialfall $\overset{\frac{1}{2}}{\frown}$. Der bequemeren Schreibweise wegen werde $\overset{\varepsilon}{\frown}$ durch $\frown$ und $\overset{\frac{1}{2}}{\frown}$ durch $\frown$ ersetzt.

3. Es sei $M \equiv R_0^+$. Ohne weiteres erkennt man, daß M in diesem Fall ein den folgenden Axiomen genügender Operationsbereich in bezug auf $\frown$ ist[17]):

$I_\frown$. Für jedes Paar x, y existiert $x \frown y$.

$III_\frown$. Für alle x, y ist $x \frown y = y \frown x$.

$\mathfrak{J}_\frown$. Für jedes x ist $x \frown x = x$.

Wegen $\mathfrak{J}_\frown$ gilt auch $IV_\frown$; dagegen sind $II_\frown$ und $V_\frown$ im allgemeinen nicht in Kraft.

Analog zu Satz 15 gilt:

Satz 20.1. *Mit $x \geqq y$ und $x' \geqq y'$ ist $x \frown x' \geqq y \frown y'$.*

Beweis. Es ist

$$(x \frown x') - (y \frown y') = (1 - \varepsilon)[\min(x, x') - \min(y, y')] + \varepsilon[\max(x, x') - \max(y, y')].$$

[17]) Dasselbe trifft auch für $M = R_0^-$ und $M \equiv R$ zu. Der letzte Fall werde außer Betracht gelassen, da uns daran liegt, daß M ein Ordoid in bezug auf die Addition ist. Was R_0^+ und R_0^- anbetrifft, so kann die Untersuchung aus Gründen der Symmetrie auf eine der beiden Mengen beschränkt werden.

Wegen

$$\min(x, x') - \min(y, y') \geqq 0, \quad \max(x, x') - \max(y, y') \geqq 0$$

ist

$$(x \cap x') - (y \cap y') \geqq 0.$$

Es folgt:

Satz 20.2. *Mit $x \geqq y$ und $x \geqq z$ ist*

$$x \geqq y \cap z. \tag{10}$$

Satz 20.3. *Für alle x und $y \geqq z$ ist*

$$x \cap y \geqq x \cap z. \tag{11}$$

Satz 21. *Mit $x \geqq y$ und $x \geqq z$ ist*

$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap (x \cap z). \tag{12}$$

Beweis. Für die linke Seite von (12) ergibt sich nach (10) und (8)

$$x \cap (y \cap z) = (y \cap z) + \varepsilon[x - (y \cap z)].$$

Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit darf $y \geqq z$ angenommen werden. Dafür geht die letzte Gleichung über in

$$\begin{aligned} x \cap (y \cap z) &= z + \varepsilon(y - z) + \varepsilon[x - z - \varepsilon(y - z)] \\ &= z + \varepsilon(x + y - 2z) - \varepsilon^2(y - z). \end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (12) ergibt sich nach (11) und (8)

$$\begin{aligned} (x \cap y) \cap (x \cap z) &= (x \cap z) + \varepsilon[(x \cap y) - (x \cap z)] \\ &= z + \varepsilon(x - z) + \varepsilon[y + \varepsilon(x - y) - z - \varepsilon(x - z)] \\ &= z + \varepsilon(x + y - 2z) - \varepsilon^2(y - z). \end{aligned}$$

Satz 22. *Für alle x, y, z ist*

$$x + (y \cap z) = (x + y) \cap (x + z). \tag{13}$$

Das ist das zu Anfang des Paragraphen erwähnte, auf die Addition bezügliche Distributivgesetz.

Beweis. Unter Berücksichtigung der Identitäten

$$x + \min(y, z) = \min(x + y, x + z), \quad x + \max(y, z) = \max(x + y, x + z) \tag{14}$$

erhält man[18])

$$\begin{aligned} x + (y \cap z) &= \min(x + y, x + z) + \varepsilon[\max(x + y, x + z) - \min(x + y, x + z)] \\ &= (x + y) \cap (x + z). \end{aligned}$$

4. Die Sätze dieses Abschnitts beziehen sich auf die spezielle Verknüpfung $\cap$. Dabei sei wie soeben $M = R_0^+$.

[18]) Die Identitäten (14) sind die für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ aus (13) hervorgehenden Spezialfälle.

Satz 23. *Für alle x, y, z ist*

$$x \curvearrowright (y \curvearrowright z) = (x \curvearrowright y) \curvearrowright (x \curvearrowright z).$$

Für die spezielle Verknüpfung gilt also — anders wie für die allgemeine — die Gl. (12) uneingeschränkt.

Beweis. Es ist

$$x \curvearrowright (y \curvearrowright z) = \frac{2x + y + z}{4} = (x \curvearrowright y) \curvearrowright (x \curvearrowright z).$$

Satz 24. *Mit $x \geqq z$ ist*

$$x \curvearrowright (y \curvearrowright z) \geqq (x \curvearrowright y) \curvearrowright z.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $x = z$ ist.

Beweis. Es ist

$$x \curvearrowright (y \curvearrowright z) = \frac{2x + y + z}{4},$$

$$(x \curvearrowright y) \curvearrowright z = \frac{x + y + 2z}{4}.$$

Ähnlich ergibt sich:

Satz 25. *Für alle x, y, z ist*

$$x \curvearrowright (y + z) \leqq (x \curvearrowright y) + (x \curvearrowright z).$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $x = 0$ ist.

§ 6. Die Axiome der Autodistributivität

1. Es sei M wieder eine abstrakte Menge, und zwar ein Operativ in bezug auf $\circ$, so daß also I in Kraft ist[19]).

Die beiden Axiome der Autodistributivität lauten[20]):

$\mathfrak{U}^l$. Für alle x, y, z ist

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z).$$

$\mathfrak{U}^r$. Für alle x, y, z ist

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z).$$

2. Die folgenden Sätze betreffen die logischen Beziehungen, vornehmlich die Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten, die zwischen den Axiomen

$$\text{II, III, } \mathfrak{H}_1^l, \mathfrak{H}_1^r, \mathfrak{J}, \mathfrak{U}^l, \mathfrak{U}^r$$

[19]) In diesem Paragraphen tritt nur die eine Verknüpfung $\circ$ auf. Deshalb kann bei der Kennzeichnung der Axiome nunmehr wieder der Hinweis auf die Verknüpfung unterbleiben.

[20]) Daß $\mathfrak{U}^l$ und $\mathfrak{U}^r$ als Axiome fungieren können und im Rahmen der Axiomatik der kommutativen Verbände eine echte Abschwächung des assoziativen Gesetzes darstellen, wird in der Note von W. FELSCHER gezeigt.

bestehen, immer unter der Voraussetzung der Gültigkeit von I. Zur Abkürzung werde

$$\mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}' \cdot \mathfrak{U}'', \quad \mathfrak{H}_1 \rightleftarrows \mathfrak{H}_1' \cdot \mathfrak{H}_1''$$

gesetzt.

Satz 26.1. $\mathrm{III} \cdot \mathfrak{U}' \rightleftarrows \mathrm{III} \cdot \mathfrak{U}''$.

Satz 26.2. $\mathrm{III} \cdot \mathfrak{H}_1' \rightleftarrows \mathrm{III} \cdot \mathfrak{H}_1''$.

Satz 27.1. $\mathrm{II} \cdot \mathrm{III} \cdot \mathfrak{Z} \to \mathfrak{U}$.

Beweis. Gelten II, III und $\mathfrak{Z}$, so ist M ein Halbverband und dafür ist $\mathfrak{U}$ ableitbar.

Satz 27.2. $\mathrm{III} \cdot \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{U} \nrightarrow \mathrm{II}$.

Beweis. Für die in § 5 untersuchte Verknüpfung $\cap$ gelten III und $\mathfrak{Z}$. Für $\cap$ insbesondere ist nach Satz 23 auch noch $\mathfrak{U}$ in Kraft, nach Satz 24 aber nicht II.

Satz 28. $\mathrm{II} \cdot \mathrm{III} \cdot \mathfrak{H}_1 \nrightarrow \mathfrak{U}$.

Beweis. Es sei M eine kommutative Gruppe. Alsdann gelten II, III und $\mathfrak{H}_1$; dagegen ist $\mathfrak{U}$ nicht in Kraft, außer wenn M ein Unoid ist.

Der nächste Satz stimmt im wesentlichen mit einem von mir in einer anderen Arbeit mitgeteilten Satz überein[21]).

Satz 29. $\mathfrak{H}_1' \cdot \mathfrak{U}' \to \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{H}_1'' \cdot \mathfrak{U}'' \to \mathfrak{Z}$.

Beweis. Gelten $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{U}'$ und ist c ein rechts neutrales Element, so ist

$$x = x \circ c = x \circ (c \circ c) = (x \circ c) \circ (x \circ c) = x \circ x.$$

Literatur

FELSCHER, W.: Ein unsymmetrisches Assoziativ-Gesetz in der Verbandstheorie. Arch. der Math. **8**, 171–174 (1957). – ISÉKI, K.: Generalisation of a theorem by S. SCHWARZ on semigroup. Portug. Math. **15**, 71–72 (1956). – KLEIN-BARMEN, F.: [H. 4] Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes. Math. Z. **46**, 472–480 (1940). – [A.V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Z. **47**, 85–104 (1940). – [H/S. 1] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen I. Math. Z. **48**, 275–288 (1942). – [H/S. 2] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen II. Math. Z. **48**, 715–734 (1943). – [H/S. 3] Ein Beitrag zur Theorie der linearen Holoide. Math. Z. **51**, 355–366 (1948). – [N. 2] Zur Theorie der Operative und Assoziative. Math. Ann. **126**, 23–30 (1953). – [N. 6] Zur Theorie der Strukturen und Algebren. Mathematica Japonicae **4**, 83–94 (1956). – [N. 7] Ordoid, Halbverband und ordoide Semigruppe. Math. Ann. **135**, 142–159 (1958).

Wuppertal-Barmen, Müggenburg 62

(Eingegangen am 9. April 1958)

[21]) Vgl. [N. 7], S. 145.

FULTON, C. M., and D. A. NORTON
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 52–54 (1958)

Non-Existence of Fixed Subspaces under Affine Transformations

By
CURTIS M. FULTON and DONALD A. NORTON

1. INTRODUCTION[1]). To investigate the subspaces of an n-dimensional Euclidean space[2]), E, which are fixed[3]) under an affine transformation, σ, of the space, it is natural to trace the trajectory of a point under iterations of the transformation. If this point always remains in some subspace, that subspace will be fixed under the transformation. Let σ be iterated $(n-1)$ times. The original point and its n transforms may be taken as the vertices of a polyhedron. A sufficient condition, and perhaps the most obvious one, that the affine transformation leave no subspace of E fixed is that the volume of this polyhedron be a non-zero constant (independent of the initial point). That this condition is also necessary is not obvious but its necessity is proved in this paper. We also investigate the condition imposed on the matrix of the transformation by the restriction that the volume is a non-zero constant.

2. NOTATIONS. Let X be a point of an n-dimensional Euclidean space, written as a column vector $X=(x_i)$ with respect to some basis for the space (all vectors in this paper will be column vectors with respect to this basis). Further let the affine transformation σ be defined by

$$X'=\sigma X=AX+C, \tag{1}$$

where A is an $n\times n$ matrix and C an $n\times 1$ matrix with real components. Define inductively $X^{(i+1)}=\sigma X^{(i)}$. The hypervolume given by

$$V(X)=|X'-X,\ X''-X,\ \ldots,\ X^{(n)}-X| \tag{2}$$

$$=|X'-X,\ X''-X',\ \ldots,\ X^{(n)}-X^{(n-1)}| \tag{3}$$

is normally a function of X. In the proofs presented in this paper it is convenient to use $A-I=B$ rather than A.

3. THEOREM. *The following three conditions are equivalent:*

(A) *E has no fixed subspace under σ;*

---

[1]) This problem arose from the observation of S. STEIN that the condition (B) below implies (A), made in a study of fixed points of homeomorphisms.

[2]) This can be generalized to a space over an arbitrary field but the "volume" defined in (2) loses its intuitive character. The theorem may similarly be extended to a flat space but then the volume determinant will be multiplied by a non-zero constant.

[3]) "Fixed" in the sense that the subspace is carried into itself by the transformation.

(B) $V(X) = K \neq 0$ *where* K *is a constant;*

(C) B *has minimal equation* $x^n = 0$ *and* C *is not in the null space of* B^{n-1}

PROOF. If we introduce the matrix of the transformation into the volume determinant (3), since $X^{(k)} - X^{(k-1)} = A(X^{(k-1)} - X^{(k-2)})$, $n \geqq k \geqq 2$ where $X^{(0)}$ is defined to be X, we have

$$V(X) = |I(BX + C),\ A(BX + C),\ \ldots,\ A^{n-1}(BX + C)|. \tag{4}$$

From the definition of B, $(A - I)^{k-1} = B^{k-1}$ and so in (4) by subtracting a suitable combination of the first $k-1$ columns from the k-th column, the factor A^{k-1} may be changed to B^{k-1}. The volume determinant becomes

$$V(X) = |I(BX + C),\ B(BX + C),\ \ldots,\ B^{n-1}(BX + C)|. \tag{5}$$

CASE I. If B is derogatory, none of the conditions of the theorem are satisfied. By definition, (C) is not satisfied. If $V(X)$ has a zero, $\overline{X}$, then $\overline{X}$ and its iterates span a fixed subspace negating condition (A); but if B is derogatory, $V(\overline{X}) = 0$ since then there are numbers k_i so that

$$\sum_{i=0}^{r-1} k_i B^i = B^r, \qquad r < n,$$

and, in (5), the $(r+1)^{st}$ column is a linear combination of the preceding columns.

CASE II. Let B be non-derogatory. If B is non-singular, $B^{-1}C$ is a fixed point of the transformation.

To prove that (A) implies (C) suppose that σ leaves no subspace fixed. By the above remark, B must be singular and so its rank is less than n. The following necessary fact we shall state as a lemma.

LEMMA. *If* M *is any square matrix and* C *any* $n \times 1$ *matrix, and if there exists an integer* k *so that the ranks of* M^k *and* M^{k+1} *are the same, then* $M^{k+1}X + M^kC = 0$ *has a solution.*

The lemma is immediate since the column space of M^{k+1} is included in the column space of M^k and if the matrices have the same rank, their column spaces must be identical.

To return to our proof, if there exists some k for which the rank of B^k equals rank of B^{k+1}, then this lemma shows that there exists an $\overline{X}$ for which the $(k+1)^{st}$ column of (5) is zero. Then $V(\overline{X}) = 0$ and we have observed that in this case σ leaves some subspace fixed.

If σ leaves no fixed subspace, the rank of B^k must decrease with each successive $k \leqq n$. Since the original rank of B is $n-1$ and since all n powers $B, B^2, \ldots, B^n$ appear in $V(X)$, the rank of B must be exactly $n-1$, the rank of B^n is zero and $x^n = 0$ is the minimal equation of B.

To prove the second part of condition (C) let $X = O$. Then $V(O) = |C, BC, \ldots, B^{n-1}C|$. If C is in the null space of B^{n-1}, $V(O) = 0$ and σ leaves ıbspace of E fixed.

We have already observed, in the introduction, that condition (B) implies (A). It remains to prove that (C) implies (B). On account of (C), we may choose a coordinate system such that

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & . & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

whence, from (5), $V(X) = 1$.

Dept. of Math., University of California, Davis, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 30. April 1958)

NASTOLD, H.-J.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 55–92 (1958)

Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. II

Von

HANS-JOACHIM NASTOLD

Einleitung

Nachdem im ersten Teil klassische Fragen der Funktionentheorie, so z. B. das Riemannsche Umkehrproblem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, in Fragen nach meromorphen Schnitten komplex-analytischer Vektorraumbündel W übersetzt wurden, behandeln wir nunmehr die Frage nach Formen mit Koeffizienten in W mit vorgegebenen Singularitäten über einer komplexen Mannigfaltigkeit X. In § 3 wird diese Frage zunächst mit der Garbentheorie in Angriff genommen. Man erhält aus der exakten Cohomologiefolge sofort eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz solcher meromorpher Formen in dem Verschwinden einer Cohomologieklasse, die zeigt, daß es über Steinschen Mannigfaltigkeiten X, speziell also über nichtkompakten Riemannschen Flächen X, zu beliebig vorgegebenen Hauptteilen solche Formen gibt. Im kompakten Fall, auf den wir uns dann beschränken, wird nun versucht, 1. dieser Bedingung mit Hilfe des Serreschen Dualitätssatzes eine handlichere Form zu geben und 2. im Falle der Lösbarkeit dieses Cousinproblems eine Lösung explizit durch das Cousindatum auszudrücken. Dazu werden in § 4 bekannte Ergebnisse über die Endlichkeit der Cohomologiegruppen und Dualitätsbeziehungen zusammengestellt. In § 5 endlich wird dann nochmals die Frage nach Formen mit Koeffizienten in W mit vorgegebenen Singularitäten mit Hilfe der Ströme (Courants im Sinne von DE RHAM) behandelt. Die für die Theorie der harmonischen Integrale grundlegende Orthogonalzerlegung des Raumes der Formen mit Koeffizienten in W, die auf KODAIRA zurückgeht, wird dazu fortgesetzt zu einer entsprechenden Zerlegung des Raumes der Ströme mit Koeffizienten in W. Damit lassen sich die von DE RHAM [*15*] bewiesenen Existenzsätze für Ströme mit vorgegebenen Singularitäten übertragen auf Ströme mit Koeffizienten in W. Schließlich erhalten wir daraus und aus der Endlichkeit des Raumes der holomorphen Schnitte des dualen Bündels W^* Existenzaussagen im Falle $\dim X = 1$, die die oben genannten klassischen Fragen erschöpfend beantworten. Die Tatsache, daß hier klassische Fragen mit modernen Methoden behandelt werden, rechtfertigt eine ausführlichere Darstellung dieser den Fachleuten bekannten Methoden.

§ 3. Garben und Cohomologie

3.1. Garben

Unser Ziel ist im folgenden die Untersuchung der *meromorphen Schnitte* eines komplex-analytischen Vektorraumbündels W zunächst über einer ganz beliebigen komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X der komplexen Dimension n. Wir bedienen uns dabei der Sprache der Garbentheorie und der Cohomologie mit Koeffizienten in Garben [*11*], § 2, [*7*], [*3*], exp. XIV—XVII.

Die komplexe Struktur auf dem separierten (d.h. das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllenden) topologischen Raum X kann gegeben werden durch eine Untergarbe $\mathfrak{O}$[6]) der Garbe $\mathfrak{F}$ der Keime stetiger komplexwertiger Funktionen auf X, die folgender Forderung genügt:

Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Menge U, $x \in U$, und n Schnitte f_i von $\mathfrak{O}$ über U, Null im Punkte x, so daß 1. die f_i einen Homöomorphismus von U auf eine offene Menge des komplexen Zahlenraumes C^n der (komplexen) Dimension n definieren, und 2. die Elemente $\mathfrak{O}_x$ genau die zusammengesetzten Funktionen $F(f_1, \ldots, f_n)$ mit im Ursprung von C^n holomorphen F sind.

Die f_i bilden ein System *lokaler Koordinaten* im Punkte x. $\mathfrak{O}$ ist die *Garbe der Keime holomorpher Funktionen*. Die Schnitte von $\mathfrak{O}$ über offenem U sind die holomorphen Funktionen in U. $\mathfrak{O}_x$ ist ein Integritätsring, $\mathfrak{O}$ eine Garbe von Ringen, deren Einselement stetig mit x variiert. Die *Garben von $\mathfrak{O}$-Moduln* $\mathfrak{G}$, das sind Garben, deren Halme $\mathfrak{G}_x$ unitäre $\mathfrak{O}_x$-Moduln, $x \in X$, sind, so daß die Abbildung $(o, g) \to o \cdot g$, definiert auf der Menge $\mathfrak{H}$ der Paare (o, g), für die ein $x \in X$ mit $o \in \mathfrak{O}_x$, $g \in \mathfrak{G}_x$ existiert, eine stetige Abbildung von $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{O} \times \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ ist, sind die *komplex-analytischen Garben*. Wir haben es nur mit solchen zu tun. Für Garben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{O}$-Moduln läßt sich in natürlicher Weise ein *tensorielles Produkt über* $\mathfrak{O}$ mit den üblichen Eigenschaften erklären [*19*]. $\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{B}$ ist wieder eine Garbe von $\mathfrak{O}$-Moduln mit den Halmen $(\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{B})_x = \mathfrak{A}_x \underset{\mathfrak{O}_x}{\otimes} \mathfrak{B}_x$, $x \in X$.

Die *meromorphen Funktionen* auf X definiert man in der Garbensprache so: $\mathfrak{M}_x$ sei der Quotientenkörper des Integritätsringes $\mathfrak{O}_x$. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{M}_x$ ergibt die *Garbe der Keime meromorpher Funktionen auf X*, wenn man ihr folgende Topologie aufprägt: Für jedes Paar holomorpher Funktionen f, g in einer offenen Menge U, wobei g auf keiner offenen Untermenge von U die Konstante 0 induzieren soll, sei $[f, g]$ die Menge der $f_x/g_x \in \mathfrak{M}_x$ für $x \in U$ (f_x, g_x bezeichnet das Bild von f bzw. g in $\mathfrak{O}_x$). Die Mengen $[f, g]$ sollen eine Basis der offenen Mengen von $\mathfrak{M}$ bilden. Eine *meromorphe Funktion* in einer offenen Menge U ist nun ein Schnitt von $\mathfrak{M}$ über U. $\mathfrak{M}$ ist eine Garbe von $\mathfrak{O}$-Moduln, $\mathfrak{O}$ eine Untergarbe von $\mathfrak{M}$.

Wichtige Garben von $\mathfrak{O}$-Moduln sind die *Garben der Keime lokaler holomorpher Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel W über X*, die mit $\mathfrak{O}(W)$ bezeichnet seien. Vgl. dazu [*11*], § 3.5 und [*19*], § 2.4. Sie sind kohärent

[6]) Garben werden im folgenden mit großen Frakturbuchstaben bezeichnet. $\mathfrak{G}_x$ ist der Halm über x der Garbe $\mathfrak{G}$.

analytisch [7], da sie sogar lokal frei, d.h. lokal isomorph $\mathfrak{O}^q$ sind. Daneben stellen wir die *Garbe der Keime lokaler meromorpher Schnitte von W*: $\mathfrak{M}(W) = \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{M}$. Unter einem *meromorphen Schnitt von W über U* verstehen wir einen Schnitt dieser Garbe über U. Für das komplex-analytische Vektorraumbündel $\overset{p}{\wedge} T$, die p-te äußere Potenz des komplex-analytischen Vektorraumbündels T der kovarianten Tangentialvektoren an die komplexe Mannigfaltigkeit X (Faser C^n), erhält man so $\overset{p}{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}(\overset{p}{\wedge} T)$, die *Garbe der Keime holomorpher p-Formen auf X*. Eine holomorphe p-Form in einer offenen Menge U ist ein Schnitt von $\overset{p}{\mathfrak{O}}$ über U. Entsprechend ergibt sich die *Garbe der Keime meromorpher p-Formen auf X*, $\overset{p}{\mathfrak{M}}$, als Garbe der meromorphen Schnitte von $\overset{p}{\wedge} T$: $\overset{p}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}(\overset{p}{\wedge} T) = \overset{p}{\mathfrak{O}} \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{M}$. Die meromorphen p-Formen in U sind die Schnitte von $\overset{p}{\mathfrak{M}}$ über U.

Wir bezeichnen wie üblich mit $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ die Menge der Schnitte der Garbe $\mathfrak{G}$ über der offenen Menge U. $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ trägt die algebraische Struktur der Halme von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ eine Garbe von $\mathfrak{O}$-Moduln, so ist $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ ein $\Gamma(U, \mathfrak{O})$-Modul, $\Gamma(U, \mathfrak{O})$ der Ring der in U holomorphen Funktionen.

3.2. Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in Garben

X sei von nun an stets als im Unendlichen abzählbar vorausgesetzt, ist dann also parakompakt (vgl. [11], § 2.8).

Jeder Garbe $\mathfrak{G}$ von abelschen Gruppen bzw. K-Moduln (K ein Hauptidealring; meist $K = C$, Körper der komplexen Zahlen) sind *Cohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in* $\mathfrak{G}$ zugeordnet: $H^q(X, \mathfrak{G})$, Null für $q < 0$, die abelsche Gruppen bzw. K-Moduln sind. Sie sind *kovariante Funktoren* von $\mathfrak{G}$ [d.h. für jeden Homomorphismus von Garben $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ hat man Homomorphismen $H^q(X, \mathfrak{G}') \to H^q(X, \mathfrak{G})$; wenn $\mathfrak{G}'' \to \mathfrak{G}$ die Hintereinanderausführung von $\mathfrak{G}'' \to \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ ist, dann ist der zugeordnete Homomorphismus $H^q(X, \mathfrak{G}'') \to H^q(X, \mathfrak{G})$ die Hintereinanderausführung der zugeordneten Homomorphismen; wenn $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ die Identität ist, so ist $H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, \mathfrak{G})$ die Identität]. Ferner sind jeder exakten Folge von Garben und Homomorphismen $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ Homomorphismen $H^q(X, \mathfrak{G}'') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathfrak{G}')$ zugeordnet, die „natürlich" in bezug auf Homomorphismen einer exakten Folge in eine andere sind.

Die folgenden Eigenschaften kennzeichnen dann die Cohomologiegruppen bis auf einen Isomorphismus

1. $H^0(X, \mathfrak{G}) = \Gamma(X, \mathfrak{G})$, der Gruppe der *Schnitte* von $\mathfrak{G}$ über X. Für $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ ist $H^0(X, \mathfrak{G}') \to H^0(X, \mathfrak{G})$ der durch den Garbenhomomorphismus induzierte Homomorphismus $\Gamma(X, \mathfrak{G}') \to \Gamma(X, \mathfrak{G})$.

2. Für jede exakte Folge $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ ist die Folge $0 \to H^0(X, \mathfrak{G}') \to H^0(X, \mathfrak{G}) \to H^0(X, \mathfrak{G}'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathfrak{G}') \to H^1(X, \mathfrak{G}) \to \cdots \to H^q(X, \mathfrak{G}'') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathfrak{G}') \to H^{q+1}(X, \mathfrak{G}) \to \cdots$ exakt.

3. Für eine feine Garbe $\mathfrak{G}$ ist $H^q(X, \mathfrak{G}) = 0$ für $q \geqq 1$.

Diese Cohomologiegruppen kann man entweder mit Hilfe offener Überdeckungen von X und den Schnittmoduln $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ ähnlich wie die Cechschen Cohomologiegruppen durch Bildung eines direkten Limes konstruieren [*11*], § 2, oder auf Grund der angegebenen Eigenschaften einen Eindeutigkeits- und Existenzbeweis führen [*3*], exp. XIV—XVII*).

Aus den obigen Eigenschaften folgt leicht [*11*], § 2.12

Hilfssatz 1. *Es sei eine xakte Folge von Garben und Homomorphismen*

$$0 \to \mathfrak{G} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{C}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathfrak{C}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathfrak{C}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\delta^{k-1}} \mathfrak{C}^k \xrightarrow{\delta^k} \cdots$$

gegeben mit $H^q(X, \mathfrak{C}^k) = 0$ *für* $q \geqq 1$, $k \geqq 0$, *eine Auflösung der Garbe* $\mathfrak{G}$. $\Gamma(X, \mathfrak{C}) = \sum_{k \geq 0} \Gamma(X, \mathfrak{C}^k)$ *sei der Komplex* $\Gamma(X, \mathfrak{C}^0) \xrightarrow{\delta_*^0} \Gamma(X, \mathfrak{C}^1) \xrightarrow{\delta_*^1} \cdots \xrightarrow{\delta_*^{k-1}} \Gamma(X, \mathfrak{C}^k) \xrightarrow{\delta_*^k} \cdots$, $(\delta_*^{k+1} \cdot \delta_*^k = 0)$. *Dann hat man natürliche Isomorphismen* $H^q(\Gamma(X, \mathfrak{C})) \cong H^q(X, \mathfrak{G})$ $(q \geqq 0)$.

3.3. Cousin-Problem für Formen mit Koeffizienten in W

Wir definieren zunächst die holomorphen und meromorphen Formen mit Koeffizienten in einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über X. Die *Garbe der Keime holomorpher p-Formen mit Koeffizienten in* W, $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$, erhält man als Garbe von $\mathfrak{O}$-Moduln in der Form $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W) = \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \overset{p}{\mathfrak{O}}$. Man kann sie auch als *Garbe der Keime lokaler holomorpher Schnitte des komplex-analytischen Vektorraumbündels* $W \otimes \overset{p}{\wedge} T$ auffassen: $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W) = \mathfrak{O}(W \otimes \overset{p}{\wedge} T)$. Entsprechend erhält man die *Garbe der Keime meromorpher p-Formen mit Koeffizienten in* W, $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W) = \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \overset{p}{\mathfrak{M}} = \overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{M}$ auch als *Garbe der Keime lokaler meromorpher Schnitte des komplex-analytischen Vektorraumbündels* $W \otimes \overset{p}{\wedge} T$: $\mathfrak{O}(W \otimes \overset{p}{\wedge} T) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{M}$. Die holomorphen bzw. meromorphen Formen mit Koeffizienten in W in offenen Mengen U sind die Schnitte dieser Garben über U. Holomorphe bzw. meromorphe 0-Formen mit Koeffizienten in W sind nach Definition holomorphe Schnitte von W bzw. meromorphe Schnitte von W. Die Schnittmengen $\Gamma(U, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ bzw. $\Gamma(U, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$ sind Moduln über $\Gamma(U, \mathfrak{O})$ bzw. $\Gamma(U, \mathfrak{M})$, dem Ring in U holomorpher Funktionen bzw. dem Körper in U meromorpher Funktionen. Für $U = X$ erhält man: $\Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$ ist ein Vektorraum über K, dem Körper der auf X meromorphen Funktionen.

Da W lokal trivial ist (vgl. § 2.1), ist es über jeder Umgebung U_i aus einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ zu einem Atlas von W isomorph dem Produkt $U_i \times C^r$, $\mathfrak{O}(W)$ über U_i also isomorph $\mathfrak{O}^r$ (direkte Summe von r Garben $\mathfrak{O}$) und

*) *Zusatz bei der Korrektur:* Eine moderne Darstellung der Garbentheorie findet man in dem soeben erschienenen Buch R. GODEMENT, Théorie des faisceaux.

$\overset{p}{\mathfrak{O}}(W) = \mathfrak{O}(W) \otimes \overset{p}{\mathfrak{O}}$ über U_i demnach isomorph $(\overset{p}{\mathfrak{O}})^r$. Die holomorphen p-Formen mit Koeffizienten in W werden als Schnitte von $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ in dem genannten Atlas in U_i dargestellt durch einen r-zeiligen Vektor $\overset{p}{\omega}_i$, dessen Komponenten $\overset{p}{\omega}_i^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, in U_i holomorphe p-Formen sind. In $U_i \cap U_j$ ist $\overset{p}{\omega}_i = g_{ij} \overset{p}{\omega}_j$, $g_{ij} \in GL(q, C)$ die Koordinatentransformationen zu dem Atlas von W. Entsprechendes gilt für die meromorphen p-Formen mit Koeffizienten in W, speziell für die meromorphen Schnitte von W, die 0-Formen. Unsere obige garbentheoretische Definition der meromorphen Schnitte stimmt also mit der in § 2.1 gegebenen Definition 1 überein.

Nach bewährtem Vorbild [7] behandeln wir das *Cousinproblem für Formen mit Koeffizienten in W*. Da man in den Moduln $\Gamma(U, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$ nur addieren kann, verstehen wir, wenn wir im folgenden von Cousinproblem sprechen, darunter immer das dem additiven, 1. Cousinschen Problem entsprechende. Bei diesem handelt es sich darum, zu einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ und in U_i vorgegebenen meromorphen p-Formen mit Koeffizienten in W, $\omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, eine in ganz X meromorphe p-Form mit Koeffizienten in W, $\psi \in \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, zu finden, die sich in den U_i von den vorgegebenen meromorphen ω_i nur um eine holomorphe p-Form mit Koeffizienten in W unterscheidet:

$$\psi - \omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)), \quad i \in J.$$

Notwendig für die Existenz einer solchen ist die Verträglichkeitsbedingung $\omega_i - \omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, jedoch nicht hinreichend. Man wird also versuchen, diejenigen „*Cousindaten*“,

$$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J},\ \omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)) \quad \text{mit} \quad \omega_i - \omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)),$$

zu charakterisieren, für die eine *Lösung* $\psi \in \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, $\psi - \omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, existiert, und gegebenenfalls eine solche zu bestimmen. Offenbar erhält man aus einer Lösung alle durch Addition beliebiger in X holomorpher p-Formen mit Koeffizienten in W.

In der Garbensprache läßt sich dies so formulieren: $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ ist Untergarbe von $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)$. Man hat also die exakte Folge von Garben und Homomorphismen

$$0 \to \overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \to \overset{p}{\mathfrak{M}}(W) \to \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \to 0. \tag{1}$$

Ist $m \in (\overset{p}{\mathfrak{M}}(W))_x$, so heißt die Klasse von m in $(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W))_x/(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))_x$ der *Hauptteil* von m. Die globalen Schnitte von $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$, die *Systeme von Hauptteilen*, entsprechen den Cousindaten: Jedes Cousindatum definiert einen globalen Schnitt von $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$, und jeder globale Schnitt läßt sich durch

Cousindaten definieren. Der durch den natürlichen Homomorphismus h: $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W) \to \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ induzierte Homomorphismus h_*: $\Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)) \to \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ ordnet jeder meromorphen p-Form mit Koeffizienten in W das System ihrer Hauptteile zu. Man hat also Bild (h_*) in $\Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ zu charakterisieren. Nun gehört zur exakten Folge (1) die exakte Cohomologiefolge

$$(2)\quad H^0(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \to H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)) \xrightarrow{h_*} H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \xrightarrow{\delta_*^0} H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \to \cdots.$$

[Hier und im folgenden schreiben wir, wenn es sich stets nur um Cohomologiegruppen über derselben Mannigfaltigkeit X handelt, für $H^q(X, \mathfrak{G})$ abkürzend $H^q(\mathfrak{G})$.] Aus der Exaktheit von (2) ergibt sich nun folgende Charakterisierung von Bild (h_*):

Satz 1. *Bild* $(h_*) = Kern\ (\delta_*^0)$.

Für einen durch ein Cousindatum $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$, $\omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, $\omega_i - \omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ — abgekürzt $(\overset{p}{\omega})$ — gegebenen Schnitt aus $H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) = \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ kann man das Bild bei δ_*^0 direkt angeben: Mit den Bezeichnungen von [*11*], § 2.6 definiert $(\overset{p}{\omega})$ ein Element aus der 0-Cokettengruppe $C^0(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, welches bei der durch den natürlichen Homomorphismus h: $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W) \to \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ induzierten Abbildung

$$C^0(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)) \to C^0(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$$

in einen 0-Cozyklus übergeht

$$(\delta^0(\overset{p}{\omega}) = 0 \text{ in } C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)), \text{ da } \omega_i - \omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))),$$

der das durch das Cousindatum definierte Element von $H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ repräsentiert. $\delta^0(\overset{p}{\omega})$ gehört dann zu $C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$:

$$\delta^0(\overset{p}{\omega})(i,j) = \omega_{ij} = \omega_i - \omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)),$$

und es ist $\delta^1(\delta^0(\overset{p}{\omega})) = 0$. $\delta^0(\overset{p}{\omega})$ ist also ein Cozyklus aus $C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, der gerade das Bild bei δ_*^0 des durch das Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ gegebenen Elementes von $H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ in $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ darstellt. Vgl. [*11*], § 2.7. Mit Satz 1 ergibt sich also

Satz 2. *Zum Cousindatum* $(\overset{p}{\omega})$ *gibt es genau dann eine Lösung, wenn der Cozyklus* $\delta^0(\overset{p}{\omega})(i,j) = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$ *aus* $C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ *die Nullklasse von* $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ *darstellt:* $\delta^0(\overset{p}{\omega}) \sim 0$ *(cohomolog 0) in* $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$.

Folgerung. *Ist die 1. Cohomologiegruppe* $H^1(X, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ *Null, so ist das Cousinproblem für p-Formen mit Koeffizienten in W stets lösbar.*

3.4. Anwendung auf Steinsche Mannigfaltigkeiten

Für Steinsche Mannigfaltigkeiten gelten die Fundamentaltheoreme [7]:

Theorem A. *X sei eine Steinsche Mannigfaltigkeit,* $\mathfrak{G}$ *eine komplex-analytische kohärente Garbe über X. Dann gilt für jeden Punkt* $x \in X$*: Das Bild von* $H^0(X, \mathfrak{G})$ *in* $(\mathfrak{G})_x$ *erzeugt* $(\mathfrak{G})_x$ *als* $\mathfrak{O}_x$*-Modul.*

Theorem A angewandt auf $\mathfrak{G} = \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ garantiert die Existenz hinreichend vieler holomorpher p-Formen mit Koeffizienten in W, speziell die Existenz hinreichend vieler holomorpher Schnitte von W.

Theorem B. *Unter den Voraussetzungen von Theorem A sind die Cohomologiegruppen* $H^q(X, \mathfrak{G})$ *für alle* $q > 0$ *Null.*

Aus Theorem B angewandt auf $\mathfrak{G} = \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ ergibt sich die *Existenz globaler meromorpher p-Formen mit Koeffizienten in W zu beliebig vorgegebenen Hauptteilen.*

Der Beweis der Theoreme A und B erfolgt gleichzeitig durch Induktion nach der Dimension. Vgl. [4], exp. XIX.

§ 4. Endlichkeit der Cohomologiegruppen über kompaktem X. Dualität

Dieser Paragraph dient der Vorbereitung von § 5 und stellt bekannte, dort benötigte Ergebnisse über Cohomologiegruppen zusammen.

4.1. Die Cohomologiegruppen nach DOLBEAULT

Neben den Garben $\mathfrak{O}$ der Keime holomorpher Funktionen und $\overset{p}{\mathfrak{O}}$ der Keime holomorpher p-Formen ist es nützlich, allgemeiner die *Garben* $\mathfrak{A}^{p,q}$ *der Keime von Differentialformen vom Bigrad* (p, q) *mit Koeffizienten aus* C^∞[7]) und — für Dualitätsbetrachtungen — $\mathfrak{K}^{p,q}$ *der Keime von Differentialformen vom Bigrad* (p, q) *mit Distributionen als Koeffizienten*, also *der Keime von Strömen vom Bigrad* (p, q) zu betrachten. — Über Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten vgl. man [15], [16] oder [18], über die Bigraduierung von komplexen Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten [18], S. 97. Man kann diese auch als differenzierbare Schnitte von Vektorraumbündeln auffassen [11], § 4.7. Die Ströme sind die stetigen Linearformen auf dem Raum der C^∞-Formen mit kompaktem Träger, aufgefaßt als topologischer Vektorraum mit einer passenden Topologie. Vgl. dazu [15], [16], [18]. Wir bezeichnen sie mit T, C^∞-Formen mit ω. Distributionen sind die Ströme vom Grade 0, bilden also den (topologisch) dualen

[7]) C^∞: unendlich oft differenzierbar. Unter „differenzierbar" verstehen wir im folgenden immer unendlich oft differenzierbar.

Raum zum Raum der C^∞-Formen maximalen Grades mit kompakten Trägern. Die Ströme vom Bigrad (p, q) bilden den dualen Raum zum Raum der C^∞-Formen vom Bigrad $(n-p, n-q)$ mit kompakten Trägern (dim $X=n$). Der Wert der stetigen Linearform T für die Form ω: $T(\omega)$ wird mit $\langle T, \omega\rangle$ bezeichnet. Die *äußere Differentiation* d erhöht den totalen Grad einer Form $\overset{p,q}{\omega}$ um 1. $d\overset{p,q}{\omega}$ ist demnach Summe einer Form vom Bigrad $(p+1, q)$ und einer Form vom Bigrad $(p, q+1)$, die mit $\partial\omega$ bzw. $\bar\partial\omega$ bezeichnet seien [11], § 15.4: $d=\partial+\bar\partial$. Uns kommt es auf $\bar\partial$ an. Für Ströme $\overset{p,q}{T}$ vom Bigrad (p, q) definiert man $\langle\bar\partial\overset{p,q}{T}, \omega\rangle=(-1)^{p+q+1}\langle T, \bar\partial\omega\rangle$. Dann hat man Garbenhomomorphismen: $\bar\partial: \mathfrak{A}^{p,q}\to\mathfrak{A}^{p,q+1}$, $\bar\partial: \mathfrak{K}^{p,q}\to\mathfrak{K}^{p,q+1}$. Sie sind $\mathfrak{O}$-linear, da $\bar\partial(f)=0$ für holomorphes f. Es gilt: $\overset{p}{\mathfrak{O}}\subset\mathfrak{A}^{p,0}$, $\mathfrak{A}^{p,q}\subset\mathfrak{K}^{p,q}$ und $\bar\partial$ wurde auf $\mathfrak{K}^{p,q}$ gerade so definiert, daß es auf $\mathfrak{A}^{p,q}$ mit dem dort schon definierten Operator $\bar\partial$ übereinstimmt.

Die Bedeutung von $\bar\partial$ besteht darin, daß $\bar\partial\overset{p,0}{\omega}=0$ die *holomorphen p-Formen* unter den C^∞-Formen vom Bigrad $(p, 0)$ charakterisiert. Dasselbe gilt für Ströme vom Bigrad $(p, 0)$: $\bar\partial\overset{p,0}{T}=0$ ist mit $\overset{p,0}{T}$ holomorph gleichbedeutend. Das folgt mit obiger Bemerkung über die Definition von $\bar\partial$ für Ströme aus der tieferliegenden Tatsache: Ist $\bar\partial\overset{p,0}{T}=\omega\in C^\infty$ (speziell also, wenn $\bar\partial\overset{p,0}{T}=0$), so ist $\overset{p,0}{T}\in C^\infty$. Diese „Elliptizität" des Operators $\bar\partial$ — es handelt sich dabei ja nur um eine lokale Aussage — läßt sich leicht zurückführen auf die Elliptizität des Laplace-Operators Δ im C^n versehen mit der üblichen Metrik (vgl. [18], S. 105 ff.). Einen Beweis für die Elliptizität von Δ findet man in [16], § 29. Vgl. auch [17], Chap. VI, § 6.7.

Ein von GROTHENDIECK bewiesenes „Poincarésches Lemma" besagt: In einer Umgebung U des Punktes x sei eine C^∞-Form $\overset{p,q}{\omega}$, bzw. ein Strom $\overset{p,q}{T}$ $(q>0)$ gegeben mit $\bar\partial\overset{p,q}{\omega}=0$ bzw. $\bar\partial\overset{p,q}{T}=0$. Dann gibt es in einer in U enthaltenen Umgebung V von x eine C^∞-Form $\overset{p,q-1}{\psi}$ bzw. einen Strom $\overset{p,q-1}{S}$ mit $\bar\partial\psi=\omega$ bzw. $\bar\partial S=T$ in V (vgl. [5], exp. XVIII). In der Garbensprache besagt dies

Hilfssatz 1. *Die Folgen von Garben und Homomorphismen*

$$0\to\overset{p}{\mathfrak{O}}\to\mathfrak{A}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{A}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}\dots\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{A}^{p,n}\to 0$$

$$0\to\overset{p}{\mathfrak{O}}\to\mathfrak{K}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{K}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}\dots\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{K}^{p,n}\to 0$$

sind exakt $(p=0, 1, \dots, n)$.

Neben die holomorphen p-Formen mit Koeffizienten in einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W stellen wir jetzt die differenzierbaren Formen und die Ströme vom Bigrad (p, q) mit Koeffizienten in W:

$\mathfrak{A}^{p,q}$ und $\mathfrak{K}^{p,q}$ sind Garben von $\mathfrak{O}$-Moduln. Man definiert $\mathfrak{A}^{p,q}(W)=\mathfrak{O}(W)\underset{\mathfrak{O}}{\otimes}\mathfrak{A}^{p,q}$, die *Garbe der Keime lokaler C^∞-Formen vom Bigrad (p, q) mit*

Koeffizienten in W und $\mathfrak{R}^{p,q}(W) = \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{R}^{p,q}$, die *Garbe der Keime lokaler Ströme vom Bigrad* (p, q) *mit Koeffizienten in W*. Es ist $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \subset \mathfrak{A}^{p,0}(W)$, $\mathfrak{A}^{p,q}(W) \subset \mathfrak{R}^{p,q}(W)$.

Die C^∞-Formen bzw. die Ströme vom Bigrad (p, q) mit Koeffizienten in W in einer offenen Menge $U \subset X$ sind die Schnitte von $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$ bzw. $\mathfrak{R}^{p,q}(W)$ über U, also die Elemente von $\Gamma(U, \mathfrak{A}^{p,q}(W))$ bzw. $\Gamma(U, \mathfrak{R}^{p,q}(W))$. Den *C-Modul der globalen* C^∞*-Formen bzw. Ströme vom Bigrad* (p, q) *mit Koeffizienten in W* bezeichnen wir mit $A^{p,q}(W) = \Gamma(X, \mathfrak{A}^{p,q}(W))$ bzw. $K^{p,q}(W) = \Gamma(X, \mathfrak{R}^{p,q}(W))$.

Da W lokal trivial ist, erhält man wie in § 3.3 für die C^∞-Formen bzw. Ströme mit Koeffizienten in W in einem Atlas von W zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ mit Koordinatentransformationen g_{ij} Darstellungen als r-zeilige Vektoren ω_i bzw. T_i, deren Komponenten $\omega_i^{(\varrho)}$, $T_i^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, C^∞-Formen bzw. Ströme in U_i sind, mit $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ bzw. $T_i = g_{ij}T_j$, $g_{ij} \in GL(q, C)$. — $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$ kann man auch als Garbe der Keime lokaler differenzierbarer Schnitte des differenzierbaren Vektorraumbündels $W \otimes \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$ auffassen (vgl. [*11*], § 4.7, § 15.4).

$\bar{\partial}$ ist ein $\mathfrak{O}$-linearer Homomorphismus von $\mathfrak{A}^{p,q}$ in $\mathfrak{A}^{p,q+1}$ bzw. von $\mathfrak{R}^{p,q}$ in $\mathfrak{R}^{p,q+1}$. Man kann daher den Homomorphismus

$$1 \otimes \bar{\partial}\colon \quad \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{A}^{p,q} \to \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{A}^{p,q+1}$$

bzw.

$$1 \otimes \bar{\partial}\colon \quad \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{R}^{p,q} \to \mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{R}^{p,q+1}$$

definieren und erhält so einen $\mathfrak{O}$-Homomorphismus $\mathfrak{A}^{p,q}(W) \to \mathfrak{A}^{p,q+1}(W)$ bzw. $\mathfrak{R}^{p,q}(W) \to \mathfrak{R}^{p,q+1}(W)$, der wieder mit $\bar{\partial}$ bezeichnet wird.

Aus Hilfssatz 1 erhält man so durch tensorielle Multiplikation mit $\mathfrak{O}(W)$, da $\mathfrak{O}(W)$ lokal frei ist,

Hilfssatz 2. *Die Folgen von Garben und Homomorphismen*

$$0 \to \overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \to \mathfrak{A}^{p,0}(W) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{A}^{p,1}(W) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{A}^{p,n}(W) \to 0$$

$$0 \to \overset{p}{\mathfrak{O}}(W) \to \mathfrak{R}^{p,0}(W) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{R}^{p,1}(W) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{R}^{p,n}(W) \to 0$$

sind exakt $(p = 0, 1, \ldots, n)$.

Hilfssatz 3. *Die Garben* $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$ *und* $\mathfrak{R}^{p,q}(W)$ *sind fein,*

ergibt sich mit Hilfe von differenzierbaren Partitionen der 1 wie in [*19*] oder [*11*], § 2.11. Zur Existenz von differenzierbaren Partitionen der 1 zu einer Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X vgl. [*16*].

Hilfssatz 2 und 3 gestatten nun die Berechnung der Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in der Garbe $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ aus den beiden feinen Auflösungen der Garbe $\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$ gemäß Hilfssatz 1, § 3.2: $\bar{\partial}$ bildet $A^{p,q}(W)$ in $A^{p,q+1}(W)$ bzw. $K^{p,q}(W)$ in $K^{p,q+1}(W)$ ab, und es gilt $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Die direkten Summen $A(W) =$

$\sum_{p,q} A^{p,q}(W)$ und $K(W) = \sum_{p,q} K^{p,q}(W)$ mit dem Differentialoperator $\bar{\partial}$ sind bigraduierte Komplexe, deren Cohomologiegruppen vom Bigrad (p, q) mit $H^{p,q}(A(W))$ bzw. $H^{p,q}(K(W))$ bezeichnet seien. Dann gilt [19], [9]

Satz 1. *Ist W ein komplex-analytisches Vektorraumbündel über X, so bestehen natürliche Isomorphismen der komplexen Vektorräume*

$$H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \cong H^{p,q}(A(W)), \quad H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \cong H^{p,q}(K(W)).$$

Beachtet man, daß von den beiden exakten Folgen des Hilfssatzes 2 die obere isomorph in die untere eingebettet ist und demgemäß auch der Komplex $A(W)$ in den Komplex $K(W)$, so ergibt sich der

Zusatz. *In jeder $\bar{\partial}$-Cohomologieklasse von $K(W)$ liegt eine Form aus $A(W)$. Sind zwei Formen aus $A(W)$ $\bar{\partial}$-cohomolog in $K(W)$, dann sind sie es auch in $A(W)$.*

Folgerung. $H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) = 0$ *für* $q > n = \dim X$.

Bemerkung. Satz 1 gilt auch für die Cohomologie mit Trägern in einer Familie Φ (vgl. [19], 2), speziell mit kompakten Trägern. Im letzteren Fall werden die Cohomologiegruppen mit $H^q_*(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, die Komplexe der Formen bzw. Ströme mit Koeffizienten in W und *kompakten Trägern* mit $A_*(W)$ bzw. $K_*(W)$ bezeichnet. Es gilt dann also entsprechend

$$H^q_*(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \cong H^{p,q}(A_*(W)), \quad H^q_*(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)) \cong H^{p,q}(K_*(W)).$$

4.2. Die Endlichkeit der Cohomologiemoduln $H^q(X, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ über kompaktem X

Die Cohomologiemoduln $H^q(X, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ über kompaktem X sind endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper C der komplexen Zahlen. Hinsichtlich des Beweises dieses Endlichkeitssatzes verweisen wir auf [6], [5], exp. XVII und [10]. Beide Beweise, der ursprüngliche Cartan-Serresche und der neuere von GROTHENDIECK, benützen die fundamentalen Ergebnisse über die Cohomologiegruppen $H^q(U, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ über Steinschen Mannigfaltigkeiten U (vgl. § 3.4), der letztere nur in schwächerer Form. Da wir im Falle $\dim X = 1$ mit Hilfe der Endlichkeit von $H^q(X, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ in § 5.5 Existenzaussagen herleiten, wollen wir noch kurz für den hier benötigten Spezialfall von Theorem B einen elementaren Beweis angeben. Es genügt offenbar $H^1(K, \mathfrak{O}^m) = 0$ für einen Kreis K zur Verfügung zu haben.

Hilfssatz 4. *Für einen Kreis K der Zahlenebene C ist $H^1(K, \mathfrak{O}^m) = 0$.*

Beweis. Wegen $\Gamma(U, \mathfrak{O}^m) = [\Gamma(U, \mathfrak{O})]^m$ (= direkte Summe von m Moduln $\Gamma(U, \mathfrak{O})$) für offenes $U \subset K$ folgt die Behauptung aus $H^1(K, \mathfrak{O}) = 0$. Nach Hilfssatz 1 und 3. 4.1. ist die Folge $0 \to \mathfrak{O} \to \mathfrak{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{A}^{0,1} \to 0$ eine feine Auf-

lösung der Garbe $\mathfrak{O}$, d.h. sie ist exakt und die Garben $\mathfrak{A}^{0,0}$ der Keime von komplexwertigen C^∞-Funktionen und $\mathfrak{A}^{0,1}$ der Keime von C^∞-Formen vom Typ (0, 1) sind fein. Nach 4.1 Satz 1 ist dann $H^1(K, \mathfrak{O}) \cong \Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,1})/\bar{\partial}\Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,0})$. Es bleibt also zu zeigen, daß die Abbildung $\Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,1})$ ein Epimorphismus ist. Ist $z = x + iy$ die komplexe Variable in der Ebene C, so besteht $\Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,0})$ aus den in K unendlich oft nach x, y differenzierbaren Funktionen $f(z)$ und $\Gamma(K, \mathfrak{A}^{0,1})$ aus den Differentialformen $F(z)d\bar{z}$ mit einer in K unendlich oft nach x, y differenzierbaren Funktion $F(z)$. $\bar{\partial}$ ordnet nun der Funktion $f(z)$ die Differentialform $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ zu. Die Behauptung läßt sich also zurückführen auf: Ist $F(z) \in C^\infty$ in K, so gibt es stets ein $f(z) \in C^\infty$ in K mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = F$. Dies beweisen wir in zwei Schritten. Wir zeigen zuerst: Zu jedem kleineren Kreis $K' < K$ gibt es ein $f(z) \in C^\infty$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = F$ in K'. (Damit ist zugleich die Exaktheit der obigen Folge von Garben und Homomorphismen nachgewiesen. Tatsächlich ist dies der erste Schritt beim Beweis der allgemeineren Aussage von Hilfssatz 1 aus 4.1.) Dazu sei $K: |z| < R$, $K': |z| < R'$, $0 < R' < R$. Mit einer C^∞-Funktion ϱ von $|z|$, $\varrho = 1$ in K', $\varrho = 0$ für $|z| > R''$, $R' < R'' < R$, erhält man eine in der ganzen komplexen Ebene C definierte C^∞-Funktion $G = F \cdot \varrho$ mit kompaktem Träger, $G = F$ in K'. Dann existiert das Integral $f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_C \frac{G(\zeta - z)}{z} dx\,dy$, $z = x + iy$, und es ist

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_C \frac{1}{z} \frac{\partial G(\zeta - z)}{\partial \bar{\zeta}} dx\,dy = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_C \frac{1}{z} \frac{\partial G(\zeta - z)}{\partial \bar{z}} dx\,dy.$$

In Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ ist der letztere Ausdruck

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{z} \frac{z}{2r} \left(\frac{\partial G(\zeta - z)}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial G(\zeta - z)}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot G(\zeta) = G(\zeta).$$

$f(\zeta)$ ist eine C^∞-Funktion mit $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = G(\zeta) = F(\zeta)$ in K', hat also die gewünschten Eigenschaften. — Nun sei $K_0 < K_1 < \cdots < K_i < \cdots$ eine Folge von konzentrischen Kreisen, die den Kreis K ausschöpfen. Zu der gegebenen C^∞-Funktion $F(z)$ in K gibt es dann, wie eben gezeigt wurde, C^∞-Funktionen f_i mit $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = F$ in K_i, $i = 1, 2, \ldots$. $f_{i+1} - f_i = h_i$ ist holomorph in K_i, da $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_{i+1} - f_i) = \frac{\partial f_{i+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = F - F = 0$ in K_i. Ferner entsteht aus einer C^∞-Funktion f_i mit $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = F$ in K_i durch Addition einer ganzen Funktion, speziell also durch Addition eines Polynoms p, eine Funktion f_i' mit derselben Eigenschaft. Zu einer konvergenten Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ mit positiven Gliedern ε_i bilden wir: $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2 - p_1$, wo p_1 ein Polynom sein soll, das mit $f_2 - f_1' = h_1'$, holomorph in K_1, $|h_1' - p_1| < \varepsilon_1$ in K_0 erfüllt (ein solches Polynom gibt es: Man entwickle die

in K_1 holomorphe Funktion h_1' in eine Potenzreihe, diese konvergiert in K_0 gleichmäßig), allgemein — wenn $f_1', f_2', \ldots, f_{i-1}'$ schon definiert sind — $f_i' = f_i - p_{i-1}$, p_{i-1} ein Polynom, das mit $f_i - f_{i-1}' = h_{i-1}'$, holomorph in K_{i-1}, $|h_{i-1}' - p_{i-1}| < \varepsilon_{i-1}$ in K_{i-2} erfüllt. So erhält man eine Folge $f_1', f_2', \ldots, f_i', \ldots$ von C^∞-Funktionen, die jeweils $\frac{\partial f_i'}{\partial \bar{z}} = F$ in K_i erfüllen. Es ist $f_i' - f_{i-1}' = (f_i - p_{i-1}) - f_{i-1}' = (f_i - f_{i-1}') - p_{i-1} = h_{i-1}' - p_{i-1}$ holomorph in K_{i-1} und $|f_i' - f_{i-1}'| < \varepsilon_{i-1}$ in K_{i-2}. Wir definieren nun die Funktion $f = f_1' + \sum_{\nu=2}^{\infty} (f_\nu' - f_{\nu-1}')$. f ist eine C^∞-Funktion in K_i und erfüllt dort $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = F$: $f = f_1' + (f_2' - f_1') + (f_3' - f_2') + \cdots + (f_i' - f_{i-1}') + \sum_{\nu=i+1}^{\infty} (f_\nu' - f_{\nu-1}') = f_i' + \sum_{\nu=i+1}^{\infty} (f_\nu' - f_{\nu-1}')$. $f_\nu' - f_{\nu-1}'$ ist holomorph in K_i und die Reihe $\sum_{\nu=i+2}^{\infty} (f_\nu' - f_{\nu-1}')$ besitzt in K_i eine Majorante in $\sum_{\nu=i+2}^{\infty} \varepsilon_\nu$, ist dort also gleichmäßig konvergent und stellt daher eine in K_i holomorphe Funktion dar. Nun ist f_i' eine C^∞-Funktion mit $\frac{\partial f_i'}{\partial \bar{z}} = F$ in K_i, dasselbe gilt also auch von f. Dies gilt aber für jedes $i = 1, 2, \ldots$, f ist also eine C^∞-Funktion mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = F$ in K. — Dieser zweite Schritt des Beweises von Hilfssatz 4 ist dem Beweis des Mittag-Lefflerschen Satzes nachgebildet (vgl. die Bemerkung in [5], exp. XVIII, p. 5). Tatsächlich ist in $H^1(K, \mathfrak{O}) = 0$ nach § 3.3, Satz 2, Folgerung, der Mittag-Lefflersche Satz für den Kreis enthalten.

Wir fassen zusammen

Satz 2. *Für ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X sind die Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in den Garben der Keime holomorpher p-Formen mit Koeffizienten in W $H^q(\overset{p}{\mathfrak{L}}(W))$ endlich-dimensionale Vektorräume über C. $H^q(\overset{p}{\mathfrak{L}}(W))$ verschwindet für p oder $q > n = \dim X$.*

Zusatz. *Nach Satz 1 sind damit auch die $\bar{\partial}$-Cohomologiegruppen $H^{p,q}(A(W))$ und $H^{p,q}(K(W))$ der Komplexe der globalen C^∞-Formen bzw. Ströme mit Koeffizienten in W endlich-dimensional.*

Bemerkung. Der obige Satz läßt sich sogleich für den allgemeineren Fall, wo an die Stelle der lokal freien Garben $\overset{p}{\mathfrak{L}}(W)$ eine *komplex-analytische kohärente Garbe* $\mathfrak{G}$ tritt, beweisen. Eine Garbe heißt kohärent, wenn sie lokal (d.h. über hinreichend kleinen offenen Mengen $U \subset X$) Cokern eines $\mathfrak{L}$-Homomorphismus $\mathfrak{L}^r \to \mathfrak{L}^p$ ist. — Ein anderer Beweis für Satz 2 ergibt sich mit den Methoden von § 5.2.

4.3. Dualität

Zwischen den Cohomologiegruppen $H^q(\overset{p}{\mathfrak{L}}(W))$ und $H^{n-q}(\overset{n-p}{\mathfrak{L}}(W^*))$, $n = \dim X$, W^* das zu W *duale* Vektorraumbündel, besteht eine Poincarésche Dualität [19]. X braucht dazu nicht kompakt zu sein, soll aber im Unendlichen abzählbar

sein. Man hat dann nur an die Stelle von $H^{n-q}\big(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\big)$ $H^{n-q}_*\big(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\big)$, die Cohomologiegruppe *mit kompakten* Trägern zu setzen. Eine natürliche duale Paarung erhält man, wenn man vermöge 4.1, Satz 1 $H^q\big(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\big)$ durch $H^{p,q}\big(A(W)\big)$ und $H^{n-q}_*\big(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\big)$ durch $H^{n-p,n-q}\big(K_*(W^*)\big)$ darstellt ($K_*(W^*)$ ist der bigraduierte Komplex der Ströme mit Koeffizienten in W^* und kompakten Trägern). Dazu versieht man $A(W)$ mit einer Topologie, die der den gewöhnlichen C^∞-Formen bei der Definition der Ströme als stetige Linearformen aufgeprägten Topologie entspricht.

Man definiert die gewünschte Topologie auf $A^{p,q}(W)$, dem C-Modul der globalen Schnitte der Garbe $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$, durch eine Familie von Halbnormen: Zu jedem System (K, φ, ψ, k) von 1. einer kompakten Menge $K \subset X$, 2. einem analytischen Homöomorphismus φ von $U \supset K$ auf eine offene Menge im C^n (lokale Karte der komplexen Struktur von X), 3. einem Isomorphismus ψ von $\bar{q}^{-1}(U) \subset W$ (q die Projektion in W) auf $U \times C^q$ (lokale Karte der analytischen Faserstruktur von W), 4. einer Folge k von $2n$ ganzen Zahlen $\geqq 0$: $r_1, \ldots, r_n$; $s_1, \ldots, s_n$, sei $p_{K,\varphi,\psi,k}(\omega)$, $\omega \in A^{p,q}(W)$, die folgende Halbnorm: Vermöge ψ wird der Einschränkung von ω auf U ein r-zeiliger Vektor von C^∞-Formen vom Bigrad (p, q) auf U und vermöge φ jeder dieser r C^∞-Formen ein System von $\binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$ differenzierbaren Funktionen auf $\varphi(U)$, ihre Koeffizienten in der Darstellung im C^n, insgesamt ω also ein System von $N = r \cdot \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$ differenzierbaren Funktionen $\omega_{i,\varphi,\psi}$, $i = 1, \ldots, N$ auf $\varphi(U)$ zugeordnet. Ist D^k der Differentialoperator

$$\frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_n}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_n^{r_n} \partial \bar{z}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{s_n}}$$

so setzt man $p_{K,\varphi,\psi,k}(\omega) = \sup\limits_{z \in \varphi(K)} \sup\limits_{1 \leq i \leq N} |D^k \omega_{i,\varphi,\psi}(z)|$.

Für alle möglichen (K, φ, ψ, k) bildet man so die Halbnormen $p_{K,\varphi,\psi,k}$. Sie definieren auf $A^{p,q}(W)$ eine separierte Topologie, die Topologie der *lokal gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen*. Sie läßt sich schon durch abzählbar viele Halbnormen definieren: Es genügt, sich auf eine Familie von kompakten K_α, deren offene Kerne X überdecken, und für jedes K_α auf ein Paar $(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)$ mit 2. und 3. zu beschränken. Die Topologie ist daher *metrisierbar* und — wie man leicht sieht — *vollständig*. $A^{p,q}(W)$ wird damit zu einem *Fréchet-Raum*.

Nun sei W^* das duale Vektorraumbündel zu W. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eine kanonische Bilinearform auf $W_x \times W_x^*$, die die Fasern W_x und W_x^* dual paart. Sie definiert einen $\mathfrak{O}$-Homomorphismus von $\mathfrak{O}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{O}(W^*)$ in $\mathfrak{O}$. Andererseits definiert die Bildung des äußeren Produktes einen $\mathfrak{O}$-Homomorphismus von $\mathfrak{A}^{p,q} \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{A}^{p',q'}$ in $\mathfrak{A}^{p+p',q+q'}$. Übergang zum tensoriellen Produkt liefert daher einen $\mathfrak{O}$-Homomorphismus ε: $\mathfrak{A}^{p,q}(W) \underset{\mathfrak{O}}{\otimes} \mathfrak{A}^{p',q'}(W^*) \to \mathfrak{A}^{p+p',q+q'}(1)$ (1 ist das triviale Geradenbündel). Für $\omega \in A^{p,q}(W)$, $T \in K^{p',q'}_*(W^*)$ soll das Bild von $\omega \otimes T$ bei ε mit $\omega \wedge T$ bezeichnet werden: $\omega \wedge T \in K^{p+p',q+q'}_*(1)$.

In einem Atlas der Faserstruktur von W und dem zugehörigen dualen Atlas von W^* zur Überdeckung $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in J}$ wird ω in U_i durch einen r-zeiligen Vektor ω_i, dessen Komponenten $\omega_i^{(\varrho)}$, $\varrho=1,\ldots,r$, C^∞-Formen in U_i sind, und T in U_i durch einen r-zeiligen Vektor T_i, dessen Komponenten $T_i^{(\varrho)}$, $\varrho=1,\ldots,r$, Ströme in U_i sind, dargestellt. $\omega\wedge T$ wird dann in U_i durch $(\omega\wedge T)_i=\sum_{\varrho=1}^{r}\omega_i^{(\varrho)}\wedge T_i^{(\varrho)}$ gegeben. In $U_i\cap U_j$ ist $(\omega\wedge T)_i=(\omega\wedge T)_j$, da die Koordinatentransformationen der dualen Atlanten dual sind (d.h. sind $g_{ij}\in GL(r,C)$ die Koordinatentransformationen für W, so sind $g_{ij}^*={}^t(g_{ij})^{-1}$ die Koordinatentransformationen für W^*). Für $p'=n-p$, $q'=n-q$ erhält man so $\omega\wedge T\in K_*^{n,n}$. Da $\omega\wedge T$ kompakten Träger besitzt, kann man $\omega\wedge T$ über X integrieren (vgl. [16]). X ist durch seine komplexe Struktur auf natürliche Weise orientiert. Man erhält so eine bilineare Form auf $A^{p,q}(W)\times K_*^{n-p,n-q}(W^*)$: $\langle\omega,T\rangle=\int_X\omega\wedge T$. Für festes T stellt die Abbildung $\omega\to\langle\omega,T\rangle$ eine stetige Linearform L_T auf $A^{p,q}(W)$ dar. Dann gilt

Hilfssatz 5. *Die Abbildung $T\to L_T$ ist ein Isomorphismus von $K_*^{n-p,n-q}(W^*)$ auf den zu $A^{p,q}(W)$ topologisch dualen Raum.*

Beweis. Siehe [19].

Hilfssatz 6. *Die lineare Abbildung $\bar\partial\colon A^{p,q}(W)\to A^{p,q+1}(W)$ ist stetig und ihre transponierte Abbildung ist $(-1)^{p+q+1}\bar\partial\colon K_*^{n-p,n-q-1}(W^*)\to K_*^{n-p,n-q}(W^*)$.*

Nach Hilfssatz 5 und 6 ist der zum Komplex $A(W)$ topologisch duale Komplex (bis auf ein Vorzeichen von $\bar\partial$) isomorph zum Komplex $K_*(W^*)$. Der Übergang zu den Cohomologiegruppen und deren duale Paarung ergibt sich dann nach bekannten Schlußweisen der Theorie der topologischen Vektorräume (vgl. [19], 10.) leicht, *wenn $\bar\partial$ ein Homomorphismus*, d.h. eine lineare stetige und *offene Abbildung* ist. Daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht, zeigt ein Gegenbeispiel in [19]. Man hat daher

Satz 3. *Ist X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit der Dimension n, abzählbar im Unendlichen, W ein komplex-analytisches Vektorraumbündel über X, und sind die linearen Abbildungen*

$$A^{p,q-1}(W)\xrightarrow{\bar\partial}A^{p,q}(W)\xrightarrow{\bar\partial}A^{p,q+1}(W)\quad \textit{Homomorphismen},$$

so ist der topologisch duale Raum zu dem Fréchet-Raum $H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ kanonisch isomorph $H_*^{n-q}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$.

Über die notwendige Voraussetzung „$\bar\partial$ ist ein Homomorphismus" besagt

Hilfssatz 7. *Ist $H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ endlich dimensional über C, so ist die Abbildung $\bar\partial\colon A^{p,q-1}(W)\to A^{p,q}(W)$ ein Homomorphismus.*

Beweis. $Z^{p,q}(W)$ sei der Kern von $\bar\partial\colon A^{p,q}(W)\to A^{p,q+1}(W)$. $Z^{p,q}(W)$ ist wegen der Stetigkeit von $\bar\partial$ abgeschlossen, also ein Fréchet-Raum. $\bar\partial(A^{p,q-1}(W))$ ist ein Unterraum endlicher Codimension in $Z^{p,q}(W)$. P sei ein $\bar\partial(A^{p,q-1}(W))$ ergänzender direkter Summand in $Z^{p,q}(W)$, v die durch $v(x,y)=\bar\partial(x)+y$, $x\in A^{p,q}(W)$, $y\in P$, definierte Abbildung: $A^{p,q}(W)\times P\to Z^{p,q}(W)$. v ist eine

lineare stetige Abbildung von $A^{p,q}(W)\times P$ *auf* $Z^{p,q}(W)$, P ein separierter Raum endlicher Dimension, $A^{p,q}(W)\times P$ also ein Fréchet-Raum. Nach dem Satz von BANACH [2], S. 34 ist v daher ein Homomorphismus und folglich auch $\bar\partial$. $\bar\partial\left(A^{p,q-1}(W)\right)$ ist dann abgeschlossen.

Mit Satz 2 ergibt sich somit

Satz 4. *Ist X eine komplex-analytische, kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n, W ein komplex-analytisches Vektorraumbündel über X, so sind die endlich dimensionalen Vektorräume $H^q\left(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\right)$ und $H^{n-q}\left(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\right)$ kanonisch dual, haben also dieselbe Dimension.*

Die kanonische Dualität erhält man mit Hilfe der kanonischen Isomorphismen $H^q\left(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\right)\cong H^{p,q}\left(A(W)\right)$, $H^{n-q}\left(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\right)\cong H^{n-p,n-q}\left(K(W^*)\right)$ und der oben angegebenen bilinearen Form $\langle\omega, T\rangle=\int\limits_X\omega\wedge T$, $\omega\in A^{p,q}(W)$, $T\in K^{n-p,n-q}(W^*)$. Vgl. Hilfssatz 5 und 6. Letztere induziert so eine bilineare Form $\langle,\rangle$ auf $H^q\left(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\right)\times H^{n-q}\left(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\right)$.

Zusatz. *1. Für einen Cozyklus $\omega\in A^{p,q}(W)$, $\bar\partial\omega=0$, ist $\langle\omega, T\rangle=0$ für alle Cozyklen $T\in K^{n-p,n-q}(W^*)$, $\bar\partial T=0$, gleichbedeutend mit ω cohomolog 0, also der Existenz eines $\psi\in A^{p,q-1}(W)$ mit $\bar\partial\psi=\omega$.*

2. Für einen Cozyklus $T\in K^{n-p,n-q}(W^*)$, $\bar\partial T=0$, ist $\langle\omega, T\rangle=0$ für alle Cozyklen $\omega\in A^{p,q}(W)$, $\bar\partial\omega=0$, gleichbedeutend mit T cohomolog 0, also der Existenz eines $S\in K^{n-p,n-q-1}(W^*)$ mit $\bar\partial S=T$.

Es ist $A^{n-p,n-q}(W^*)\subset K^{n-p,n-q}(W^*)$ und nach dem Zusatz zu Satz 1, § 4.1 wird die Cohomologie von $K^{n-p,n-q}(W^*)$ schon in dem isomorph eingebetteten $A^{n-p,n-q}(W^*)$ repräsentiert. Mit dem kanonischen Isomorphismus $A^{n-p,n-q}(W^*)\cong H^{n-q}\left(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*)\right)$ erhält man die duale Paarung der Cohomologiegruppen daher auch in der Form $\langle\omega,\tau\rangle=\int\limits_X\omega\wedge\tau$, $\omega\in A^{p,q}(W)$, $\tau\in A^{n-p,n-q}(W^*)$. $\omega\wedge\tau$ ist aus $A^{n,n}(1)$ und $\int\limits_X$ bedeutet das über X erstreckte Integral der Form maximalen Grades $\omega\wedge\tau$. Vgl. auch [11], § 15.4.

§ 5. Formen mit Koeffizienten in einem komplex-analytischen Vektorraumbündel mit vorgeschriebenen Singularitäten

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen — mit Ausnahme von 5.5 — auf eine *kompakte* komplex-analytische Mannigfaltigkeit X.

5.1. Lösbarkeit des Cousinproblems und Dualität

Mit den in § 4 entwickelten Hilfsmitteln greifen wir nochmals das in § 3.3 behandelte Cousinproblem für Formen mit Koeffizienten in W an. Dort wurde dem Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ ein Cozyklus

$$\delta^0(\overset{p}{\omega})\in C^1\left(\mathfrak{U},\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\right),\quad \delta^0(\overset{p}{\omega})(i,j)=\omega_i-\omega_j=\omega_{ij}\in\Gamma\left(U_i\cap U_j,\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\right),$$

zugeordnet. Dieser stellt ein Element von $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ dar, das wir mit $(\delta^0(\overset{p}{\omega}))$ bezeichnen wollen. $(\delta^0(\overset{p}{\omega}))=0$ in $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ war nach Satz 2, § 3.3 notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit. Nun ist $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ kanonisch dual zu $H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$ vermöge der Bilinearform $\langle\,,\rangle$ aus § 4.3. Es gilt also: $(\delta^0(\overset{p}{\omega}))=0$ ist gleichbedeutend mit $\langle(\delta^0(\overset{p}{\omega})), H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))\rangle=0$.

Satz 1. *Zum Cousindatum* $(\overset{p}{\omega})$ *gibt es genau dann eine Lösung, wenn*

$$\langle(\delta^0(\overset{p}{\omega})), H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))\rangle=0.$$

Die Bedeutung dieser Aussage besteht darin, daß $H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$ ein *endlich dimensionaler Vektorraum über C* ist. $(\delta^0(\overset{p}{\omega}))$ verschwindet also schon, wenn es zu einer Basis desselben, also *zu endlich vielen Elementen von* $H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$ *orthogonal* bezüglich $\langle\,,\rangle$ ist.

Satz 1 soll nun noch durch die kanonischen Isomorphismen $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))\cong H^{p,1}(K(W))$ und $H^{n-1}(\overset{n-p}{\mathfrak{O}}(W^*))\cong H^{n-p,n-1}(A(W^*))$ in eine Dualitätsbeziehung zwischen Strömen und Formen mit Koeffizienten in W bzw. W^* übersetzt werden. So war ja in § 4.3 gerade die duale Paarung der Cohomologiegruppen gewonnen worden. W und W^* sind hier nur vertauscht. Der Isomorphismus $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))\cong H^{p,1}(K(W))$ entsteht aus der exakten Folge von Garben und Homomorphismen:

$$(1)\quad \begin{cases} 0\to\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\to\mathfrak{K}^{p,0}(W)\xrightarrow{\bar\partial}\bar\partial(\mathfrak{K}^{p,0}(W))\to 0,\\ \bar\partial(\mathfrak{K}^{p,0}(W))=\mathfrak{Z}^{p,1}(W)<\mathfrak{K}^{p,1}(W),\ \mathfrak{Z}^{p,1}(W)=\operatorname{Kern}(\bar\partial)\ \text{in}\ \mathfrak{K}^{p,1}(W)\end{cases}$$

[nach Hilfssatz 2 in § 3.1 ist $0\to\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\to\mathfrak{K}^{p,0}(W)\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{K}^{p,1}(W)\xrightarrow{\bar\partial}\mathfrak{K}^{p,2}(W)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots$ exakt]. Dazu gehört eine exakte Cohomologiefolge

$$(2)\quad H^0(\mathfrak{K}^{p,0}(W))\xrightarrow{\bar\partial}H^0(\mathfrak{Z}^{p,1}(W))\xrightarrow{\delta_*^0}H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))\to H^1(\mathfrak{K}^{p,0}(W))\to\cdots.$$

Es ist $H^0(\mathfrak{K}^{p,0}(W))=\Gamma(X,\mathfrak{K}^{p,0}(W))=K^{p,0}(W)$, $H^0(\mathfrak{Z}^{p,1}(W))=Z^{p,1}(W)=\operatorname{Kern}(\bar\partial)$ in $K^{p,1}(W)$ und $H^1(\mathfrak{K}^{p,0}(W))=0$, da $\mathfrak{K}^{p,0}(W)$ fein ist. Man hat also folgende mit (2) übereinstimmende exakte Folge: $K^{p,0}(W)\xrightarrow{\bar\partial}Z^{p,1}(W)\xrightarrow{\delta_*^0}H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))\to 0$, δ_*^0 induziert also tatsächlich den Isomorphismus $H^{p,1}(K(W))=Z^{p,1}(W)/\bar\partial K^{p,0}(W)\cong H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$. Den zur exakten Folge (1) gehörenden verbindenden Homomorphismus δ_*^0 in (2) erhält man so [*11*], § 2.7: Es gibt zu einem $S\in Z^{p,1}(W)$ und zu einer passenden Überdeckung $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in J}$ eine 0-Cokette $\overset{p,0}{(T)}$ aus $C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{K}^{p,0}(W))$, also $T_i\in\Gamma(U_i,\mathfrak{K}^{p,0}(W))$, so daß $\bar\partial T_i=S$ in U_i. Dann ist $\delta^0\overset{p,0}{(T)}(i,j)=T_i-T_j=T_{ij}\in\Gamma(U_i\cap U_j,\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, da in $U_i\cap U_j$

$\bar\partial(T_i - T_j) = \bar\partial T_i - \bar\partial T_j = S - S = 0$. $\delta^0(\overset{p,0}{T})$ ist ein Cozyklus aus $C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ und repräsentiert daher ein Element von $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$. Letzteres ist das $S \in Z^{p,1}(W)$ bei δ^0_* zugeordnete Element von $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$. — Ist nun umgekehrt durch ein Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ ein Cozyklus $\delta^0(\overset{p}{\omega})$, $\delta^0(\overset{p}{\omega})(i,j) = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, aus $C^1(\mathfrak{U}, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ gegeben — und damit also ein Element von $H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ — so kann man stets Ströme $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$ mit $\delta^0(\overset{p,0}{T})(i,j) = T_i - T_j = T_{ij} = \omega_{ij}$ finden [$\mathfrak{K}^{p,0}(W)$ ist fein, $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$ also Null ([*11*], § 2.11). (ω_{ij}) definiert auch einen Cozyklus aus $C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$, der somit Corand ist]. $\bar\partial T_i = S_i$ in U_i definiert einen globalen Strom $S \in Z^{p,1}(W)$, da in $U_i \cap U_j$ $S_i - S_j = \bar\partial T_i - \bar\partial T_j = \bar\partial(T_i - T_j) = \bar\partial(\omega_{ij}) = 0$. $S \in Z^{p,1}(W)$ bestimmt also in $H^{p,1}(K(W)) = Z^{p,1}(W)/\bar\partial K^{p,0}(W)$ gerade die beim Isomorphismus $H^{p,1}(K(W)) \cong H^1(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ dem Element $(\delta^0(\overset{p}{\omega}))$ entsprechende Klasse nach $\bar\partial K^{p,0}(W)$.

Ohne auf die Garbentheorie zurückzugreifen, kann man mit Hilfe der Ströme das Cousinproblem nach Obigem so behandeln: Zu einem Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ zu einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ von X, $\omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, $\delta^0(\overset{p}{\omega})(i,j) = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, gibt es stets ein System von Strömen mit Koeffizienten in W $(\overset{p,0}{T})$: $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$, so daß $\delta^0(\overset{p,0}{T}) = T_i - T_j = \omega_{ij}$ in $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Das System (T) ist durch die letztere Eigenschaft bis auf einen *globalen* Strom $R \in \Gamma(X, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$ als Summanden eindeutig bestimmt: $T_i' = T_i + R \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$ hat ebenfalls die Eigenschaft $T_i' - T_j' = T_i - T_j = \omega_{ij}$ in U_{ij}. Sind umgekehrt T_i und T_i' zwei Systeme von Strömen, $T_i, T_i' \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$, $T_i - T_j = \omega_{ij}$ in U_{ij}, $T_i' - T_j' = \omega_{ij}$ in U_{ij}, so ist $R_i = T_i' - T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$, in $U_{ij} = U_i \cap U_j$ jedoch $R_i - R_j = T_i' - T_i - T_j' + T_j = (T_i' - T_j') - (T_i - T_j) = \omega_{ij} - \omega_{ij} = 0$. Durch die R_i wird also ein globaler Strom $R \in \Gamma(X, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$ definiert, und es ist $T_i' = T_i + R$ in U_i.

Mit Hilfe der T_i definiert man einen globalen Strom vom Bigrad $(p, 1)$ mit Koeffizienten in W: $S_i = \bar\partial T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,1}(W))$. In U_{ij} ist $S_i - S_j = \bar\partial T_i - \bar\partial T_j = \bar\partial(T_i - T_j) = \bar\partial\omega_{ij} = 0$. Durch die S_i in U_i wird also ein globaler Strom $S \in \Gamma(X, \mathfrak{K}^{p,1}(W))$ gegeben. S ist ein Cozyklus aus $K^{p,1}(W)$, also Element von $Z^{p,1}(W)$. Ein anderes System $T_i' = T_i + R$ liefert ein $S' = S + \bar\partial R$, $R \in K^{p,0}(W)$. Dem Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ wird so also eindeutig eine $\bar\partial$-Cohomologieklasse des Komplexes $K(W)$ vom Bigrad $(p, 1)$, ein Element von $H^{p,1}(K(W))$, zugeordnet. Sie bildet das „Hindernis" für die Lösung des Cousinproblems.

Das Verschwinden der erhaltenen Cohomologieklasse ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Cousinproblems. Ist nämlich $\psi \in \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$ eine Lösung, $\psi - \omega_i = \varphi_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$, dann kann man $T_i = -\varphi_i$ nehmen, da in U_{ij} $T_i - T_j = -\varphi_i + \varphi_j = -(\psi - \omega_i) + (\psi - \omega_j) = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$, und $\bar\partial T_i = -\bar\partial\varphi_i = 0$, d.h. $S = 0$. Die $(\overset{p}{\omega})$ zugeordnete Cohomologieklasse ist also

hier die Nullklasse. Ist umgekehrt der Cozyklus S aus der Nullklasse, dann gibt es ein $R \in K^{p,0}(W)$ mit $\bar\partial R = S$. Es gibt also einen globalen Strom R mit $\bar\partial R = \bar\partial T_i$ in U_i. $R - T_i = \varphi_i$ ist daher aus $\Gamma\big(U_i, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\big)$, und eine Lösung des Cousinproblems erhält man in der Form $\psi = \omega_i + R - T_i$ in U_i. In U_{ij} ist nämlich $(\omega_i + R - T_i) - (\omega_j + R - T_j) = (\omega_i - \omega_j) - (T_i - T_j) = \omega_{ij} - \omega_{ij} = 0$.

Satz 2. *Ist* $(\overset{p}{\omega})$ *ein Cousindatum zur Überdeckung* $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$, $(\overset{p,0}{T})$ *ein System von Strömen,* $T_i \in \Gamma\big(U_i, \mathfrak{R}^{p,0}(W)\big)$, *mit* $T_i - T_j = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$ *in* U_{ij} *und* $\overset{p,1}{S} = \bar\partial T_i$ *in* U_i, *so ist „*S *cohomolog* 0 *in* $K(W)$*" notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung. Im Falle der Lösbarkeit, wenn es also ein* $R \in K^{p,0}(W)$ *mit* $S = \bar\partial R$ *gibt, ist*

$$\psi = \omega_i + R - T_i \quad \text{in } U_i \tag{3}$$

eine Lösung.

Die duale Paarung von $K(W)$ und $A(W^*)$ durch die Bilinearform $\langle , \rangle$ ergibt: $\overset{p,1}{S} \sim 0$ in $K(W)$ ist gleichbedeutend mit $\langle \overset{p,1}{S}, Z^{n-p,n-1}(W^*)\rangle = 0$, wenn $Z^{n-p,n-1}(W^*)$ den Modul der Cozyklen in $A^{n-p,n-1}(W^*)$ bezeichnet. S ist ein Cozyklus, $\bar\partial S = 0$, es ist daher $\langle S, \bar\partial A^{n-p,n-2}(W^*)\rangle = 0$. Man kann also rechts zum Quotienten $Z^{n-p,n-1}(W^*)/\bar\partial A^{n-p,n-2}(W^*) = H^{n-p,n-1}\big(A(W^*)\big)$ übergehen und erhält

Satz 3. *Für die Lösbarkeit ist*

$$\langle \overset{p,1}{S}, H^{n-p,n-1}\big(A(W^*)\big)\rangle = 0, \tag{4}$$

wo $\overset{p,1}{S}$ *den in Satz 2 definierten Strom bezeichnet, notwendig und hinreichend.*

Dies ist die gewünschte andere Fassung von Satz 1.

Bemerkung. Für Geradenbündel W, also $\dim W = 1$, ist das Cousinproblem für 0-Formen mit Koeffizienten in W das *inhomogene Problem von* RIEMANN-ROCH. Es steht in engem Zusammenhang mit komplex-analytischen Bündeln mit der affinen Gruppe als Strukturgruppe und deren Klassifikation [*23*], [*12*].

Die Formel (3) in Satz 2 gibt eine Lösung zum Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ an, falls eine solche existiert. Dabei läßt sich das in (3) auftretende System $(\overset{p,0}{T})$ von Strömen, $T_i \in \Gamma\big(U_i, \mathfrak{R}^{p,0}(W)\big)$ mit $T_i - T_j = \omega_{ij}$ explizit mit Hilfe einer differenzierbaren *Partition der 1* zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ ausdrücken. Eine solche besteht aus einem System $\{a_i\}_{i \in J}$ von C^∞-Funktionen mit a) $a_i \geqq 0$, b) Träger von $a_i \subset U_i$, c) $\{a_i\}$ lokal endlich, d.h. die Träger von nur endlich vielen a_i treffen eine gegebene kompakte Menge, d) $\sum\limits_{i \in J} a_i = 1$ (die Summe ist nach c) für jeden Punkt eine endliche) [*16*]. Man setzt $T_i = \sum\limits_k a_k \omega_{ik}$ (zu summieren über alle k mit $U_i \cap U_k \neq \emptyset$) mit

$$a_k \omega_{ik} = \begin{cases} a_k \omega_{ik} \text{ in } U_i \cap U_k \\ 0 \text{ in } U_i \cap (\text{Komplement des Trägers von } a_k) \end{cases} \quad \text{aus } \Gamma\big(U_i, \mathfrak{A}^{p,0}(W)\big).$$

Die Summe ist in der Umgebung eines jeden Punktes von U_i eine endliche Summe, T_i ist also aus $\Gamma(U_i, \mathfrak{A}^{p,0}(W)) < \Gamma(U_i, \mathfrak{K}^{p,0}(W))$. Es ist $T_i - T_j = \sum_k a_k(\omega_{ik} - \omega_{jk})$ in U_{ij}. $a_k(\omega_{ik} - \omega_{jk})$ in U_{ij} ist Null außerhalb $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. In U_{ijk} ist aber $\omega_{ij} + \omega_{jk} + \omega_{ki} = 0$ und in U_{ik} $\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$. Also ist $T_i - T_j = \sum_k a_k(\omega_{ik} - \omega_{jk}) = \sum_k a_k \omega_{ij} = \left(\sum_k a_k\right) \omega_{ij} = \omega_{ij}$ in U_{ij}, da $\sum_k a_k = 1$. Die $T_i = \sum_k a_k \omega_{ik}$ bilden also ein System $\overset{p,0}{(T)}$ der in Satz 2 beschriebenen Art. Das hier angegebene Verfahren ist das beim Beweis des Verschwindens von $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ für $q \geqq 1$ und eine feine Garbe $\mathfrak{G}$ ([*11*], § 2.11) verwendete. Darauf hatten wir uns ja oben hinsichtlich der Existenz eines Systems von T_i berufen.

Was nun noch fehlt, ist ein expliziter Ausdruck für den in (3) auftretenden Strom R. Einen solchen erhält man durch Einführung einer *Metrik* in $A^{p,q}(W)$.

5.2. Zerlegung von $A(W)$ mit Hilfe einer Metrik

Es sei 1. eine beliebige, feste *hermitesche Metrik* auf X, 2. eine feste *Reduktion der Strukturgruppe $GL(r, C)$ des Vektorraumbündels W auf die unitäre Gruppe $U(r)$* gegeben.

X läßt sich stets eine differenzierbare hermitesche Metrik aufprägen (vgl. [*18*], S. 109). Ihr Realteil liefert eine Riemannsche Metrik der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X (orientiert durch die komplexe Struktur von X), zu der ein Dualitätsoperator $*$ gehört: Durch die Riemannsche Metrik wird in dem reellen Tangentialraum $({}_R\mathfrak{T})_x$ (vgl. [*11*], § 4.6 und 7) eines jeden Punktes $x \in X$ eine euklidische Struktur, also eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $(\ ,\ )_x$ gegeben. Diese definiert in kanonischer Weise eine ebensolche Form $(\ ,\ )_x$ auf dem Raum der reell-wertigen Differentialformen m-ten Grades, der m-ten äußeren Potenz $\overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ des zu $({}_R\mathfrak{T})_x$ dualen Raumes $({}_R\mathfrak{T})_x^*$. $\overset{2n}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ ist eindimensional ($2n$ = reelle Dimension von X). Durch die Orientierung von X wird eine positive und eine negative Klasse von Vektoren in $\overset{2n}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ ausgezeichnet. $\tau_x \in \overset{2n}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ sei der eindeutig bestimmte positive Vektor der Länge 1. τ_x ist das „Volumelement" auf X. Man definiert nun $*1 = \tau_x$ und für $\overset{m}{\alpha}, \overset{m}{\beta} \in \overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ $*\overset{m}{\beta} \in \overset{2n-m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ so, daß $(\overset{m}{\alpha}, \overset{m}{\beta})_x \tau_x = \overset{m}{\alpha} \wedge *\overset{m}{\beta}$. Dadurch wird eindeutig ein Isomorphismus $*: \overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^* \to \overset{2n-m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^*$ gegeben. Die symmetrische, positiv-definite Bilinearform $(\ ,\ )_x$ auf dem Raum der reell-wertigen Differentialformen m-ten Grades wird kanonisch zu einer positivdefiniten hermiteschen Form auf den Raum der komplex-wertigen Differentialformen m-ten Grades $\overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T})_x^* \underset{R}{\otimes} C = \overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T}_C)_x^*$ fortgesetzt, der Dualitätsoperator $*$ wird antilinear auf diesen Raum fortgesetzt. Dann gilt für komplex-wertige $\overset{m}{\alpha}, \overset{m}{\beta} \in \overset{m}{\Lambda}({}_R\mathfrak{T}_C)_x^*$ ebenfalls $(\overset{m}{\alpha}, \overset{m}{\beta})_x \tau_x = \overset{m}{\alpha} \wedge *\overset{m}{\beta}$. — Durch die komplexe Struktur auf X wird das komplex-analytische Vektorraumbündel T der kovarianten

Tangentialvektoren an die komplexe Mannigfaltigkeit X (Faser C^n) definiert. Das dazu konjugierte Vektorraumbündel $\overline{T}$, dessen Koordinatentransformationen durch Konjugieren entstehen, ist ein differenzierbares Vektorraumbündel, das zu T antiisomorph ist. Der Bigraduierung der komplex-wertigen Formen auf X entspricht dann eine differenzierbare Isomorphie der Vektorraumbündel $\overset{m}{\wedge}({}_R\mathfrak{T}_C)^* \cong \sum_{p+q=m} \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$ ($\sum$ = Whitneysche Summe). Die einzelnen Unterräume $(\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})_x$, $p+q=m$, von $\overset{m}{\wedge}({}_R\mathfrak{T}_C)^*_x$ sind bezüglich der oben definierten hermiteschen Form $(\ ,\ )_x$ orthogonal zueinander, und der Dualitätsoperator $*$ induziert einen differenzierbaren Antiisomorphismus $*$: $\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T} \to \overset{n-p}{\wedge} T \otimes \overset{n-q}{\wedge} \overline{T}$ (differenzierbar, da die Metrik, in bezug auf welche $*$ definiert wurde, als differenzierbar vorausgesetzt war). Es ist $** = (-1)^{p+q} I$ auf $\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{b}{\wedge} \overline{T}$, I = Identität.

Die Strukturgruppe $GL(r, C)$ des Vektorraumbündels W über X läßt sich stets *differenzierbar* auf die unitäre Gruppe $U(r)$ reduzieren [11], d.h. man kann durch Einführung geeigneter Karten einen Atlas der differenzierbaren Faserstruktur von W erhalten, dessen zugehörige Koordinatentransformationen aus $U(r)$ sind. Dieser Atlas gehöre zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ und bestehe aus den lokalen Karten $\overset{-1}{\varphi}_i : U_i \times C^r \to \overset{-1}{p}(U_i) \subset W$, p die Projektion $W \to X$. In den einzelnen Karten werden die Punkte $y \in W$ mit $p(y) = x \in U_i$ dargestellt durch ihre „Koordinaten" $\varphi_i(y) = (x, \mathfrak{t}_i)$, $\mathfrak{t}_i \in C^r$. In bezug auf diesen Atlas führen wir nun in den Fasern W_x von W die folgende positiv definite hermitesche Metrik ein: Sind $(x, \mathfrak{t}_i)$ und $(x, \mathfrak{t}'_i)$ die Koordinaten zweier Punkte aus W_x, so werde ihnen die Zahl ${}^t(\mathfrak{t}_i)\,\overline{\mathfrak{t}}'_i \in C$ zugeordnet. Da die Koordinatentransformationen aus $U(r)$ sind, hängt diese Metrik nicht von der Karte des Atlanten ab, in der sie definiert wurde. Mit dem Basispunkt x variiert sie differenzierbar. Zu jeder solchen differenzierbaren, positiv definiten hermiteschen Metrik auf W gehört kanonisch ein differenzierbarer Antiisomorphismus ψ: $W \to W^*$, das zu W duale Vektorraumbündel, so daß für $a, b \in W_x$ die Metrik durch $(a, b)_x = a \cdot \psi(b)$ gegeben wird, wenn für $a \in W_x$, $a^* \in W_x^*$ $(a, a^*) \to a \cdot a^*$ die kanonische Bilinearform auf $W \times W^*$ bezeichnet. Er hat die zusätzliche Eigenschaft $a \cdot \psi(a) \geqq 0$ und $= 0$ nur für $a = 0$.

Mit Hilfe der beiden differenzierbaren positiv definiten hermiteschen Formen auf den Fasern W_x bzw. $(\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})_x$ von W bzw. $\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$, $(a, b)_x$, $a, b \in W_x$ bzw. $(\alpha, \beta)_x$, $\alpha, \beta \in (\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})_x$, definieren wir nun eine positiv definite hermitesche Form auf den Fasern des tensoriellen Produktes $W \otimes (\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})$: für $a \otimes \alpha$, $b \otimes \beta \in \left(W \otimes (\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})\right)_x$ werde $(a \otimes \alpha, b \otimes \beta)_x = (a, b)_x (\alpha, \beta)_x$ gesetzt. Durch lineare Fortsetzung erhält man daraus eine positiv definite hermitesche Form $(\ ,\ )_x$ auf den Fasern des Vektorraumbündels $W \otimes \overset{p}{\wedge} T \oplus \overset{q}{\wedge} \overline{T}$, die wieder differenzierbar mit x variiert. Die differen-

zierbaren Antiisomorphismen ψ: $W \to W^*$ und $*$: $\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T} \to \overset{n-p}{\wedge} T \otimes \overset{n-q}{\wedge} \overline{T}$ ergeben einen differenzierbaren Antiisomorphismus $\# = \psi \otimes *: W \otimes \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T} \to W^* \otimes \overset{n-p}{\wedge} T \otimes \overset{n-q}{\wedge} \overline{T}$. Wegen $(a, b)_x = a \cdot \psi(b)$, $a, b \in W_x$, $(\alpha, \beta)_x \tau_x = \alpha \wedge * \beta$, $\alpha, \beta \in (\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})_x$, ist $(a \otimes \alpha, b \otimes \beta)_x \tau_x = (a, b)_x \cdot (\alpha, \beta)_x \tau_x = \big(a \cdot \psi(b)\big)(\alpha \wedge * \beta) = (a \otimes \alpha) \wedge \# (b \otimes \beta)$, wo $\wedge$ das in § 4.3 definierte „Produkt" zwischen Formen aus $A^{p,q}(W)$ und $A^{n-p,n-q}(W^*)$ bedeutet. Man hat also für $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (W \otimes \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T})_x$

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})_x \tau_x = \tilde{\alpha} \wedge \# \tilde{\beta}. \tag{4}$$

Mit ψ^{-1}: $W^* \to W$ ist $\widetilde{\#} = \psi^{-1} \otimes *$: $W^* \otimes \overset{r}{\wedge} T \otimes \overset{s}{\wedge} \overline{T} \to W \otimes \overset{n-r}{\wedge} T \otimes \overset{n-s}{\wedge} \overline{T}$ ebenfalls ein differenzierbarer Antiisomorphismus und für $r = n - p$, $s = n - q$ ist $\widetilde{\#} \# = (-1)^{p+q} I$ auf $W \otimes \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$, I = Identität.

Damit definiert man nun ein *globales Skalarprodukt* für globale Formen mit Koeffizienten in W $\alpha, \beta \in A^{p,q}(W)$:

$$(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \# \beta \rangle. \tag{5}$$

Dabei ist $\# \beta \in A^{n-p,n-q}(W^*)$ und $\langle , \rangle$ bedeutet die in § 4.3 beschriebene Bilinearform auf $A^{p,q}(W) \times A^{n-p,n-q}(W^*)$. Es ist $\langle \alpha, \# \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \# \beta$, $\alpha \wedge \# \beta \in A^{n,n}(1)$. Nach (4) ist $\alpha \wedge \# \beta = (\alpha, \beta)_x \tau_x$, also $\int_X \alpha \wedge \# \beta = \int_X (\alpha, \beta)_x \tau_x$. Da τ_x das Volumelement auf X und $(\alpha, \beta)_x$ eine positiv-definite hermitesche Form auf den Fasern von $W \otimes \overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$ ist, wird durch (5) eine *positiv definite hermitesche Metrik auf* $A^{p,q}(W)$ gegeben.

Wir definieren (5) entsprechend ein Skalarprodukt zwischen Strömen mit Koeffizienten in W und Formen mit Koeffizienten in W

$$(T, \omega) = \langle T, \# \omega \rangle, \qquad T \in K^{p,q}(W), \qquad \omega \in A^{p,q}(W). \tag{6}$$

Dabei ist $\# \omega \in A^{n-p,n-q}(W^*)$ und $\langle , \rangle$ in dem in § 4.3 angegebenen Sinn zu verstehen. (T, ω) ist dann in T linear, in ω antilinear. Für $T \in A^{p,q}(W) \subset K^{p,q}(W)$ stimmt das neue Skalarprodukt mit dem durch (5) definierten Skalarprodukt für Formen überein.

Im folgenden fassen wir die direkten Summen $A(W) = \sum_{p,q} A^{p,q}(W)$ und $A(W^*) = \sum_{p,q} A^{p,q}(W^*)$ als topologische Vektorräume mit der in § 4.3 definierten *Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen* auf. $A(W)$ bzw. $A(W^*)$ sind *Fréchet-Räume*, als deren topologisch duale Vektorräume man die direkten Summen $K(W^*) = \sum_{p,q} K^{p,q}(W^*)$ bzw. $K(W) = \sum_{p,q} K^{p,q}(W)$ auffassen kann. Die dualen Paarungen ergeben sich, indem man die wie in § 4.3 gebildeten Bilinearformen $\langle , \rangle$ auf $K^{p,q}(W^*) \times A^{n-p,n-q}(W)$ bzw. $K^{p,q}(W) \times A^{n-p,n-q}(W^*)$ linear so zu Bilinearformen auf $K(W^*) \times A(W)$ bzw.

$K(W)\times A(W^*)$ fortsetzt, daß $\langle T,\omega\rangle\neq 0$, $T\in K^{p,q}(W^*)$ bzw. $K^{p,q}(W)$, $\omega\in A^{r,s}(W)$ bzw. $A^{r,s}(W^*)$, nur für $r=n-p$, $s=n-q$. Entsprechend definiert man durch (5) eine positiv definite hermitesche Metrik auf ganz $A(W)$. $A(W)$ erhält so eine komplexe hilbertsche Struktur, durch die eine andere Topologie auf $A(W)$ definiert wird. Bezüglich dieser ist $A(W)$ nicht vollständig. Wir haben es hier nur mit der obengenannten Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen zu tun. Für $\alpha,\beta\in A(W)$ ist $(\alpha,\beta)=\langle\alpha,\#\beta\rangle=\int\limits_X\alpha\wedge\#\beta$, wenn man vereinbart, unter $\int\limits_X\varphi$, $\varphi\in A(1)$, das Integral über X des Bestandteils maximalen Bigrades (n,n) von φ zu verstehen. Die Unterräume $A^{p,q}(W)$ sind dann paarweise orthogonal zueinander. Ebenso wird durch (6) ein Skalarprodukt zwischen Elementen aus $K(W)$ und $A(W)$ definiert mit $(T,\omega)\neq 0$, $T\in K^{p,q}(W)$, $\omega\in A^{r,s}(W)$, nur für $p=r$, $q=s$. Durch $\#=\psi\otimes *$ bzw. $\widetilde{\#}=\bar{\psi}^{-1}\otimes *$ wird ein *Antiisomorphismus des topologischen Vektorraums* $A(W)$ bzw. $A(W^*)$ *auf den topologischen Vektorraum* $A(W^*)$ bzw. $A(W)$ gegeben.

Wir untersuchen nun mit Hilfe der Metrik (5) den Raum $A(W)$. $\bar\partial$ operiert linear und stetig auf $A(W)$ und ist vom Bigrad $(0,1)$, d.h. es bildet $A^{p,q}(W)$ in $A^{p,q+1}(W)$ ab. Ebenso operiert $\bar\partial$ auf $A(W^*)$. $\vartheta=-\widetilde{\#}\bar\partial\widetilde{\#}$ operiert daher ebenfalls linear und stetig auf $A(W)$. ϑ hat den Bigrad $(0,-1)$ und ist bezüglich $(,)$ zu $\bar\partial$ adjungiert: Für $\alpha\in A^{p,q}(W)$, $\beta\in A^{p,q+1}(W)$ ist $(\alpha,\vartheta\beta)=\langle\alpha,\#\vartheta\beta\rangle=-\int\limits_X\alpha\wedge\#\widetilde{\#}\bar\partial\#\beta=(-1)^{p+q+1}\int\limits_X\alpha\wedge\bar\partial\#\beta$. $(\bar\partial\alpha,\beta)-(\alpha,\vartheta\beta)=\int\limits_X(\bar\partial\alpha\wedge\#\beta+(-1)^{p+q}\alpha\wedge\bar\partial\#\beta)=\int\limits_X\bar\partial(\alpha\wedge\#\beta)=\int\limits_X d(\alpha\wedge\#\beta)=0$. Man hat also $(\alpha,\vartheta\beta)=(\bar\partial\alpha,\beta)$, d.h. ϑ ist zu $\bar\partial$ adjungiert, wie behauptet wurde. Wegen $\bar\partial\bar\partial=0$ ist auch $\vartheta\vartheta=0$. Der Operator $\bar\partial+\vartheta$ ist selbstadjungiert. Man definiert den *komplexen* Laplace-Beltrami-Operator $\square=(\bar\partial+\vartheta)^2=\bar\partial\vartheta+\vartheta\bar\partial$. $\square$ *ist selbstadjungiert und hermitesch positiv:* $(\square\alpha,\alpha)=\big((\bar\partial+\vartheta)\alpha,(\bar\partial+\vartheta)\alpha\big)\geqq 0$. Es hat den Bigrad $(0,0)$, bildet daher $A^{p,q}(W)$ in sich ab. Den Kern von $\square$, die Menge der α mit $\square\alpha=0$, bezeichnen wir mit $A_1(W)$. Er heißt der komplex-harmonische Teilraum, seine Elemente die *komplex-harmonischen Formen mit Koeffizienten in* W. $A_1(W)$ ist bigraduiert: $A_1(W)=\sum\limits_{p,q}A_1^{p,q}(W)$. $\square$ ist stetig, $A_1(W)$ daher abgeschlossen.

$\square\alpha=0$ ist gleichbedeutend mit $\bar\partial\alpha=\vartheta\alpha=0$. Beweis: Ist $\bar\partial\alpha=\vartheta\alpha=0$, so ist $\square\alpha=(\bar\partial+\vartheta)^2\alpha=0$. Ist umgekehrt $\square\alpha=0$, so ist $(\square\alpha,\alpha)=\big((\bar\partial+\vartheta)\alpha,(\bar\partial+\vartheta)\alpha\big)=0$, also $(\bar\partial+\vartheta)\alpha=\bar\partial\alpha+\vartheta\alpha=0$. Daraus folgt $\bar\partial\alpha=\vartheta\alpha=0$ aus Gradgründen.

Es gilt $\bar\partial\square=\bar\partial\vartheta\bar\partial=\square\bar\partial$ und $\vartheta\square=\vartheta\bar\partial\vartheta=\square\vartheta$.

Wir definieren nun die Unterräume $A_2(W)=\bar\partial A(W)$ und $A_3(W)=\vartheta A(W)$. Da $\bar\partial$ nach § 4.3 Hilfssatz 10 sogar ein Homomorphismus des topologischen Vektorraumes $A^{p,q}(W)$ in den topologischen Vektorraum $A^{p,q+1}(W)$ ist, ist $A_2(W)$ abgeschlossen. $\vartheta=-\widetilde{\#}\bar\partial\#$ ist ebenfalls ein Homomorphismus, da $\#$ und $\widetilde{\#}$ Antiisomorphismen sind. $A_3(W)$ ist also auch abgeschlossen. $A_2(W)$ und $A_3(W)$ sind wieder bigraduiert: $A_2(W)=\sum\limits_{p,q}A_2^{p,q}(W)$, $A_3(W)=\sum\limits_{p,q}A_3^{p,q}(W)$.

Die drei Unterräume $A_1(W)$, $A_2(W)$, $A_3(W)$ sind paarweise orthogonal. Ist ein $\alpha \in A(W)$ orthogonal zu jedem dieser Unterräume, so ist $\alpha = 0$: Aus $(\alpha, A_2(W)) = (\alpha, \bar\partial A(W)) = (\vartheta\alpha, A(W)) = 0$ folgt nämlich $\vartheta\alpha = 0$. Ebenso folgt aus $(\alpha, A_3(W)) = 0$ $\bar\partial\alpha = 0$. α ist also, wenn es orthogonal zu $A_2(W)$ und $A_3(W)$ ist, in $A_1(W)$ enthalten. — Speziell ist $A_1(W) \cap \bar\partial A(W) = \{0\}$: Die komplex-harmonischen Formen α, die Cozyklen sind ($\bar\partial\alpha = 0$), sind niemals cohomolog 0. Man erhält so einen Monomorphismus $A_1^{p,q}(W) \to H^{p,q}(A(W))$ und kann aus der Endlichdimensionalität von $H^{p,q}(W)$ schließen, daß $A_1^{p,q}(W)$ *endlich dimensional über C ist.*

Es existiert daher in $A(W)$ eine *Orthogonalprojektion* π_1 *auf* $A_1(W)$, d.h. eine lineare Abbildung $\pi_1 : A(W) \to A_1(W)$, so daß $\alpha - \pi_1\alpha$ orthogonal zu $A_1(W)$ ist. $\pi_1\alpha$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt: Ist auch $\alpha = \bar\pi_1\alpha$ orthogonal zu $A_1(W)$, so ist $(\alpha - \pi_1\alpha) - (\alpha - \bar\pi_1\alpha) = \bar\pi_1\alpha - \pi_1\alpha \in A_1(W)$ orthogonal zu $A_1(W)$ und folglich $\bar\pi_1\alpha - \pi_1\alpha = 0$. Für $\alpha \in A_1(W)$ ist $\alpha - \alpha = 0$ orthogonal zu $A_1(W)$, also $\pi_1\alpha = \alpha$. Man hat daher $\pi_1^2 = \pi_1$ und π_1 ist eine Abbildung von $A(W)$ auf $A_1(W)$. Die Existenz der Abbildung π_1 ergibt sich so: $\omega_1, \ldots, \omega_m$ sei eine Orthonormalbasis von $A_1^{p,q}(W)$. Dann ist für $\alpha \in A^{p,q}(W)$ und $\pi_1^{p,q}\alpha = \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha, \omega_\mu)\omega_\mu$ $(\alpha - \pi_1^{p,q}\alpha, \omega_\mu) = (\alpha, \omega_\mu) - (\alpha, \omega_\mu) = 0$. $\alpha - \pi_1^{p,q}\alpha$ ist daher orthogonal zu ω_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, also orthogonal zu $A_1^{p,q}(W)$. $\pi_1^{p,q}\alpha$ ist stetig auf $A^{p,q}(W)$: Aus $\alpha_i \to 0$ in $A^{p,q}(W)$ folgt $(\alpha_i, \omega_\mu) \to 0$, $\mu = 1, \ldots, m$. Aus diesen linearen stetigen Abbildungen $\pi_1^{p,q} : A^{p,q}(W) \to A_1^{p,q}(W)$ setzt man eine lineare stetige Abbildung $\pi_1 : A(W) = \sum_{p,q} A^{p,q}(W) \to \sum_{p,q} A_1^{p,q}(W) = A_1(W)$ zusammen. π_1 ist ein *stetiger* Operator vom Bigrad (0, 0) mit den gewünschten Eigenschaften.

Satz 4. *Damit die Gleichung* $\square\alpha = \omega$, $\omega \in A(W)$ *in* $A(W)$ *lösbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß* ω *orthogonal zu* $A_1(W)$ *ist.*

Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig. Daß sie hinreichend ist, wird hier *nicht bewiesen*. Wir verweisen auf [13], zitiert in [11].

Satz 4 ergibt unmittelbar den Satz von der *Orthogonalzerlegung von* $A(W)$:

Satz 5. $A(W)$ *ist direkte Summe der paarweise aufeinander orthogonalen Unterräume* $A_1(W)$, $A_2(W)$, $A_3(W)$: $A(W) = A_1(W) \oplus A_2(W) \oplus A_3(W)$.

Folgerung. *Für* $A^{p,q}(W)$ *ergibt sich* $A^{p,q}(W) = A_1^{p,q}(W) \oplus \bar\partial A^{p,q-1}(W) \oplus \vartheta A^{p,q+1}(W)$.

Beweis. Ist $\omega \in A(W)$, so ist $\omega - \pi_1\omega$ orthogonal zu $A_1(W)$. Nach Satz 4 gibt es also ein $\alpha \in A(W)$ mit $\square\alpha = \omega - \pi_1\omega$. Es gibt sogar ein solches $\alpha' \in A(W)$, das zu $A_1(W)$ orthogonal ist: $\alpha' = \alpha - \pi_1\alpha$, $\square\alpha' = \square\alpha$. Dieses ist eindeutig bestimmt. Ist nämlich auch $\alpha'' \in A(W)$ orthogonal zu $A_1(W)$ und $\square\alpha'' = \omega - \pi_1\omega$, so ist $\square(\alpha' - \alpha'') = 0$ und $\alpha' - \alpha''$ orthogonal zu $A_1(W)$, also $\alpha' - \alpha'' = 0$. Das somit eindeutig bestimmte $\alpha \in A(W)$, orthogonal zu $A_1(W)$ mit $\square\alpha = \omega - \pi_1\omega$ bezeichnen wir mit $G(\omega)$, $G =$ Greenscher Operator zu $\square$. G operiert linear auf $A(W)$ und ist vom Bigrad (0, 0). Nun ist $\square G\omega = \omega - \pi_1\omega$, also

$$\omega = \pi_1\omega + \square G\omega = \pi_1\omega + \bar\partial(\vartheta G\omega) + \vartheta(\bar\partial G\omega). \tag{7}$$

Diese *Zerlegungsformel* zeigt, daß $A(W)$ Summe der Unterräume $A_1(W)$, $A_2(W)$, $A_3(W)$ ist. Daß diese Summendarstellung eine direkte ist, folgt aus der oben schon bemerkten paarweisen Orthogonalität der Unterräume.

Umgekehrt folgt natürlich aus Satz 5 sofort Satz 4: Wir bezeichnen dazu die Projektionen auf die direkten Summanden $A_i(W)$ in der Summenzerlegung von $A(W)$ mit π_i. Es ist $\pi_i\pi_j=\delta_i^j\pi_i$, $\omega=\pi_1\omega+\pi_2\omega+\pi_3\omega$, $\omega\in A(W)$. Für $\omega\in A_2(W)$ gibt es ein $\alpha\in A(W)$ mit $\bar\partial\alpha=\omega$. Es gibt sogar ein $\alpha'\in A_3(W)$ mit dieser Eigenschaft: $\alpha'=\pi_3\alpha$, $\bar\partial\alpha=\bar\partial(\pi_1\alpha)+\bar\partial(\pi_2\alpha)+\bar\partial(\pi_3\alpha)=\bar\partial\alpha'$, da $\bar\partial\big(A_1(W)\oplus A_2(W)\big)=0$. Dieses ist eindeutig bestimmt. Für $\alpha''\in A_3(W)$, $\bar\partial\alpha''=\omega$ ist nämlich $\bar\partial(\alpha'-\alpha'')=0$, $\alpha'-\alpha''$ also orthogonal zu $A_3(W)$. Andererseits ist $\alpha'-\alpha''\in A_3(W)$ und folglich $\alpha'-\alpha''=0$. Entsprechend ergibt sich: Für $\omega\in A_3(W)$ gibt es genau ein $\alpha\in A_2(W)$ mit $\vartheta\alpha=\omega$. — Ist nun $\omega\in A_2(W)$, so gibt es ein $\alpha\in A_3(W)$ mit $\bar\partial\alpha=\omega$. Zu $\alpha\in A_3(W)$ gibt es nun aber ein $\beta\in A_2(W)$ mit $\vartheta\beta=\alpha$, insgesamt ist also $\bar\partial\vartheta\beta=\bar\partial\alpha=\omega$. Da $\beta\in A_2(W)$, ist $\vartheta\bar\partial\beta=0$, also $\bar\partial\vartheta\beta=\square\beta$. Wir haben damit zu jedem $\omega\in A_2(W)$ ein $\beta\in A_2(W)$ mit $\square\beta=\omega$ gefunden. Entsprechend erhält man zu jedem $\omega\in A_3(W)$ ein $\beta\in A_3(W)$ mit $\square\beta=\omega$. Ist nun $\omega=\pi_2\omega+\pi_3\omega=\omega_2+\omega_3\in A_2(W)\oplus A_3(W)$, so gibt es $\beta_i\in A_i(W)$ mit $\square\beta_i=\omega_i$; $i=1,2$. Es ist $\square(\beta_1+\beta_2)=\omega_1+\omega_2=\omega$. $\beta_1+\beta_2$ ist also eine Lösung der Gleichung $\square\alpha=\omega$.

Aus der Zerlegungsformel (7) $\omega=\pi_1\omega+\bar\partial\vartheta G\omega+\vartheta\bar\partial G\omega$ ergibt sich: $\pi_2=\bar\partial\vartheta G$, $\pi_3=\vartheta\bar\partial G$. Beides sind lineare Operatoren vom Bigrad $(0,0)$. — Der Kern von $\bar\partial$ ist $A_1(W)\oplus A_2(W)$, der Kern von ϑ $A_1(W)\oplus A_3(W)$. Der Modul der Cozyklen von $A(W)$ bezüglich $\bar\partial$ $Z\big(A(W)\big)=A_1(W)\oplus A_2(W)=A_1(W)\oplus\bar\partial A(W)$. Also ist der Cohomologiemodul von $A(W)$ bezüglich $\bar\partial$ $H\big(A(W)\big)=Z\big(A(W)\big)/\bar\partial A(W)\cong A_1(W)$. Entsprechend ist der Cohomologiemodul von $A(W)$ bezüglich ϑ ebenfalls isomorph $A_1(W)$.

Satz 6. *Es ist* $H^q\big(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\big)\cong H^{p,q}\big(A(W)\big)\cong A_1^{p,q}(W)$. *Der erste Isomorphismus ist kanonisch, der zweite kanonisch bezüglich einer hermiteschen Metrik auf* X *und einer unitären Struktur von* W. $H^0\big(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\big)=A_1^{p,0}(W)$: *Der Raum der holomorphen* p*-Formen mit Koeffizienten in* W *stimmt mit dem Raum der komplex-harmonischen Formen vom Bigrad* $(p,0)$ *mit Koeffizienten in* W *überein.*

$\square$ ist ein elliptischer partieller Differentialoperator 2. Ordnung über der kompakten Mannigfaltigkeit X. Daraus kann man entnehmen, daß $A_1^{p,q}(W)$ endlich dimensional über C ist. Man erhält so einen anderen Beweis für die Endlichkeit von $H^q\big(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)\big)$.

Mit Hilfe der Zerlegungsformel (7) kann man nun leicht den am Ende von 5.1 gewünschten expliziten Ausdruck für den in Formel (3) Satz 2 vorkommenden Strom R angeben: Für die Ströme T_i wurde dort eine explizite Formel angegeben, die zeigte, daß man ein System von $T_i\in\Gamma\big(U_i,\mathfrak{A}^{p,0}(W)\big)$ mit $T_i-T_j=\omega_{ij}$ in U_{ij} finden kann. Dann ist aber auch $S=\bar\partial T_i\in A^{p,1}(W)$. Es ist $\bar\partial S=0$, und die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit läßt sich jetzt so ausdrücken: $\pi_1 S=0$. Wegen $\bar\partial S=0$ ist $\pi_3 S=0$, also

$S = \pi_1 S + \pi_2 S = \pi_1 S + \bar\partial\vartheta G S = \bar\partial\vartheta G S$ im Falle der Lösbarkeit. $R = \vartheta G S \in A^{p,0}(W)$ ist also ein Strom mit $\bar\partial R = S$, und man erhält eine Lösung in der Form $\psi = \omega_i + \vartheta G S - T_i$ in U_i.

Satz 7. *Zu einem Cousindatum* $(\overset{p}{\omega})$ *bildet man* T_i *und* S, *wie am Ende von* 5.1 *und in Satz 2 angegeben wurde. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung ist dann* $\pi_1 S = 0$, *und man erhält eine solche in der Form*

$$\psi = \omega_i + \vartheta G S - T_i \quad \text{in } U_i.$$

Bemerkung. Diese Formel ist für ein *beliebiges* Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ sinnvoll. $\vartheta G S - T_i$ ist eine C^∞-Form in U_i, die im Falle der Lösbarkeit holomorph ist.

Wir weisen hier noch einige nützliche Eigenschaften der oben eingeführten Operatoren nach: Der Greensche Operator G *ist stetig*. Beweis: $A(W)$ ist ein Fréchet-Raum. Nach dem Banachschen Satz vom abgeschlossenen Graphen [2] genügt es dazu, für die lineare Abbildung G zu zeigen: Aus $\omega_i \to 0$ und $G\omega_i \to \alpha$ in $A(W)$ folgt $\alpha = 0$. Nun ist nach der Zerlegungsformel (7) $\omega_i = \pi_1\omega_i + \Box G\omega_i$. π_1 und $\Box$ sind stetig, also ist $0 = 0 + \Box\alpha$, d.h. $\alpha \in A_1(W)$. $G\omega_i$ ist nach Definition von G orthogonal zu $A_1(W)$. Also ist auch der Limes α der Folge $\{G\omega_i\}$ orthogonal zu $A_1(W)$ und damit $\alpha = 0$ q.e.d.

G ist selbstadjungiert: Es ist $(G\omega, \psi) = (\omega, G\psi)$, $\omega, \psi \in A(W)$. Mit $G\omega = \alpha$, $G\psi = \beta$ ist $\omega = \pi_1\omega + \Box\alpha$, $\psi = \pi_1\psi + \Box\beta$. Also ist $(G\omega, \psi) = (\alpha, \pi_1\psi + \Box\beta) = (\alpha, \Box\beta)$, da $\alpha = G\omega$ orthogonal zu $A_1(W)$ ist. Ebenso ist $(\omega, G\psi) = (\Box\alpha, \beta)$. $\Box$ ist aber selbstadjungiert, $(\alpha, \Box\beta) = (\Box\alpha, \beta)$, und damit $(G\omega, \psi) = (\omega, G\psi)$. — G ist hermitesch positiv: $(G\omega, \omega) \geqq 0$ und $(G\omega, \omega) = 0$ nur für $\omega \in A_1(W)$. Für $G\omega = \alpha$ ist nämlich $(G\omega, \omega) = (\alpha, \pi_1\omega + \Box\alpha) = (\alpha, \Box\alpha) = ((\bar\partial + \vartheta)\alpha, (\bar\partial + \vartheta)\alpha) \geqq 0$.

Ist ein linearer Operator $L\colon A(W) \to A(W)$ mit $\Box$ vertauschbar, so ist er auch mit π_1 und G vertauschbar: π_1 wird charakterisiert durch a) $\Box(\pi_1\alpha) = 0$, b) $\alpha - \pi_1\alpha = \Box\beta$ für ein $\beta \in A(W)$ (Satz 4). Mit $L\Box\omega = \Box L\omega$ haben wir zu zeigen: $\pi_1(L\omega) = L\pi_1\omega$. Wir zeigen dazu: $L\pi_1\omega = \tilde\omega$ hat die Eigenschaften a) und b) für $\alpha = L\omega$. a) $\Box\tilde\omega = \Box L\pi_1\omega = L\Box\pi_1\omega = 0$. b) $L\omega - \tilde\omega = L\omega - L\pi_1\omega = L(\omega - \pi_1\omega) = L(\Box\psi) = \Box(L\psi)$. Also ist $L\pi_1\omega = \pi_1\alpha = \pi_1 L\omega$. — G wird charakterisiert durch a) $\Box(G\alpha) = \alpha - \pi_1\alpha$, b) $\pi_1(G\alpha) = 0$. Nachzuweisen ist $G(L\omega) = LG\omega$. Wir zeigen dazu: $\omega_1 = LG\omega$ hat die Eigenschaften a) und b) für $\alpha = L\omega$. a) $\Box\omega_1 = \Box LG\omega = L\Box G\omega = L(\omega - \pi_1\omega) = L\omega - \pi_1 L\omega$, da L und π_1 vertauschbar sind, b) $\pi_1\omega_1 = \pi_1 LG\omega = L\pi_1 G\omega = 0$. Also ist $LG\omega = G\alpha = GL\omega$. — Anwendung: $\Box$ ist mit $\bar\partial$, ϑ und $\Box$ vertauschbar, also sind auch π_1 und G mit $\bar\partial$, ϑ, $\Box$ vertauschbar. $\pi_2 = \bar\partial\vartheta G$, $\pi_3 = \vartheta\bar\partial G$ sind daher ebenfalls mit π_1 und G vertauschbar.

Damit erhält man $(\omega, \pi_2\psi) = (\omega, \bar\partial\vartheta G\psi) = (\omega, G\bar\partial\vartheta\psi) = (\bar\partial\vartheta G\omega, \psi) = (\pi_2\omega, \psi)$ und ebenso $(\omega, \pi_3\psi) = (\pi_3\omega, \psi)$. π_2 und π_3 und damit auch $\pi_1 = I - \pi_2 - \pi_3$ sind also selbstadjungiert. Da G, ϑ und $\bar\partial$ stetig sind, sind auch $\pi_2 = \bar\partial\vartheta G$ und $\pi_3 = \vartheta\bar\partial G$ stetige Operatoren. Wir fassen zusammen:

Satz 8. *Die linearen Operatoren in* $A(W)$ $\bar\partial$, ϑ, $\Box$, π_1, π_2, π_3, G *sind sämtlich stetig.* $\bar\partial$ *und* ϑ *sind zueinander adjungiert,* $\Box$, π_1, π_2, π_3, G *sind sämtlich*

selbstadjungiert. $\square, \pi_1, G$ *sind mit* $\bar{\partial}, \vartheta, \square, \pi_1, \pi_2, \pi_3, G$ *vertauschbar. Es ist* $I = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_1 + \bar{\partial}\vartheta G + \vartheta\bar{\partial} G = \pi_1 + \square G$, $\pi_i \pi_j = \delta_i^j \pi_i$ *und* $\bar{\partial}\pi_1 = \pi_1 \bar{\partial} = 0$, $\vartheta \pi_1 = \pi_1 \vartheta = 0$, $\square \pi_1 = \pi_1 \square = 0$, $G\pi_1 = \pi_1 G = 0$, $\bar{\partial}\pi_2 = 0$, $\pi_2 \vartheta = 0$, $\vartheta \pi_3 = 0$, $\pi_3 \bar{\partial} = 0$.

Damit sind alle Eigenschaften der Untermoduln $A_1(W)$, $A_2(W)$, $A_3(W)$ von $A(W)$ durch Relationen im Ring der Operatoren von $A(W)$ ausgedrückt.

5.3. Zerlegung von $K(W)$

Um Existenzaussagen über Formen mit Koeffizienten in W mit vorgeschriebenen Singularitäten zu erhalten, ist es zweckmäßig, eine der eben beschriebenen Zerlegung von $A(W)$ analoge Zerlegung des größeren Raumes $K(W)$ vorzunehmen. Man erhält sie leicht aus der Zerlegung von $A(W)$ mit Hilfe des in 5.2 definierten Skalarproduktes $(T, \omega) = \langle T, \#\omega \rangle$, $T \in K(W)$, $\omega \in A(W)$. Der Übergang von $A(W)$ zu $K(W)$ beruht auf folgenden Bemerkungen:

1. Sind A und A' zwei Fréchet-Räume, K und K' die zu ihnen topologisch dualen Räume mit den kanonischen Bilinearformen $\langle T, \omega \rangle$, $T \in K$, $\omega \in A$, und $\langle T', \omega' \rangle$, $T' \in K'$, $\omega' \in A'$, so gibt es zu jeder linearen Abbildung $L: A \to A'$ eine *transponierte* lineare Abbildung ${}^tL: K' \to K$ mit der Eigenschaft $\langle T', L\omega \rangle = \langle {}^tLT', \omega \rangle$ für alle $T' \in K'$, $\omega \in A$. Für festes $T' \in K'$ stellt nämlich $\langle T', L\omega \rangle$ eine stetige Linearform auf A dar, es gibt daher zu $T' \in K'$ ein $T \in K$ mit $\langle T', L\omega \rangle = \langle T, \omega \rangle$ für $\omega \in A$. T ist dadurch eindeutig bestimmt und wird mit ${}^tLT'$ bezeichnet. ${}^tL$ ist linear. Es ist ${}^t(L_1 + L_2) = {}^tL_1 + {}^tL_2$, ${}^t(\lambda L) = \lambda {}^tL$, $\lambda \in C$ und für die Nullabbildung ${}^t(0) = 0$. Für drei Räume A, A', A'', die zu ihnen topologisch dualen Räume K, K', K'' und lineare stetige Abbildungen $L_1: A \to A'$, $L_2: A' \to A''$ gilt ${}^t(L_2 L_1) = {}^tL_1 {}^tL_2$, die Reihenfolge wird also vertauscht. Spezialfall: $A' = A$, $K' = K$. Für die Identität I ergibt sich ${}^t(I) = I$, wobei links I die Identität in A, rechts in K bedeutet.

2. Wir verpflanzen die Operatoren in $A(W)$ mit Hilfe des Skalarproduktes $(T, \omega) = \langle T, \#\omega \rangle$, $T \in K(W)$, $\omega \in A(W)$, nach $K(W)$. Zu jedem linearen stetigen Operator $L: A(W) \to A(W)$ gibt es einen metrisch transponierten — wir sagen dazu *adjungierten* — linearen Operator $L': K(W) \to K(W)$ mit $(T, L\omega) = (L'T, \omega)$ für alle $T \in K(W)$, $\omega \in A(W)$. Beweis: Nach Definition ist $(T, L\omega) = \langle T, \#L\omega \rangle$ mit dem Antiisomorphismus $\#: A(W) \to A(W^*)$. Es ist $\#(c\alpha) = c^\varkappa \#(\alpha)$, $c \in C$, $\varkappa$ der Automorphismus $c_1 + ic_2 \to c_1 - ic_2$, $\#$ ist antilinear. Ferner ist $\#$ stetig. Für festes $T \in K(W)$ ist $\omega \to \langle T, \#\omega \rangle^\varkappa$ eine stetige Linearform auf $A(W)$. Es gibt also ein $T' \in K(W^*)$ mit $\langle T, \#\omega \rangle^\varkappa = \langle T', \omega \rangle$ für $\omega \in A(W)$. Wir setzen $T' = {}^t\#T$ und erhalten $\langle T, \#\omega \rangle = \langle {}^t\#T, \omega \rangle^\varkappa$. ${}^t\#$ ist die zur antilinearen stetigen Abbildung $\#: A(W) \to A(W^*)$ transponierte Abbildung ${}^t\#: K(W) \to K(W^*)$ ($K(W)$ ist zu $A(W^*)$, $K(W^*)$ zu $A(W)$ dual!). ${}^t\#$ ist antilinear. Ebenso erhält man zum Antiisomorphismus $\#^{-1}: A(W^*) \to A(W)$ eine transponierte antilineare Abbildung ${}^t\#^{-1}: K(W^*) \to K(W)$ mit $\langle T', \#^{-1}\omega' \rangle = \langle {}^t\#^{-1}T', \omega' \rangle^\varkappa$, $T' \in K(W^*)$, $\omega' \in A(W^*)$. Übrigens sind ${}^t\#$ und ${}^t\#^{-1}$ Antiisomorphismen. Damit erhält man $(T, L\omega) = \langle T, \#L\omega \rangle =$

$\langle {}^t\#T, L\omega\rangle^* = \langle {}^tL{}^t\#T, \omega\rangle^* = \langle {}^tL{}^t\#T, \#^{-1}\#\omega\rangle^* = \langle {}^t\#^{-1}{}^tL{}^t\#T, \#\omega\rangle = ({}^t\#^{-1}{}^tL{}^t\#T, \omega)$ für $T \in K(W), \omega \in A(W)$. Es ist also $L' = {}^t\#^{-1}{}^tL{}^t\# : K(W) \to K(W)$ eine lineare Abbildung.

3. Für $T \in K(W)$, $\omega \in A(W)$ gilt: Ist $(T, \omega) = 0$ für festes T und alle ω, so ist $T = 0$, denn $(T, \omega) = \langle T, \#\omega\rangle = 0$ und $\#$ ist eine Abbildung auf $A(W^*)$. — Ist $(T, \omega) = 0$ für festes ω und alle T, so ist $\omega = 0$. Es ist nämlich dann speziell $(\omega, \omega) = 0$. — Daraus folgt: Für einen linearen stetigen Operator $L : A(W) \to A(W)$ gibt es zu einem $T \in K(W)$ höchstens ein $T' \in K(W)$ mit $(T, L\omega) = (T', \omega)$ für alle $\omega \in A(W)$. Nun ist $A(W) \subset K(W)$ und das Skalarprodukt $(\ ,\ )$ auf $K(W) \times A(W)$ war so definiert worden, daß es auf $A(W) \times A(W)$ mit dem dort definierten Skalarprodukt $(\ ,\ )$ übereinstimmt. Nicht jeder lineare stetige Operator $L : A(W) \to A(W)$ besitzt einen adjungierten Operator in $A(W)$. Dagegen besitzt L stets einen adjungierten Operator $L' : K(W) \to K(W)$, der $A(W) \subset K(W)$ nicht notwendig in sich abbildet. Genau dann, wenn $L'(A(W)) \subset A(W)$, gibt es zu L schon in $A(W)$ einen adjungierten Operator. Er stimmt mit der Einschränkung des adjungierten Operators $L' : K(W) \to K(W)$ auf $A(W)$ überein. Die von uns in 5.2 betrachteten Operatoren $\bar\partial, \vartheta, \square, G, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ haben sämtlich Adjungierte in $A(W)$: $\bar\partial, \vartheta$ sind zueinander adjungiert, $\square, G, \pi_i$ sind selbstadjungiert.

4. Die Abbildung $L \to L'$ des Ringes der linearen stetigen Operatoren in $A(W)$ in den Endomorphismenring von $K(W)$ [wir betrachten hier $K(W)$ nur als Menge mit einer algebraischen Struktur] hat die Eigenschaft $(L_1 + L_2)' = L_1' + L_2'$, $(\lambda L)' = \lambda L'$, $\lambda \in C$, $(L_1 L_2)' = L_2' L_1'$, $(0)' = 0$, $(I)' = I$, 0 = Nullabbildung, I = Identität.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die gewünschte Zerlegung von $K(W)$ leicht angeben. Wir bezeichnen die zu $\bar\partial$ bzw. ϑ in $A(W)$ adjungierten Operatoren in $K(W)$ $\bar\partial'$ bzw. ϑ' mit $\vartheta = \bar\partial'$ bzw. $\bar\partial = \vartheta'$. Für $\vartheta = \bar\partial'$ stimmt diese Festsetzung mit der Bezeichnung des zu $\bar\partial$ in $A(W)$ adjungierten Operators überein. $\bar\partial = \vartheta'$ ist jedoch noch zu rechtfertigen, da $\bar\partial$ schon auf $K(W)$ definiert ist. Es ist $\langle \overset{p,q}{T}, \bar\partial\omega\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle \bar\partial T, \omega\rangle$, $T \in K^{p,q}(W)$, $\omega \in A^{n-p, n-q-1}(W^*)$ und daher für $T \in K^{p,q}(W)$, $\omega \in A^{p,q+1}(W)$ $(\bar\partial T, \omega) = \langle \bar\partial T, \#\omega\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle T, \bar\partial\#\omega\rangle = (-1)^{p+q+1}(T, \#^{-1}\bar\partial\#\omega) = (T, -\widetilde{\#}\bar\partial\#\omega) = (T, \vartheta\omega)$, da $\bar\partial\#\omega \in A^{n-p, n-q}(W^*)$ und auf $A^{p,q}(W)$ $\widetilde{\#}\# = (-1)^{p+q} I$, also $\#^{-1} = (-1)^{p+q}\widetilde{\#}$ ist, und nach Definition auf $A(W)$ gerade $\vartheta = -\widetilde{\#}\bar\partial\#$ war (vgl. 5.2). — Die übrigen Operatoren $\square, G, \pi_i$ sind in $A(W)$ selbstadjungiert. Wir bezeichnen ihre Adjungierten in $K(W)$, $\square', G', \pi_i'$, daher wieder mit $\square, G, \pi_i$. Wir haben damit die Operatoren $\bar\partial, \vartheta, \square, G, \pi_i$ in $A(W)$ zu linearen Operatoren auf $K(W)$ fortgesetzt. Alle in Satz 8, 5.2, aufgezählten Relationen zwischen diesen Operatoren gelten auch für die fortgesetzten Operatoren. Beim Übergang zu den adjungierten Operatoren werden nämlich lediglich $\bar\partial$ und ϑ und die Reihenfolge in der Hintereinanderausführung vertauscht. Dabei geht aber die Gesamtheit der genannten Relationen in sich über.

Wir definieren nun $K_i(W)=\pi_i K(W)$. Aus $I=\pi_1+\pi_2+\pi_3$, $\pi_i\pi_j=\delta_i^j\pi_i$ folgt: $K(W)=K_1(W)\oplus K_2(W)\oplus K_3(W)$ ist direkte Summe der $K_i(W)$. Da die π_i von $A(W)$ auf $K(W)$ fortgesetzt sind, ist $A(W)\cap K_i(W)=A_i(W)$. $K_1(W)$ besteht aus den zu $A_2(W)\oplus A_3(W)$ orthogonalen Elementen von $K(W)$. Für festes $T\in K(W)$ und beliebiges $\omega\in A(W)$ folgt aus $(T,(\pi_2+\pi_3)\omega)=0$ $((\pi_2+\pi_3)T,\omega)=0$ für alle $\omega\in A(W)$, also $(\pi_2+\pi_3)T=0$, d.h. $T\in K_1(W)$. Umgekehrt besteht $A_2(W)\oplus A_3(W)$ aus den zu $K_1(W)$ orthogonalen Elementen von $A(W)$: Für festes $\omega\in A(W)$ und beliebiges $T\in K(W)$ folgt aus $(\pi_1 T,\omega)=0$ $(T,\pi_1\omega)=0$ für alle $T\in K(W)$, also $\pi_1\omega=0$, d.h. $\omega\in A_2(W)\oplus A_3(W)$. Entsprechendes gilt für $K_2(W)$, $K_3(W)$.

$K_2(W)=\bar\partial K(W)$: Es ist $\pi_2=\bar\partial\vartheta G$, also $K_2(W)=\pi_2K(W)\subset\bar\partial K(W)$. Aus $\pi_1\bar\partial=\pi_3\bar\partial=0$ folgt $\bar\partial K(W)\subset K_2(W)$. $K_3(W)=\vartheta K(W)$ ergibt sich entsprechend.

$K_1(W)$ ist der Kern von $\square$: Aus $\square\pi_1=0$ folgt $\square K_1(W)=0$. Ist umgekehrt $\square T=0$, so ist $\square(\pi_1 T)+\square(\pi_2 T+\pi_3 T)=\square(\pi_2 T+\pi_3 T)=0$. Daraus folgt $G\square(\pi_2 T+\pi_3 T)=\square G(\pi_2 T+\pi_3 T)=(I-\pi_1)(\pi_2 T+\pi_3 T)=\pi_2 T+\pi_3 T=0$, also $T\in K_1(W)$.

$K_1(W)\oplus K_2(W)$ ist der Kern von $\bar\partial$: Aus $\bar\partial(\pi_1+\pi_2)=0$ folgt $\bar\partial(K_1(W)\oplus K_2(W))=0$. Ist umgekehrt $\bar\partial T=0$, so ist $\bar\partial(\pi_1 T+\pi_2 T)+\bar\partial\pi_3 T=\bar\partial\pi_3 T=0$, woraus $\vartheta\bar\partial\pi_3 T=0$ folgt. Nun ist $\square\pi_3 T=\bar\partial\vartheta\pi_3 T+\vartheta\bar\partial\pi_3 T=\vartheta\bar\partial\pi_3 T=0$ wegen $\vartheta\pi_3=0$, also $G\square\pi_3 T=\square G\pi_3 T=(I-\pi_1)(\pi_3 T)=\pi_3 T=0$, d.h. aber $T\in K_1(W)\oplus K_2(W)$. Entsprechend ergibt sich: $K_1(W)\oplus K_3(W)$ ist der Kern von ϑ. Damit erhält man: $\square T=0$ ist mit $\bar\partial T=\vartheta T=0$ gleichbedeutend, da $K_1(W)=(K_1\oplus K_2(W))\cap(K_1(W)\oplus K_3(W))$.

Die Gleichung $\square T=S$ ist dann und nur dann lösbar, wenn $S\in K_2(W)\oplus K_3(W)$ oder $\pi_1 S=0$ ist. Beweis: $\square T=\bar\partial(\vartheta T)+\vartheta(\bar\partial T)\in K_2(W)\oplus K_3(W)$. Für $S=\pi_2 S+\pi_3 S$ ist $\square G(\pi_2 S+\pi_3 S)=(I-\pi_1)(\pi_2 S+\pi_3 S)=\pi_2 S+\pi_3 S=S$, also $T=GS$ eine Lösung der Gleichung.

Wie in Satz 6, 5.2, ergibt sich hier $H^q(\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))\cong H^{p,q}(K(W))\cong K_1^{p,q}(W)$. Da aber $A_1^{p,q}(W)\subset K_1^{p,q}(W)$, $Z^{p,q}(A(W))=A_1^{p,q}(W)\oplus\bar\partial A^{p,q-1}(W)\subset Z^{p,q}(K(W))$ $=K_1^{p,q}(W)\oplus\bar\partial K^{p,q-1}(W)$, $Z^{p,q}(A(W))$ bzw. $Z^{p,q}(K(W))$ Kern von $\bar\partial$ in $A^{p,q}(W)$ bzw. $K^{p,q}(W)$, ergibt sich aus dem Zusatz zu Satz 1, § 4.1: $K_1^{p,q}(W)=A_1^{p,q}(W)$, also $K_1(W)=A_1(W)$. Aus $\square T=0$ folgt also $T\in A(W)$. Allgemeiner gilt: *Aus* $\square T=\omega\in A(W)$ *folgt* $T\in A(W)$. Beweis: $\omega\in(K_2(W)\oplus K_3(W))\cap A(W)$ $=A_2(W)\oplus A_3(W)$. Also gibt es ein $\psi\in A(W)$ mit $\square\psi=\omega$. Dann ist $\square(T-\psi)=0$, d.h. $T-\psi\in A(W)$ und folglich auch $T\in A(W)$. — Umgekehrt folgt aus dieser „Elliptizität" des Operators $\square$ in $K(W)$, die sich auch mit Methoden der Analysis beweisen läßt, der Zusatz zu Satz 1, § 4.1 und damit die Isomorphie $H^{p,q}(A(W))\cong H^{p,q}(K(W))$. Wir fassen zusammen:

Satz 9. *$K(W)$ besitzt eine Darstellung als direkte Summe $K(W)=A_1(W)\oplus\bar\partial K(W)\oplus\vartheta K(W)$. $A_1(W)$, der Raum der komplex-harmonischen Formen mit Koeffizienten in W, ist der Kern des Operators $\square=\bar\partial\vartheta+\vartheta\bar\partial$ in $K(W)$. Die zugehörigen Projektionen seien π_1,π_2,π_3. Dann gibt es einen linearen*

Operator G in $K(W)$ und für die linearen Operatoren $\bar\partial, \vartheta, \Box, G, \pi_i$ in $K(W)$ gelten die in Satz 8, 5.1, zusammengestellten Relationen.

Satz 7 läßt sich nun auch für ein System von Strömen $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{R}^{p,0}(W))$ aussprechen.

Satz 10. *Ist $\overset{p}{(\omega)}$ ein Cousindatum zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in J}$ und $\overset{p,0}{(T)}$ ein System von Strömen $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{R}^{p,0}(W))$ mit $T_i - T_j = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$ in $U_i \cap U_j$, so bildet man $\bar\partial T_i = S$ in U_i. Es ist $S \in \Gamma(X, \mathfrak{R}^{p,1}(W)) = K^{p,1}(W)$, und für die Lösbarkeit ist $\pi_1 S = 0$ notwendig und hinreichend. Man erhält alle Lösungen in der Form*

$$\psi = \omega_i + \vartheta G S - T_i + \omega \quad \text{in } U_i, \qquad \omega \in \Gamma(X, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W)). \tag{8}$$

Die Bedingung $\pi_1 S = 0$ läßt sich mit Hilfe der Dualität und Satz 6 in der Form $\langle \overset{p,1}{S}, A_1^{n-p,n-1}(W^*)\rangle = 0$ ausdrücken (vgl. Satz 3, 5.1).

Bei obiger Behandlung des Cousinproblems wurde der Operator $\bar\partial$ auf die $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{R}^{p,0}(W))$ angewandt. Dies ist möglich, denn nach § 4.1 ist $\bar\partial$ ein *Garbenhomomorphismus* $\bar\partial: \mathfrak{R}^{p,q}(W) \to \mathfrak{R}^{p,q+1}(W)$, oder — wenn man die bigraduierte Garbe $\mathfrak{R}(W) = \sum \mathfrak{R}^{p,q}(W)$ bildet — ein Garbenendomorphismus $\bar\partial: \mathfrak{R}(W) \to \mathfrak{R}(W)$ mit $\bar\partial \circ \bar\partial = 0$. Die Garbe $\mathfrak{R}(W)$ wird gegeben durch das kanonische Garbendatum [11], § 2.2 und 3, bei dem jeder offenen Menge $U \subset X$ der C-Modul $\Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$ der Ströme in U mit Koeffizienten in W und jedem Paar U, V von offenen Mengen von X mit $V \subset U$ der Homomorphismus $r_V^U: \Gamma(U, \mathfrak{R}(W)) \to \Gamma(V, \mathfrak{R}(W))$, der durch Einschränkung der Ströme von U auf V entsteht, zugeordnet wird. Ein Garbenendomorphismus h wird dann gegeben durch ein System $\{h_U\}$ von Endomorphismen $h_U: \Gamma(U, \mathfrak{R}(W)) \to \Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$, für die die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathfrak{R}(W)) & \xrightarrow{h_U} & \Gamma(U, \mathfrak{R}(W)) \\ {\scriptstyle r_V^U}\downarrow & & {\scriptstyle r_V^U}\downarrow \\ \Gamma(V, \mathfrak{R}(W)) & \xrightarrow{h_V} & \Gamma(V, \mathfrak{R}(W)) \end{array}$$

für $V \subset U$ kommutativ sind. $\{\bar\partial_U\}$, $\bar\partial_U: \Gamma(U, \mathfrak{R}(W)) \to \Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$ ist ein solches System. Der Operator $\bar\partial$ in $K(W)$ kann also auch auf die Elemente von $\Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$ angewandt werden und induziert dann einen Endomorphismus von $\Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$. Dies ist für die anderen von uns betrachteten linearen Operatoren in $K(W)$ nicht ohne weiteres der Fall. Zum Beispiel ist $\Box T$ bis jetzt nur für Ströme $T \in K(W) = \Gamma(X, \mathfrak{R}(W))$, nicht aber für $T \in \Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$ definiert. Wir wollen diejenigen linearen Operatoren in $K(W)$ bzw. $A(W)$ charakterisieren, die Garbenendomorphismen von $\mathfrak{R}(W)$ bzw. $\mathfrak{A}(W)$ induzieren.

Definition. Ein linearer Operator L in $K(W)$ bzw. $A(W)$ heißt *lokal*, wenn für alle $T \in K(W)$ bzw. $\omega \in A(W)$ der Träger von LT bzw. $L\omega$ im Träger von T bzw. ω enthalten ist. Dabei versteht man unter dem Träger einer Form $\omega \in A(W)$ die kleinste abgeschlossene Menge in X, außerhalb welcher $\omega = 0$ ist. Der Träger eines Stromes $T \in K(W)$ ist das Komplement der größten

offenen Menge in X, auf welcher $T=0$ ist. Man sagt, ein Strom $T\in K(W)$ sei gleich Null in einer offenen Menge $U\subset X$, wenn $\langle T,\omega\rangle=0$ für jede Form $\omega\in A(W^*)$ mit kompaktem, in U enthaltenem Träger. Da bei dem Antiisomorphismus $\#: A(W)\to A(W^*)$ die Träger erhalten bleiben, kann man statt dessen auch sagen: $T=0$ in U, wenn $(T,\omega)=0$ für jede Form $\omega\in A(W)$ mit kompaktem, in U enthaltenem Träger. Zur Existenz einer größten offenen Menge, auf welcher $T=0$ ist, vgl. [16], S. 40, Theorem 7.

Es gilt: *Genau die lokalen Operatoren definieren Garbenendomorphismen von* $\mathfrak{R}(W)$ *bzw.* $\mathfrak{A}(W)$.

Beweis. Daß diejenigen Operatoren, die Garbenendomorphismen induzieren, lokale Operatoren sind, ist trivial. — Es sei L ein lokaler Operator in $K(W)$ bzw. $A(W)$ und $T\in\Gamma(U,\mathfrak{R}(W))$ bzw. $\omega\in\Gamma(U,\mathfrak{A}(W))$, U offen in X. Wir wählen ein Paar $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in J}$, $\mathfrak{U}'=\{U_i'\}_{i\in J}$ von offenen Überdeckungen von U mit $\overline{U}_i\subset U_i'\subset U$ für $i\in J$ und zu jedem $i\in J$ eine C^∞-Funktion a_i, $a_i=1$ auf U_i und Träger $(a_i)\subset U_i'$. Dann setzen wir $T_i=a_iT$ bzw. $\omega_i=a_i\omega$. Es ist $T_i=T$ bzw. $\omega_i=\omega$ auf U_i und Träger (T_i) bzw. Träger $(\omega_i)\subset U$. Definiert man T_i bzw. $\omega_i=0$ außerhalb U, so erhält man globale Ströme $T_i\in K(W)$ bzw. globale C^∞-Formen $\omega_i\in A(W)$, auf die man daher den Operator L anwenden kann: $LT_i\in K(W)$, $L\omega_i\in A(W)$. Durch $L_UT=LT_i$ bzw. $L_U\omega=L\omega_i$ in U_i wird ein Strom $L_UT\in\Gamma(U,\mathfrak{R}(W))$ bzw. eine C^∞-Form $L_U\omega\in\Gamma(U,\mathfrak{A}(W))$ definiert: $LT_i\in\Gamma(U_i,\mathfrak{R}(W))$, $L\omega_i\in\Gamma(U_i,\mathfrak{A}(W))$, und es ist $LT_i-LT_j=L(T_i-T_j)=0$ in $U_i\cap U_j$, da $T_i-T_j=0$ in $U_i\cap U_j$ und L als lokal vorausgesetzt war. Ebenso ist $L\omega_i-L\omega_j=0$ in $U_i\cap U_j$. L_U ist offenbar ein Endomorphismus von $\Gamma(U,\mathfrak{R}(W))$ bzw. $\Gamma(U,\mathfrak{A}(W))$. Das System $\{L_U\}$, U offen $\subset X$, von Endomorphismen $L_U:\Gamma(U,\mathfrak{R}(W))\to\Gamma(U,\mathfrak{R}(W))$ bzw. $L_U:\Gamma(U,\mathfrak{A}(W))\to\Gamma(U,\mathfrak{A}(W))$ definiert einen Garbenendomorphismus $L:\mathfrak{R}(W)\to\mathfrak{R}(W)$ bzw. $L:\mathfrak{A}(W)\to\mathfrak{A}(W)$.

Ist ein Operator L in $A(W)$ lokal, so gilt dasselbe von seinem adjungierten Operator L' in $K(W)$.

Beweis. Ist $x\notin$ Träger(T), $T\in K(W)$, so gibt es eine Umgebung U_x mit $(T,\omega)=0$ für alle $\omega\in A(W)$, deren Träger in U_x enthalten ist. Dann ist aber auch $(L'T,\omega)=(T,L\omega)=0$ für alle $\omega\in A(W)$ mit Träger $(\omega)\subset U_x$, da Träger $(L\omega)\subset$ Träger(ω). Also ist $x\notin$ Träger$(L'T)$, d.h. Träger $(L'T)\subset$ Träger(T). L' ist somit lokal.

Nun ist der Operator $\bar\partial$ in $A(W)$ lokal, ebenso der Operator $\vartheta=-\widetilde{\#}\,\bar\partial\,\#$ nach obiger Bemerkung über $\#$. Also sind auch die adjungierten Operatoren ϑ und $\bar\partial$ in $K(W)$ lokal. Daraus folgt, daß auch $\square$ *ein lokaler Operator* ist.

Damit lassen sich nun die Fragestellung des Cousinproblems verallgemeinernd die folgenden beiden in [15], S. 67/68 behandelten Probleme der *Konstruktion von Strömen mit gegebenen Singularitäten* auf Ströme mit Koeffizienten in einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W übertragen:

Satz 11. *Ist E eine abgeschlossene Menge in X, $\{U_i\}_{i\in J}$ eine offene Überdeckung von E und $T_i\in\Gamma(U_i,\mathfrak{R}(W))$, so daß $\square T_i=0$ in $U_i\cap CE$ und $\square(T_i-T_j)=0$ in $U_i\cap U_j$, so gibt es genau dann einen globalen Strom $T\in K(W)$*

mit $\square T = 0$ *in* CE *und* $\square(T - T_i) = 0$ *in* U_i, *wenn für* $S = \square T_i$ *in* U_i, $S = 0$ *in* CE, $S \in K(W)$, *es ein* $T \in K(W)$ *mit* $\square T = S$ *gibt. Dafür ist* $\pi_1 S = 0$ *notwendig und hinreichend, und man erhält alle Lösungen in der Form* $T = G S + \omega$, $\omega \in A_1(W)$.

Satz 12. *Ist mit den Bezeichnungen von Satz 11* $T_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{R}(W))$, *so daß* $\bar\partial T_i = \vartheta T_i = 0$ *in* $U_i \cap CE$ *und* $\bar\partial(T_i - T_j) = \vartheta(T_i - T_j) = 0$ *in* $U_i \cap U_j$, *so gibt es genau dann einen globalen Strom* $T \in K(W)$ *mit* $\bar\partial T = \vartheta T = 0$ *in* CE *und* $\bar\partial(T - T_i) = \vartheta(T - T_i) = 0$ *in* U_i, *wenn für* $S_1 = S_2 = 0$ *in* CE *und* $S_1 = \bar\partial T_i$, $S_2 = \vartheta T_i$ *in* U_i, $S_1, S_2 \in K(W)$, *es eine Lösung der Gleichungen* $\bar\partial T = S_1$, $\vartheta T = S_2$ *gibt. Dafür ist* $\pi_1 S_1 = \pi_1 S_2 = 0$ *notwendig und hinreichend, und man erhält alle Lösungen in der Form* $T = G\bar\partial S_2 + G\vartheta S_1 + \omega$, $\omega \in A_1(W)$.

Die Bedingungen $\pi_1 S = 0$ in Satz 11 und $\pi_1 S_1 = \pi_1 S_2 = 0$ in Satz 12 lassen sich mit Hilfe der Dualität und Satz 6 in der Form $\langle S, A_1(W^*)\rangle = 0$ bzw. $\langle S_1, A_1(W^*)\rangle = \langle S_2, A_1(W^*)\rangle = 0$ ausdrücken.

Bemerkung. Satz 12 ist die genaue Verallgemeinerung des Cousinproblems für Formen vom Bigrad $(p, 0)$ auf Formen beliebigen Bigrades (p, q). Für Ströme vom Bigrad $(p, 0)$ ist nämlich stets $\vartheta T = 0$, da ϑ vom Bigrad $(0, -1)$ ist. — Satz 11 und 12 behandeln tatsächlich zwei verschiedene Probleme, denn *nur* für globale Ströme $T \in \Gamma(X, \mathfrak{R}(W)) = K(W)$ gilt $\square T = 0$ dann und nur dann, wenn $\bar\partial T = \vartheta T = 0$. Für $T \in \Gamma(U, \mathfrak{R}(W))$, U offen $< X$, folgt zwar aus $\bar\partial T = \vartheta T = 0$ $\square T = 0$, es gilt aber nicht mehr die Umkehrung.

Für den Fall des trivialen Geradenbündels $W = 1$ ist auch $W^* = 1$. $\#$ ist dann ein Antiisomorphismus von $A(W)$ auf sich. Dadurch erhält man neue Beziehungen. — In obigen Sätzen sind für $W = 1$ die bekannten Ergebnisse über die $\bar\partial$-Cohomologie der gewöhnlichen Formen und Ströme auf X enthalten. Ist X eine Kählersche Mannigfaltigkeit, so stimmt die $\bar\partial$-Cohomologie mit der gewöhnlichen d-Cohomologie überein. Vgl. [18], [21].

5.4. Dualität im Falle dim $X = 1$

Im Falle dim $X = 1$ erhält die in Satz 3, 5.1 angegebene notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von globalen meromorphen p-Formen $(p = 0, 1)$ mit Koeffizienten in W mit vorgegebenen Hauptteilen eine besonders handliche Gestalt. Hier ist in $\langle \overset{p,1}{S}, H^{n-p,n-1}(A(W^*))\rangle = 0$ $H^{n-p,n-1}(A(W^*)) = H^{1-p,0}(A(W)) = H^0(\overset{1-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$ der *Raum der globalen holomorphen* $(1-p)$*-Formen mit Koeffizienten in* W^*.

Gegeben sei ein Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ von X: $\omega_i \in \Gamma(U_i, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$ mit $\delta^0(\overset{p}{\omega})(i, j) = \omega_i - \omega_j = \omega_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$. Dadurch wird ein Schnitt in $\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W)$, also ein Element von $H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ definiert (vgl. § 3.3). Ein solcher kann wegen der Kompaktheit von X nur endlich viele Polstellen $b_1, \ldots, b_m \in X$ besitzen. O.B.d.A. können wir $\mathfrak{U}$ als einem Atlas der Faserstruktur von W zugrunde liegende Überdeckung annehmen mit $b_\mu \in U_{b_\mu}$, $U_{b_1}, \ldots, U_{b_m}$ kurz $U_b \in \mathfrak{U}$ und $U_{b_\nu} \cap U_{b_\mu} = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$. Das

duale Bündel W^* denken wir uns durch den dualen Atlas gegeben. Es sei $b \in W_b \subset U_b$, W_b eine Koordinatenumgebung der komplexen Struktur von X und $b \in V_b$, $\overline{V}_b \subset W_b$ ein Kreis in der lokalen Koordinate. Durch $(\overset{p}{\omega})$ wird in $V_b \subset U_b$ ein r-zeiliger Vektor ω_b gegeben, dessen Komponenten $\omega_b^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, in V_b meromorphe p-Formen (für $p = 0$: Funktionen, für $p = 1$: Differentiale) mit einem Pol höchstens in b sind. Wir setzen $V_0 = X - \{b_1, \ldots, b_m\}$ und $\omega_0 = 0$ in V_0. $\{V_{b_1}, \ldots, V_{b_m}, V_0\}$ ist dann eine Überdeckung von X und $\{\omega_{b_1}, \ldots, \omega_{b_m}, \omega_0\}$, $\omega_b \in \Gamma(V_b, \overset{p}{\mathfrak{M}}(W))$, ein Cousindatum, welches dasselbe Element von $H^0(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)/\overset{p}{\mathfrak{O}}(W))$ wie $(\overset{p}{\omega})$ definiert. Wir können uns daher darauf beschränken, eine Lösung zu $\{\omega_{b_1}, \ldots, \omega_{b_m}, \omega_0\}$ zu suchen. Dazu geben wir gemäß Satz 10 ein System $\overset{p,0}{(T)}$ von Strömen mit Koeffizienten in W an: $T_b = 0$ in V_b, $T_0 = -\sum_b \tilde{\omega}_b$ in V_0 mit $\tilde{\omega}_b = \begin{cases} \omega_b \text{ in } \overline{V}_b \\ 0 \text{ außerhalb } \overline{V}_b \end{cases}$. Die einzelnen Komponenten $\tilde{\omega}_b^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, von $\tilde{\omega}_b$ sind unstetig auf dem Rand von V_b, aber lokal-summierbar in $V_0 \cap W_b$, definieren also Ströme in $V_0 \cap W_b$, gleich 0 außerhalb $\overline{V}_b$, d.h. $\tilde{\omega}_b \in \Gamma(V_0, \mathfrak{R}^{p,0}(W))$ und damit $T_0 \in \Gamma(V_0, \mathfrak{R}^{p,0}(W))$. Es ist $T_{b0} = T_b - T_0 = \tilde{\omega}_b = \omega_b$ in $V_b \cap V_0$, $\{T_{b_1}, \ldots, T_{b_m}, T_0\}$ also ein System $\overset{p,0}{(T)}$ von Strömen mit den gewünschten Eigenschaften. T_0 ist hier tatsächlich ein Strom und nicht aus C^∞. Wie in 5.1 bilden wir nun

$$S = \begin{cases} \bar{\partial} T_b = 0 & \text{in } V_b \\ \bar{\partial} T_0 & \text{in } V_0 \end{cases}, \quad S \in K^{p,1}(W).$$

Für $\varphi \in H^0(\overset{1-p}{\mathfrak{O}}(W^*))$ ist dann mit einer Partition $\{a_i\}$ der Eins zur Überdeckung $\{V_{b_1}, \ldots, V_{b_m}, V_0\} = \{V_i\}$ ($a_i \in C^\infty$, a_i besitzt kompakten Träger $\subset V_i$, $a_i \geqq 0$ und $\sum_i a_i = 1$)

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \sum_i \varphi a_i \rangle = \sum_i \langle S, \varphi a_i \rangle = \langle S, \varphi a_0 \rangle,$$

da Träger $(\varphi a_i) \subset V_i$ und $S = 0$ in V_b. φa_0 besitzt kompakten Träger, enthalten in V_0. Es ist also $\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \varphi a_0 \rangle = \langle \bar{\partial} T_0, \varphi a_0 \rangle = (-1)^{p+1} \langle T_0, \bar{\partial}(\varphi a_0) \rangle$ $= (-1)^{p+1} \langle -\sum_b \tilde{\omega}_b, \bar{\partial}(\varphi a_0) \rangle = (-1)^p \sum_b \langle \tilde{\omega}_b, \bar{\partial}(\varphi a_0) \rangle$. φ wird in dem dualen Atlas von W^* in U_b durch einen r-zeiligen Vektor φ_b dargestellt, dessen Komponenten $\varphi_b^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, in U_b holomorphe $(1-p)$-Formen, d.h. Differentiale ($p = 0$) bzw. Funktionen ($p = 1$) sind. Damit ergibt sich

$$\langle S, \varphi \rangle = (-1)^p \sum_b \langle \tilde{\omega}_b, \bar{\partial}(\varphi a_0) \rangle = (-1)^p \sum_b \int_X \sum_{\varrho=1}^{r} \tilde{\omega}_b^{(\varrho)} \wedge \bar{\partial}(\varphi_b^{(\varrho)} a_0)$$

$$= (-1)^p \sum_b \int_{V_b} \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \wedge \bar{\partial}(\varphi_b^{(\varrho)} a_0) = \sum_b \int_{V_b} \sum_{\varrho=1}^{r} \bar{\partial}(\omega_b^{(\varrho)} \wedge \varphi_b^{(\varrho)} a_0)$$

$$= \sum_b \int_{V_b} \sum_{\varrho=1}^{r} d(\omega_b^{(\varrho)} \wedge \varphi_b^{(\varrho)} a_0) = \sum_b \int_{R d(V_b)} \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \wedge \varphi_b^{(\varrho)},$$

letzteres nach dem Satz von STOKES ($a_0=1$ auf $Rd(V_b)$). $\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \varphi_b^{(\varrho)} = \sum_{\varrho=1}^{r} \overset{p}{\omega}_b^{(\varrho)} \overset{1-p}{\varphi}_b^{(\varrho)}$ ist ein meromorphes Differential in W_b, unabhängig von der gewählten Karte, mit einem Pol höchstens in b. Es ist also $\int_{Rd(V_b)} \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \varphi_b^{(\varrho)} = 2\pi i \operatorname{Res}_b \left(\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \varphi_b^{(\varrho)} \right)$. Schließlich wird

$$\langle S, \varphi \rangle = 2\pi i \sum_b \operatorname{Res}_b \left(\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \varphi_b^{(\varrho)} \right). \tag{9}$$

Satz 3, 5.1, spricht sich hier demnach so aus

Satz 13. *Ist $(\overset{p}{\omega})$ ein Cousindatum mit den Polstellen $b_1, \ldots, b_m$, und beschreibt man um jedes solche b eine hinreichend kleine Umgebung, so daß $(\overset{p}{\omega})$ dort in einer Karte eines Atlanten von W durch den Vektor ω_b mit den Komponenten $\omega_b^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, gegeben wird, so ist für die Lösbarkeit notwendig und hinreichend, daß für jede globale holomorphe $(1-p)$-Form $\varphi \in H^0\left(\overset{1-p}{\mathfrak{D}}(W^*)\right)$, in den dualen Karten durch Vektoren φ_b mit den Komponenten $\varphi_b^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, gegeben,*

$$2\pi i \sum_b \operatorname{Res}_b \left(\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_b^{(\varrho)} \varphi_b^{(\varrho)} \right) = 0 \tag{10}$$

ist. $H^0\left(\overset{1-p}{\mathfrak{D}}(W^*)\right)$ ist endlich dimensional über C. Die Lösbarkeit ist daher gleichbedeutend mit dem Erfülltsein von (10) für eine C-Basis φ_γ, $\gamma = 1, \ldots, g$, von $H^0\left(\overset{1-p}{\mathfrak{D}}(W^*)\right)$. Die Lösungen erhält man dann in der Form (8), Satz 10.

Daß die Bedingung (10) notwendig ist, ist trivial. Für eine globale meromorphe p-Form $\omega \in H^0\left(\overset{p}{\mathfrak{M}}(W)\right)$ und eine globale holomorphe $(1-p)$-Form $\varphi \in H^0\left(\overset{1-p}{\mathfrak{D}}(W^*)\right)$ ist $\omega \wedge \varphi$ ein globales meromorphes Differential auf X und die Summe seiner Residuen daher 0.

Folgerung. Für $W = W^* = 1$ ist $H^0\left(\overset{1-p}{\mathfrak{D}}(1)\right)$ für $p = 0$ der Raum der holomorphen Differentiale auf X: φ_γ, $\gamma = 1, \ldots, g$, $g =$ Geschlecht von X, sei eine C-Basis von $H^0\left(\overset{1}{\mathfrak{D}}(1)\right)$; für $p = 1$ der Raum der holomorphen Funktionen auf X: 1 ist eine C-Basis von $H^0\left(\overset{0}{\mathfrak{D}}(1)\right)$. Man erhält also

für $p = 0$: Zu einem System von Hauptteilen (f_b) zu den Polstellen $b_1, \ldots, b_m$ gibt es genau dann eine globale meromorphe Funktion f mit diesen Hauptteilen, wenn

$$\sum_b \operatorname{Res}_b (f_b \varphi_\gamma) = 0 \quad \text{für} \quad \gamma = 1, \ldots, g. \quad \text{Vgl. [8], S. 30}$$

für $p = 1$: Zu einem System von Hauptteilen (ω_b) für Differentiale zu den Polstellen $b_1, \ldots, b_m$ gibt es genau dann ein meromorphes Differential mit diesen Hauptteilen, wenn

$$\sum_b \operatorname{Res}_b (\omega_b) = 0.$$

Falls die Existenz hinreichend vieler meromorpher Schnitte des Vektorraumbündels W gesichert ist, lassen sich alle Fragen nach Schnitten von W mit gewissen Eigenschaften zurückführen auf Fragen nach Vektoren aus globalen auf X meromorpher Funktionen, die an bestimmten Stellen, multipliziert mit lokalen meromorphen Matrizen, entsprechende Eigenschaften besitzen. In dieser Form findet sich Satz 13 in [22]. Wir erhalten gerade aus Satz 13 Existenzaussagen. Für $W=1$ vgl. [18].

Über eine Formel (9) entsprechende Umformung von $\langle S, \varphi\rangle$ auch bei dim $X>1$ vgl. z.B. [12]. Das $2n$-dimensionale Integral $\langle S, \varphi\rangle$ wird zunächst nach STOKES umgeformt in ein $(2n-1)$-dimensionales Integral über die Oberfläche eines Schlauches um die Polmannigfaltigkeit des Cousindatums. Läßt man diesen Schlauch zusammenschrumpfen, so kann man das letztere Integral ersetzen durch ein $(2n-2)$-dimensionales Integral einer Residuenform erstreckt über die Polmannigfaltigkeit.

5.5. Existenzsätze im Falle dim $X=1$

X sei hier eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1, also eine beliebige, nicht notwendig kompakte Riemannsche Fläche. Wir betrachten den Vektorraum über K, dem Körper der auf X meromorphen Funktionen, der globalen meromorphen Schnitte des Vektorraumbündels W über X. $\mathfrak{f}_\gamma$, $\gamma=1,\ldots,g$, seien solche Schnitte aus $H^0(\mathfrak{M}(W))$. Wir wollen ihre lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit über K untersuchen. In einem Atlas von W zur Überdeckung $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in J}$ werden diese durch r-zeilige (dim $W=r$) Vektoren $\mathfrak{f}_{i,\gamma}$ in U_i dargestellt, deren Komponenten $f_{i,\gamma}^{(\varrho)}$, $\varrho=1,\ldots,r$, Elemente der Körper K_i der in U_i meromorphen Funktionen sind. Es sei eine offene Menge U enthalten in U_{i_0} und $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$ die Einschränkung von $\mathfrak{f}_{i_0,\gamma}$ auf U. Die $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$ sind Vektoren aus Elementen von K_U, dem Körper der in U meromorphen Funktionen. Es gilt

Hilfssatz 1. *Die $\mathfrak{f}_\gamma\in H^0(\mathfrak{M}(W))$, $\gamma=1,\ldots,g$, sind genau dann linear abhängig bzw. unabhängig über K, wenn die ihnen zugeordneten $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$, $\gamma=1,\ldots,g$, linear abhängig bzw. unabhängig über K_U sind.*

Beweis. Daß aus der linearen Abhängigkeit der $\mathfrak{f}_\gamma$ über K die lineare Abhängigkeit der $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$ über K_U folgt, ist trivial. — Zur Umkehrung bemerkt man zunächst: 1. Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$ über K_U, kurz über U, ist mit linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{i_0,\gamma}$ über U_{i_0} gleichbedeutend. Dies läßt sich nämlich durch das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden von Unterdeterminanten der aus den Vektoren $\mathfrak{f}_{U,\gamma}$ und $\mathfrak{f}_{i_0,\gamma}$, $\gamma=1,\ldots,g$, gebildeten Matrizen ausdrücken. 2. Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{i,\gamma}$ über U_i ist, falls $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, mit linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{i,\gamma}$ über U_j gleichbedeutend. In $U_i\cap U_j$ ist nämlich $\mathfrak{f}_{i,\gamma}=g_{ij}\mathfrak{f}_{j,\gamma}$ und g_{ij} ist nichtsingulär. Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{j,\gamma}$ über $U_i\cap U_j$ ist demnach mit linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{i,\gamma}$ über $U_i\cap U_j$ gleichbedeutend. Die Behauptung folgt dann nach 1. mit $U=U_i\cap U_j$. — Mit 1. und 2. folgt, da X

zusammenhängend ist, aus der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{U,\nu}$ in U die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der $\mathfrak{f}_{i,\nu}$ in U_i für alle $i \in J$. Sind die $\mathfrak{f}_{U,\nu}$ nun linear abhängig über U, dann läßt sich eines von ihnen, z.B. $\mathfrak{f}_{U,1}$, durch eine Anzahl über U linear unabhängiger $\mathfrak{f}_{U,\nu}$, z.B. $\mathfrak{f}_{U,2}, \mathfrak{f}_{U,3}, \ldots, \mathfrak{f}_{U,k}$, in der Form $\mathfrak{f}_{U,1} = a_{U,2}\,\mathfrak{f}_{U,2} + \cdots + a_{U,k}\,\mathfrak{f}_{U,k}$, $a_{U,2}, \ldots, a_{U,k} \in K_U$, ausdrücken. Es gilt dann für jedes $i \in J$: $\mathfrak{f}_{i,2}, \mathfrak{f}_{i,3}, \ldots, \mathfrak{f}_{i,k}$ sind linear unabhängig über U_i und $U_i \cap U_j = \emptyset$ und $\mathfrak{f}_{i,1}, \mathfrak{f}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{f}_{i,k}$ sind linear abhängig über U_i und $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Für jedes $i \in J$ hat man daher eine Darstellung $\mathfrak{f}_{i,1} = a_{i,2}\,\mathfrak{f}_{i,2} + \cdots + a_{i,k}\,\mathfrak{f}_{i,k}$, $a_{i,2}, \ldots, a_{i,k} \in K_i$. In $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ folgt aus $\mathfrak{f}_{j,1} = a_{j,2}\mathfrak{f}_{j,2} + \cdots + a_{j,k}\mathfrak{f}_{j,k}$ durch Multiplikation von links mit g_{ij} $\mathfrak{f}_{i,1} = a_{j,2}\,\mathfrak{f}_{i,2} + \cdots + a_{j,k}\mathfrak{f}_{i,k}$. In $U_i \cap U_j$ ist aber auch $\mathfrak{f}_{i,1} = a_{i,2}\,\mathfrak{f}_{i,2} + \cdots + a_{i,k}\,\mathfrak{f}_{i,k}$. $\mathfrak{f}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{f}_{i,k}$ sind in $U_i \cap U_j$ linear unabhängig, woraus $a_{i,2} = a_{j,2}, \ldots, a_{i,k} = a_{j,k}$ in $U_i \cap U_j$ folgt. Durch die $a_{i,2}, \ldots, a_{i,k} \in K_i$ werden also globale meromorphe Funktionen $a_2, \ldots, a_k \in K$ definiert, und es ist $\mathfrak{f}_1 = a_2\mathfrak{f}_2 + \cdots + a_k\mathfrak{f}_k$, d.h. die $\mathfrak{f}_\nu$ sind linear abhängig über K, was gerade zu zeigen war.

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich sofort: Die Dimension von $H^0(\mathfrak{M}(W))$ über K ist $\leqq r$, da der Raum der r-zeiligen Vektoren $\mathfrak{f}_U$ aus Elementen von K_U über K_U die Dimension r hat.

Hilfssatz 2. *Gibt es zu einem festen Punkt $x_0 \in X$ und dort beliebig vorgegebenen Hauptteilen Elemente aus $H^0(\mathfrak{M}(W))$ mit diesen Hauptteilen, so ist* $\dim(H^0(\mathfrak{M}(W))) = r$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es für $x_0 \in U_{i_0} \in \mathfrak{U}$ Schnitte $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_r \in H^0(\mathfrak{M}(W))$, so daß für die sie in U_{i_0} darstellenden Vektoren $\mathfrak{f}_{i_0,1}, \mathfrak{f}_{i_0,2}, \ldots, \mathfrak{f}_{i_0,r}$ mit den Komponenten $f_{i_0,1}^{(\varrho)}, \ldots, f_{i_0,r}^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, gilt $w_{x_0}(f_{i_0,\nu}^{(\varrho)}) = -1$ für $\nu = \varrho$ und $w_{x_0}(f_{i_0,\nu}^{(\varrho)}) \geqq 0$ für $\nu \neq \varrho$, wo $w_{x_0}(f)$ die Ordnung der Funktion f in x_0 bezeichnet. Für $a_{i_0,\nu} \in K_{i_0}$, $\nu = 1, \ldots, r$, gilt dann, wenn

$$\operatorname*{Min}_{\nu=1,\ldots,r}\left(w_{x_0}(a_{i_0,\nu})\right) = w_{x_0}(a_{i_0,\nu_0}), \quad w_{x_0}\Big(\sum_{\nu=1}^{r} a_{i_0,\nu} f_{i_0,\nu}^{(\nu_0)}\Big) = w_{x_0}(a_{i_0,\nu_0} f_{i_0,\nu_0}^{(\nu_0)}),$$

also $\sum_{\nu=1}^{r} a_{i_0,\nu} f_{i_0,\nu}^{(\nu_0)} \neq 0$. Die $\mathfrak{f}_{i_0,1}, \ldots, \mathfrak{f}_{i_0,r}$ sind folglich linear unabhängig über U_i, und nach Hilfssatz 1 gilt dasselbe dann von den $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ über K.

Da eine nicht kompakte Riemannsche Fläche X stets eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist, folgt aus Theorem B, § 3.4, mit Hilfssatz 2

Satz 14. *Für nichtkompaktes X ist* $\dim_K(H^0(\mathfrak{M}(W))) = r$.

Bemerkung. Satz 14 gilt auch für $\dim X > 1$, falls X eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist. Er folgt unmittelbar aus Theorem A, § 3.4.*)

Für *kompaktes* X gilt

Satz 15. *Man kann die Hauptteile für Elemente aus $H^0(\mathfrak{M}(W))$ an allen Stellen von X mit Ausnahme einer einzigen x_0 beliebig vorschreiben.*

Es gibt also zu endlich vielen vorgegebenen Polstellen $b_1, \ldots, b_m \neq x_0$ und dort beliebig vorgegebenen Hauptteilen stets globale meromorphe Schnitte

*) *Zusatz bei der Korrektur:* Vgl. Röhrl, H.: Einige Bemerkungen über komplex-analytische Vektorraumbündel. Arch. Math. **8**, 360–367 (1957).

von W, die mit Ausnahme der Stellen $b_1, \ldots, b_m, x_0$ holomorph sind und in $b_1, \ldots, b_m$ die vorgegebenen Hauptteile besitzen. Speziell gibt es meromorphe Schnitte aus $H^0(\mathfrak{M}(W))$, die an allen Stellen mit Ausnahme einer einzigen x_0 holomorph sind. x_0 kann dabei beliebig gewählt werden.

Der Beweis von Satz 15 ergibt sich aus Satz 13, 5.4: Wir nehmen dazu ein Cousindatum $(\overset{p}{\omega})$ mit den Polstellen $b_1, \ldots, b_m, x_0$, den in $b_1, \ldots, b_m$ vorgeschriebenen Hauptteilen ω_b und *noch unbestimmtem Hauptteil* ω_{x_0}. Es ist dann nach Satz 13 nur noch zu zeigen, daß sich ω_{x_0} so bestimmen läßt, daß

$$2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{x_0}\left(\sum_{\varrho=1}^{r}\omega_{x_0}^{(\varrho)}\varphi_{x_0,\gamma}^{(\varrho)}\right)+\sum_{b}\operatorname*{Res}_{b}\left(\sum_{\varrho=1}^{r}\omega_{b}^{(\varrho)}\varphi_{b,\gamma}^{(\varrho)}\right)\right]=0$$

ist für $\gamma=1,\ldots,g$, φ_γ eine Basis von $H^0(\overset{1}{\mathfrak{O}}(W^*))$ über C. — In einer Ortsuniformisierenden $t(x)$ in U_{x_0}, $t(x_0)=0$, besitzen die Differentiale $\varphi_{x_0,\gamma}^{(\varrho)}$, $\varrho=1,\ldots,r$, Entwicklungen $\varphi_{x_0,\gamma}^{(\varrho)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\nu,\gamma}^{(\varrho)}t^\nu\,dt$ in U_{x_0}, $a_{\nu,\gamma}^{(\varrho)}\in C$. Die Hauptteile der Komponenten von ω_{x_0} setzen wir mit unbestimmten Koeffizienten $x_\nu^{(\varrho)}$ an: $\omega_{x_0}^{(\varrho)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_{\nu-1}^{(\varrho)}t^{-\nu}$, $\varrho=1,\ldots,r$. Mit $\sum_b\operatorname*{Res}_b\left(\sum_{\varrho=1}^{r}\omega_b^{(\varrho)}\varphi_{b,\gamma}^{(\varrho)}\right)=c_\gamma\in C$ lauten dann obige Bedingungen für ω_{x_0}:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\varrho=1}^{r}a_{\nu,\gamma}^{(\varrho)}x_\nu^{(\varrho)}\right)+c_\gamma=0,\qquad\gamma=1,\ldots,g. \tag{11}$$

Dies ist ein System von γ linearen Gleichungen für die Unbekannten $x_\nu^{(\varrho)}$. Wir haben jetzt nur zu zeigen, daß dieses Lösungen mit $x_\nu^{(\varrho)}=0$ für $\nu\geqq N$, N hinreichend groß, besitzt. Letzteres erkennt man so: Die ∞-reihigen Zeilenvektoren aus komplexen Zahlen

$$\mathfrak{a}_\gamma=(a_{0,\gamma}^{(1)},a_{0,\gamma}^{(2)},\ldots,a_{0,\gamma}^{(r)},a_{1,\gamma}^{(1)},\ldots,a_{1,\gamma}^{(r)},\ldots,a_{\nu,\gamma}^{(1)},\ldots,a_{\nu,\gamma}^{(r)},\ldots),$$

$\gamma=1,\ldots,g$, sind über C linear unabhängig. (Aus $\sum_{\gamma=1}^{g}d_\gamma\mathfrak{a}_\gamma=0$, $d_\gamma\in C$, nicht alle $d_\gamma=0$, würde nämlich $\sum_{\gamma=1}^{g}d_\gamma\varphi_{x_0,\gamma}^{(\varrho)}=0$ in U_{x_0}, $\varrho=1,\ldots,r$, folgen, also $\sum_{\gamma=1}^{g}d_\gamma\varphi_{x_0,\gamma}=0$ in U_{x_0}. Daraus würde sich aber wie in Hilfssatz 1 $\sum_{\gamma=1}^{g}d_\gamma\varphi_\gamma=0$, $d_\gamma\in C$, ergeben, d.h. die φ_γ wären linear abhängig über C.) Das lineare Gleichungssystem (11) bringt man nun durch Addition von mit passenden komplexen Zahlen multiplizierten Gleichungen des Systems zu anderen Gleichungen auf ein (11) äquivalentes *Stufensystem* der Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\varrho=1}^{r}\bar a_{\nu,\gamma}^{(\varrho)}x_\nu^{(\varrho)}\right)+\bar c_\gamma=0,\quad\gamma=1,\ldots,g,\quad\text{mit}\quad(\nu_1,\varrho_1)<(\nu_2,\varrho_2)<\cdots<(\nu_g,\varrho_g)$$

(lexikographische Anordnung!), $\bar a_{\nu,1}^{(\varrho)}=0$ für $(\nu,\varrho)<(\nu_1,\varrho_1)$ und $\bar a_{\nu_1,1}^{(\varrho_1)}\neq 0$, $\bar a_{\nu,2}^{(\varrho)}=0$ für $(\nu,\varrho)<(\nu_2,\varrho_2)$ und $\bar a_{\nu_2,2}^{(\varrho_2)}\neq 0,\ldots,\bar a_{\nu,\gamma}^{(\varrho)}=0$ für $(\nu,\varrho)<(\nu_\gamma,\varrho_\gamma)$ und $\bar a_{\nu_\gamma,\gamma}^{(\varrho_\gamma)}\neq 0,\ldots,\bar a_{\nu,g}^{(\varrho)}=0$ für $(\nu,\varrho)<(\nu_g,\varrho_g)$ und $\bar a_{\nu_g,g}^{(\varrho_g)}\neq 0$. Daß man ein solches Stufensystem tatsächlich erreichen kann, ergibt sich aus der linearen Unab-

hängigkeit der Vektoren a_γ, $\gamma = 1, \ldots, g$. Dieses System kann man aber durch für $(\nu, \varrho) > (\nu_g, \varrho_g)$ beliebig gewählte und für $(\nu, \varrho) \leqq (\nu_g, \varrho_g)$ dann von unten nach oben aus den Gleichungen berechnete $x_\nu^{(\varrho)}$ befriedigen, speziell also durch $x_\nu^{(\varrho)}$ mit $x_\nu^{(\varrho)} = 0$ für $\nu \geqq N$, N etwa gleich $\nu_g + 2$.

Mit Hilfssatz 2 ergibt sich aus Satz 15

Satz 16. *Für kompaktes X ist* $\dim_K \left(H^0(\mathfrak{M}(W))\right) = r$.

Bemerkung. Satz 16 gilt auch für dim $X > 1$, falls X *algebraisch* ist. Er folgt z.B. aus den Ergebnissen von SERRE [20], Lemma 8, S. 24. Vgl. auch [14]*).

r über K linear unabhängige meromorphe Schnitte $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r \in H^0(\mathfrak{M}(W))$ werden in einem Atlas von W zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ durch meromorphe Vektoren $\mathfrak{f}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{f}_{i,r}$ in U_i, $i \in J$, dargestellt, die in U_i linear unabhängig sind. Bildet man aus diesen die Matrizen $\mathfrak{F}_i = (\mathfrak{f}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{f}_{i,r})$, so erhält man nichtsinguläre meromorphe Matrizen $\mathfrak{F}_i$ in U_i mit $\mathfrak{F}_i = g_{ij}\mathfrak{F}_j$ in $U_i \cap U_j$, $g_{ij} \in GL(r, C)$ die Koordinatentransformationen des Atlanten von W. Die Matrizen $\mathfrak{F}_i$ stellen also in diesem Atlas einen *meromorphen Schnitt im W assoziierten $GL(r, C)$-Hauptfaserraum H* dar. Dieser Schnitt ist „fast überall" holomorph umkehrbar, woraus sich ergibt, daß H und damit auch W „fast überall" trivial ist.

Für nichtkompaktes X und dim $X = 1$ ist jeder $GL(r, C)$-Hauptfaserraum H über X trivial (vgl. [14]). Mit Hilfe von Theorem A, § 3.4, kann man dies so zeigen: Nach Theorem A angewandt auf $\mathfrak{G} = \mathfrak{O}(W)$, wo W das zu H assoziierte Vektorraumbündel (dim $W = r$) bezeichnet, gibt es sogar r über K linear unabhängige *holomorphe* Schnitte von W. Aus diesen setzt man, wie eben beschrieben, einen meromorphen Schnitt von H zusammen, der nun zwar noch kein holomorpher Schnitt in H ist, da er zwar überall holomorph, nicht jedoch überall holomorph umkehrbar ist. Die Nullstellen der Determinanten $|\mathfrak{F}_i|$ lassen sich jedoch mit Hilfe bekannter Existenzsätze über Funktionen auf nichtkompakten Riemannschen Flächen (vgl. z.B. [1], S. 555 ff.) durch Multiplikation der $\mathfrak{F}_i$, $i \in J$, von rechts mit globalen Matrizen auf X ähnlich wie in [14], S. 12 ff. leicht wegschaffen. Man erhält so einen holomorphen Schnitt in H, der zeigt, daß H und damit auch W trivial ist.

Aus diesen Ergebnissen über komplex-analytische Vektorraumbündel W über einer beliebigen Riemannschen Fläche X erhält man mit den Sätzen aus § 2.4 für Riemannsche Klassen R über X die

Folgerungen. 1. *Für eine beliebige Riemannsche Klasse R über X gilt der Existenzsatz, § 1.3.*

2. *Zu einer beliebigen Punktmenge $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset X$ der in § 1.2 beschriebenen Art und beliebiger Monodromie gibt es Fuchssche Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren wesentlich singuläre Stellen in $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ enthalten sind, mit dieser Monodromie.*

3. *Ebenso gibt es Systeme von Fuchsschen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit diesen Eigenschaften. Vgl. § 2.2.*

*) *Zusatz bei der Korrektur:* Vgl. RÖHRL, H.: Einige Bemerkungen über komplex-analytische Vektorraumbündel. Arch. Math. **8**, 360–367 (1957).

4. Der Existenzsatz aus 1. angewandt auf algebraische Klassen (§ 1.3) ergibt: Ist X' eine relativ zur Riemannschen Fläche X verzweigte, unbegrenzte und q-blättrige Überlagerungsfläche von X, K' der Körper der auf X' meromorphen Funktionen, so besitzt K' den Grad q über K, dem Körper der auf X meromorphen Funktionen.

Literatur

[1] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin: Springer 1955. — [2] BOURBAKI, N.: Livre V, Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann 1953. — [3] CARTAN, H.: Séminaire ENS, 1950—51. — [4] CARTAN, H.: Séminaire ENS, 1951—52. — [5] CARTAN, H.: Séminaire ENS, 1953—54. — [6] CARTAN, H., et J. P. SERRE: Un théorèm de finitude concernant les variétés analytiques compactes. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 128—130 (1953). — [7] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Colloque de Bruxelles 1953, 41—55. — [8] CHEVALLEY, C.: Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. Amer. Math. Soc. 1951. — [9] DOLBEAULT, P.: Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 175—177 (1953). — [10] GROTHENDIECK, A.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux. Bull. Soc. Math. France **84**, 1—7 (1956). — [11] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebn. der Math. **9** (1956). — [12] KAWADA, Y.: On analytic line bundles with the affine structural group. Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo **4**, 85—91 (1954). — [13] NICKERSON, H. K., and D. C. SPENCER: Differentiable manifolds and Sheaves, Princeton. Ann. of Math. Studies (erscheint demnächst). — [14] RÖHRL, H.: Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. **133**, 1—25 (1957). — [15] RHAM, G. DE, et K. KODAIRA: Harmonic Integrals. Inst. of Ad. Study, Princeton 1950. — [16] RHAM, G. DE: Variétés différentiables. Paris: Hermann 1955. — [17] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. I—II. Paris: Hermann 1950, 1951. — [18] SCHWARTZ, L.: Lectures on complex analytic manifolds. Tata Inst. of fundamental Research, Bombay 1955. — [19] SERRE, J. P.: Un théorèm de dualité. Comm. Math. Helv. **29**, 9—26 (1955). — [20] SERRE, J. P.: Géometrié algébrique et géometrié analytique. Ann. Institut Fourier **6**, 1—42 (1955—56). [21] SPENCER, D. G.: A complex tensor calculus for Kähler manifolds. Acta Math. **89**, 279—331 (1953). — [22] WEIL, A.: Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. pures et appl., Paris **1938**, 47—87. — [23] WEIL, A.: Fibre spaces in algebraic geometry. Chicago: Univ. of Chicago 1952.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

BUTZER P. L.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 93–112 (1958)

Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren

Von
PAUL L. BUTZER

1. Die Fragestellung

Zu einer gegebenen integrierbaren Funktion $x(t)$, definiert auf einem Intervall (a, b), das endlich oder unendlich sein kann, betrachten wir in dieser Arbeit[1]) die folgenden Integraloperatoren:

A. FEJÉR:

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} x(t+u) \left[\frac{\sin(n+1)u/2}{\sin u/2}\right]^2 du \qquad (n \to \infty),$$

B. ABEL-POISSON:

$$\sigma(t; r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t+u) \frac{(1-r^2)}{1-2r\cos u + r^2} du \qquad (r \to 1-),$$

C. DE LA VALLÉE-POUSSIN:

$$V_n(t) = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t+u) \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \qquad (n \to \infty),$$

D. STIELTJES-LANDAU:

$$S_n(t) = \frac{(2n+1)(2n-1)\dots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-t}^{1-t} x(t+u)\,[1-u^2]^n\, du \qquad (n \to \infty),$$

E. POISSON-CAUCHY:

$$p(t; \xi) = \frac{\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+u)}{u^2+\xi^2}\, du \qquad (\xi \to 0+),$$

F. GAUSS-WEIERSTRASS[2]):

$$W(t; \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u)\, e^{-u^2/\xi}\, du \qquad (\xi \to 0+),$$

---

[1]) Vorträge über diese Arbeit wurden in einem gemeinsamen Kolloquium der Universität Zürich und der Eidg. Techn. Hochschule am 4. Juni 1957 sowie an der Universität Basel am 16. Dezember 1957 gehalten.

[2]) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der Weierstraßsche Kern als die normale (Gaußsche) Dichte und der Poissonsche Kern (im Integral E) als die Cauchysche Dichte bekannt. Beide sind Sonderfälle der stabilen Dichte (loi stable), die PAUL LÉVY eingeführt hat. Das singuläre Integral, das mit dieser stabilen Dichte konstruiert wird, enthält die Integrale E und F. Es ist auch ein Halbgruppenoperator. Siehe hierzu FELLER [14] mit dortiger Literaturangabe.

G. LAGUERRE:

$$l(t;r)=\frac{1}{1-r}\int_0^\infty x(u)\exp\left\{-\frac{1}{2}(t+u)\frac{1+r}{1-r}\right\}J_0\left(\frac{2\sqrt{-utr}}{1-r}\right)du \qquad (r\to 1-),$$

wo $J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n!)^{-2}(t/2)^{2n}$, die Besselsche Funktion vom Index Null ist,

H. HERMITE:

$$h(t;r)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\exp\left\{\frac{t^2-u^2}{2}-\frac{(t-ru)^2}{1-r^2}\right\}du \qquad (r\to 1-),$$

I. JACKSON-DE LA VALLÉE-POUSSIN:

$$J_{2n}(t)=\frac{3}{2\pi(n+1)(2n^2+4n+3)}\int_{-\pi}^{\pi}x(t+u)\left[\frac{\sin(n+1)u/2}{\sin u/2}\right]^4du \qquad (n\to\infty),$$

J. ROGOSINSKI:

$$R_n(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t+u)\cos nu\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)}\right]du \qquad (n\to\infty),$$

K. PICARD:

$$P(t;\xi)=\frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+u)\,e^{-|u|/\xi}\,du \qquad (\xi\to 0+),$$

L. Für[3]) $p>0$:

$$L(t;\xi;p)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)}\frac{1}{\xi^{1/p}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+u)\,e^{-|u|^p/\xi}\,du \qquad (\xi\to 0+).$$

Diese singulären Integrale (außer G und H) kann man allgemein folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{J}^x(t;\zeta)=\int_a^b x(t+u)\,K(u;\zeta)\,du.$$

Dabei ist $K(u;\zeta)$, $a\leqq u\leqq b$, der „Kern" des Integrals, eine nichtnegative Funktion in u, die von dem Parameter $\zeta>0$ abhängt. (In den obigen

[3]) Dieses Integral geht für $p=2$ in das Integral F und für $p=1$ in K über. Für unsere Zwecke ist dieses Integral besonders für $0<p<1$ interessant. Es ist zu bemerken, daß Herr A. OSTROWSKI [23] ein ähnlich aussehendes Integral eingeführt hat. Im eindimensionalen Raum lautet dies:

$$A(t;\xi)=\frac{1}{2\xi^2\Gamma(\xi)}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+u)\,e^{-(|u|/\xi)^{1/\xi}}\,du \qquad (\xi\to 0+).$$

Besonders interessante Eigenschaften hat das entsprechende Integral im m-dimensionalen Raum ($m>1$).

Beispielen wird ζ als n, r oder ξ gewählt.) Falls $x(t) \in L_1(a, b)$ ist, dann existiert $\Im^x(t;\zeta)$ (kürzer $\Im(t;\zeta)$) für fast alle t in (a, b) und alle $\zeta > 0$ und $\Im(t;\zeta) \in L_1(a, b)$. Für die Norm im Raume L_1 der $\Im(t;\zeta)$ gilt:

$$\|\Im(t;\zeta)\|_1 \leqq M \|x\|_1. \tag{1.1}$$

In den angeführten Beispielen ist immer $M = 1$, außer für die Integrale G mit $M = 2$ und H mit $M = 2$. Dabei ist das M für die Integrale G und H durch eine Beziehung definiert, die analog zu (1.1) ist (s. z.B. [*11*, S. 160]).

Falls $x(t) \in L_1(a, b)$ ist, ist den Integralen B, C und D die Eigenschaft gemeinsam, daß für $\zeta \to 0+$ die $\Im(t;\zeta)$ gegen $x(t)$ streben an jedem Punkt t mit $\int_t^{t+h} [x(u) - x(t)]\, du = o(h)$, $h \to 0$, d.h. für fast alle t in (a, b). (Diese Punkte t sind die sog. „d-Punkte".) Dies folgt z.B. als Anwendung allgemeiner Sätze (HARDY [*17*], S. 359, NATANSON [*21*], S. 301). Im Gegensatz dazu gilt für die Integrale A und E bis K, daß die entsprechenden $\Im(t;\zeta)$ gegen $x(t)$ nur an den Punkten t konvergieren, für die $\int_t^{t+h} |x(u) - x(t)|\, du = o(h)$, $h \to 0$ gilt. [Auch das sind fast alle t in (a, b); diese t sind die sog. „Lebesgue-Punkte".] Für die Integrale A, I und J folgt dies wieder aus Sätzen in HARDY [*17*]. Für die Integrale E, F, G, H, K und L ist ein Satz von TITCHMARSH [*29*, S. 28] (oder DUNFORD-SCHWARTZ [*13*]) brauchbar. $\Im(t;\zeta)$ strebt für die Integrale A bis L gegen $x(t)$ sogar im Sinne der Norm[4]) der Räume $C[a, b]$, bzw. $L_p(a, b)$ $1 \leqq p < \infty$.

Wir werfen folgende drei Fragen auf:

I. *Aus den strukturellen Eigenschaften einer Funktion $x(t)$ (z.B. einer Lipschitz-Bedingung) ist die Abnahmegeschwindigkeit der Differenz zwischen $\Im(t;\zeta)$ und $x(t)$ im Raume $C[a, b]$ oder $L_p(a, b)$ abzuschätzen.*

II. *Aus dem Verhalten der Differenz von $\Im(t;\zeta)$ und $x(t)$ im Raume $C[a, b]$ oder $L_p(a, b)$ sind Folgerungen über die Struktur der Funktion zu ziehen.*

III. *Es ist die Klasse derjenigen Funktionen zu untersuchen, die genau den bestmöglichen Grad der Approximation von $x(t)$ durch die $\Im(t;\zeta)$ angeben.*

Sätze, welche die Frage I beantworten, sind die bekannten „*direkten*" Sätze, während die „*Umkehrsätze*" Frage II betreffen; beide Arten sind allgemein bekannt in der Approximationstheorie.

In dieser Arbeit untersuchen wir, wie weit es zur Zeit möglich ist, Antworten auf alle drei Fragen für die angegebenen Integrale zu geben. Die bisher bekanntesten Resultate bezüglich Frage I und II, die von vielen Autoren stammen, werden erst kurz zusammengefaßt. Frage II (sowie Frage III) für die Integrale A und I haben ALEXITS [*1*] und ZAMANSKY [*32*] beantwortet. Fragen II und III für die Integrale B, E, F, G und H sind in den Arbeiten [*9*], [*10*], [*11*] des Verf. betrachtet. Das wesentliche in diesen Arbeiten ist der Gebrauch der Halbgruppentheorie, wodurch die Fragestellung III unter

[4]) Zum Beispiel für die Integrale A, B ist diese Tatsache in ZYGMUND [*34*] enthalten, für D in SANSONE [*28*], für E, F, K und L in HILLE [*18*], für G und H in BUTZER [*11*].

einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht wird. So stehen noch die singulären Integrale C, D, J, K und L zur Diskussion. Lineare Kombinationen des Integrals $P(t;\xi)$ werden untersucht. Schließlich betrachten wir das Integral $L(t;\xi;p)$, das im Vergleich mit den anderen Integralen für festes $0<p<1$ einen sehr guten Approximationsgrad gegen $x(t)$ gibt (von der Ordnung $O(\xi^{2/p})$, $\xi\to 0+$, falls $x''(t)\in C[-\infty,+\infty]$).

2. Zusammenhang der Probleme

Um unsere Aufgabe III klarer zu formulieren, betrachten wir den Begriff der Saturationsklasse eines singulären Integrals. Damit man ihn einführen kann, muß das zur Diskussion stehende Integral $\mathfrak{J}(t;\zeta)$ gegen $x(t)$ einen bestmöglichen Approximationsgrad besitzen, derart daß keine Verbesserung der strukturellen Eigenschaften der Funktion zu einer Erhöhung des Approximationsgrades führt[5]). Man definiert:

Existiert eine mit ζ gegen Null strebende, monoton fallende Funktion $\varphi^3(\zeta)$, so daß $\mathfrak{D}(t;\zeta)=\|\mathfrak{J}(t;\zeta)-x(t)\|$ niemals von der Ordnung $o[\varphi^3(\zeta)]$ ist [außer wenn $x(t)$ invariant unter dem Integral ist] und gibt es nichtinvariante Funktionen $x(t)$, für die $\mathfrak{D}(t;\zeta)$ von der Ordnung $O[\varphi^3(\zeta)]$ ist, dann nennt man das Integral $\mathfrak{J}(t;\zeta)$ *saturiert*. Die Klasse derjenigen Funktionen $x(t)$, die genau den Grad $O[\varphi^3(\zeta)]$ besitzen, heißt die *Saturationsklasse* des Integrals.

Als erstes Beispiel bezüglich unserer drei Fragen betrachten wir das Integral von Fejér. Hierfür sind vollständige Antworten auf die drei Fragen für die Räume $C[-\pi,\pi]$ und $L_p(-\pi,\pi)$, $1\leqq p<\infty$ der periodischen Funktionen bekannt. Gehört nämlich $x(t)$ zu Lip α, $0<\alpha<1$, so gilt $\|\sigma_n(t)-x(t)\|_C=O(n^{-\alpha})$; für $\alpha=1$ gilt $\|\sigma_n(t)-x(t)\|_C=O(n^{-1}\log n)$, falls $x(t)\in$ Lip 1. Umgekehrt gilt, falls $\|\sigma_n(t)-x(t)\|_C=O(n^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$ ist, $x(t)\in$ Lip α[6]). Der Fall $\alpha=1$ ist ein Sonderfall. ALEXITS [1] und ZAMANSKY [32] zeigten, daß $\|\sigma_n(t)-x(t)\|_C=O(n^{-1})$ dann und nur dann gilt, wenn $\tilde{x}(t)\in$ Lip 1 ist, wo

$$\tilde{x}(t)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[x(t+u)-x(t-u)]\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,du.$$

Falls $\|\sigma_n(t)-x(t)\|_C=o(n^{-1})$ ist, gilt $x(t)=$const.

Mit anderen Worten: Die Saturationsklasse des Integrals $\sigma_n(t)$ im Raume $C[-\pi,\pi]$ ist die Menge derjenigen Funktionen $x(t)$, für die $\tilde{x}(t)\in$ Lip 1 ist; der bestmögliche Approximationsgrad ist $O(n^{-1})$ und die invarianten Elemente sind die Konstanten. Kurz geschrieben:

$$(2.1)\qquad S.Kl.\ [\sigma_n(t)]_C=\{x(t)\,|\,\tilde{x}(t)\in Lip\ 1\},$$

$$(2.2)\qquad S.Kat.\ [\sigma_n(t)]_C=\{x(t)\,|\,\tilde{x}(t)\in Lip\ 1;\ O(n^{-1});\ Konstanten\}.$$

[5]) Gegenbeispiel: Das singuläre Integral von DIRICHLET $s_n(t)$ besitzt die Eigenschaft, daß falls die p-te Ableitung $x^{(p)}(t)\in$ Lip 1 ist, folgt: $|s_n(t)-x(t)|=O[n^{-(p+1)}\log n]$; dies gilt für $p=1,2,\ldots$. Hier führen höhere Ableitungen zu größerer Approximationsgenauigkeit: Das Dirichletsche Integral besitzt keine Saturationsklasse.

[6]) Dies folgt sofort aus einem allgemeinen Satz von BERNSTEIN [22, S. 89].

Dabei bedeutet *S.Kl.* die *Saturationsklasse* und *S.Kat.* die *Saturationskategorie* des Integrals.

Entsprechende Resultate für den Raum $L_p(-\pi, \pi)$ sind in [*1*] bewiesen[7]).

Für die trigonometrischen Polynome von der Ordnung $2n$ in t, die Jackson in seiner Dissertation eingeführt hat, die aber erst de la Vallée-Poussin zur vollen Geltung gebracht hat, ist folgendes bekannt: Falls $x(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$ folgt, daß $\|J_{2n}(t) - x(t)\|_C = O(n^{-\alpha})$ und für $x'(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$ gilt $\|J_{2n}(t) - x(t)\|_C = O(n^{-1-\alpha})$ (DE LA VALLÉE-POUSSIN [*30*], S. 46). Umgekehrt folgt, falls $\|J_{2n}(t) - x(t)\|_C = o(n^{-2})$, daß $x(t)$ eine Konstante ist ([*32*], S. 57). Notwendig und hinreichend dafür, daß $x'(t) \in \mathrm{Lip}\,1$ ist, ist daß $\|J_{2n}(t) - x(t)\|_C = O(n^{-2})$ gilt [*32*]. Folglich haben wir:

$$S.Kat.\ [J_{2n}(t)]_C = \{x(t) \mid x'(t) \in Lip\,1;\ O(n^{-2});\ Konstanten\}.$$

Im Raume $L_p(-\pi, \pi)$ sind Resultate hierfür zur Zeit unbekannt. Es ist zu bemerken, daß die $J_{2n}(t)$ im günstigsten Fall einen Approximationsgrad von der Ordnung $O(n^{-2})$ gegen $x(t)$ liefern, also einen „besseren" als die $\sigma_n(t)$.

Im ganzen stützen sich die Beweismethoden von ZAMANSKY und ALEXITS (auch KRACHIK) für die $\sigma_n(t)$ [sowie die $J_{2n}(t)$] auf Eigenschaften, die fast nur das Integral $\sigma_n(t)$ besitzt. Man kann diese Methoden nicht auf die anderen Integrale anwenden.

Für die Integrale von Abel-Poisson, Gauß, Poisson, Laguerre und Hermite ist es möglich eine umfassende Theorie zu entwickeln. Dies beruht auf der Tatsache, daß diese Integraloperatoren Halbgruppen sind (s. [*19*]), d.h.

$$T(\xi_1)\,T(\xi_2)\,[x(t)] = T(\xi_1+\xi_2)\,[x(t)], \qquad \text{für jedes } \xi_1, \xi_2 \geqq 0;$$

dabei ist $T(\xi)$ der Operator (mit Parameter $\xi \geqq 0$), der $x(t)$ in $\mathfrak{J}^x(t;\xi)$ überführt. Mit einem allgemeinen Satz 2.1 (unten) aus der Halbgruppentheorie läßt sich die dritte der aufgestellten Fragen für alle in diesem Abschnitt erwähnten Integrale ähnlich erledigen. Hier möge eine kurze Zusammenfassung dieser Theorie, die für die Lösung unseres Problems notwendig ist, genügen. (Eine ausführliche Darlegung ist in [*10*] und [*11*] enthalten.)

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Banachraum mit den Elementen x und der Norm $\|x\|$. Eine Menge $\mathfrak{S}: \{T(\xi)\}$, $\xi \geqq 0$ von beschränkten linearen Operatoren, die $\mathfrak{X}$ in sich selbst abbilden, ist eine *Halbgruppe*, falls

$$T(\xi_1)\,T(\xi_2) = T(\xi_1+\xi_2) \quad \text{jedes} \quad \xi_1, \xi_2 \geqq 0 \quad \text{und} \quad T(0) = I,$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{S}$ ist von der *Klasse* C_0, falls

$$\text{str.}\lim_{\xi \to 0} T(\xi)\,x = x^{8}) \qquad \text{für jedes } x \in \mathfrak{X},$$

wo $T(\xi)\,x$ stark meßbar für $\xi > 0$ ist.

[7]) Siehe hierzu eine kürzlich erschienene Arbeit von KRACHIK [*20*].

[8]) Dies ist eine Schreibweise für den Limes im Sinne der Norm: $\|T(\xi)\,x - x\| \to 0$ für $\xi \to 0+$ und jedes $x \in \mathfrak{X}$. Für die Def. der Meßbarkeit, s. [*19*, S. 304].

Wir definieren

$$A_\eta = \frac{1}{\eta}[T(\eta) - I] \qquad (\eta > 0)$$

und den *infinitesimalen erzeugenden Operator* A von $\mathfrak{S}$ durch

$$A x = \text{str. } \lim_{\eta \to 0} A_\eta x,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Die Menge der Elemente x, für die Ax existiert, wird mit $\mathfrak{D}(A)$ bezeichnet. Der umfassende Fundamentalsatz ist der folgende [9], [10], [11]:

SATZ 2.1. *Es sei $\mathfrak{X}$ ein Banachraum, $\mathfrak{S}$ von der Klasse C_0*[9]).

a) *Notwendig und hinreichend, dafür, daß*

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\xi} \| T(\xi) x - x \| = 0$$

gilt[10]), *ist, daß $T(\xi)x = x$, jedes $\xi > 0$ und $Ax = \Theta$*[11]).

b) *Falls $x \in \mathfrak{D}(A)$, gilt*

$$\| T(\xi) x - x \| \leqq \xi \max_{0 \leqq \tau \leqq \xi} \| T(\tau) \| \cdot \| A x \|.$$

c) *Umgekehrt folgt, wenn X ein reflexiver Banachraum und*

$$\| T(\xi) x - x \| = O(\xi)$$

ist, daß $Ax = y$, $y \in \mathfrak{X}$ und $x \in \mathfrak{D}(A)$ gilt.

Dies besagt, daß Halbgruppenoperatoren $T(\xi)x$, die von der Klasse C_0 auf reflexiven Banachräumen sind, eine Saturationsklasse besitzen, die genau der Menge aller Elemente x entspricht, die zu $\mathfrak{D}(A)$ gehören. Die Ordnung hierzu ist $O(\xi)$ für $\xi \to 0+$. Teile a) und b) dieses Satzes stammen von HILLE [19] und Teil c) vom Verf. [10].

Als eine Anwendung dieses Satzes betrachten wir nun das Integral von Abel-Poisson $\sigma(t; r)$. Unter der Transformation $r = e^{-\xi}$ ist $\sigma(t; r)$ ein Halbgruppenoperator ([19], [10]). Da für $r \to 1-$, $\| \sigma(t; r) - x(t) \| \to 0$ in der Norm der Räume $C[-\pi, +\pi]$ oder $L_p(-\pi, +\pi)$, $p \geqq 1$ strebt, ist $\sigma(t; r)$ auch von der Klasse C_0. Also ist der Satz 2.1 anwendbar. Es läßt sich beweisen ([10]):

---

[9]) Man kann die Klasse C_0 durch die Klasse $(1, C)$ ersetzen, wodurch die Voraussetzung abgeschwächt wird (s. [10] auch für die Definition dieser Klasse).

[10]) Ein Satz, der noch in logischer Reihenfolge vor a) stehen könnte, ist der folgende: Erfüllt die Menge $\mathfrak{S}$ die Bedingung $\| T(\xi + \eta) x - T(\xi) x \| \to 0$ für $\eta \to 0+$ und $\xi > 0$ (anstatt der stärkeren Bedingung C_0) und ist $\| T(\xi) x \| \leqq \| x \|$ und ferner der Wertebereich $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ als die Menge der Elemente $x \in \mathfrak{X}$ für die $x = T(\xi) y$ gilt (für irgendwelche $y \in \mathfrak{X}$ und $\xi > 0$) definiert, so gilt str. $\lim_{\xi \to 0} T(\xi) x = x$ genau wenn $x \in \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S})}$. [Es ist $\mathfrak{D}(A) < \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S})}$.] Dies findet man mit Beweis und einer Anwendung auf das Gaußsche Integral in FELLER ([15], S. 475–479). Ein entsprechender Satz (mit Anwendungen auf das Integral von Fejér), dessen Beweis sich aber auf die klassischen analytischen Methoden beschränkt, findet man in BOCHNER [4, S. 12–21].

[11]) Θ bedeutet das Nullelement in $\mathfrak{X}$.

SATZ 2.2. a) *Falls* $x(t) \in C[-\pi, +\pi]$ *oder* $L_p(-\pi, +\pi)$, $1 \leqq p < \infty$ *und* $\|\sigma(t; r) - x(t)\| = o(\log 1/r)$ *gilt, so folgt* $x(t) = \text{const}$.

b) *Falls* $\tilde{x}(t) \in C[-\pi, +\pi]$[12]) *oder* $\in L_p(-\pi, +\pi)$, $1 \leqq p < \infty$ *gilt, so ist* $\|\sigma(t; r) - x(t)\| \leqq (\log 1/r)\,\|\tilde{x}(t)\|$.

c) *Falls* $x(t) \in L_p(-\pi, +\pi)$, $1 < p < \infty$ *und* $\|\sigma(t; r) - x(t)\|_p = O(\log 1/r)$ *gilt, folgt* $\tilde{x}(t) \in L_p$.

[Für $1 < p < \infty$ ist $\tilde{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$ fast überall und $\tilde{x}(t) \in L_p$ genau wenn $x'(t) \in L_p$.]

Wir erhalten also [*10*]: *Für* $p > 1$ *ist*

$$S.Kat.\ [\sigma(t; r)]_p = \{x(t) \mid \tilde{x}(t) \in L_p(-\pi, +\pi);\quad O(\log 1/r);\ \textit{Konstanten}\}.$$

Da die Räume $C[-\pi, \pi]$ und $L_1(-\pi, \pi)$ nicht reflexiv sind, ist die Umkehrung von Satz 2.1 b), nämlich Teil c), nicht anwendbar. Aber dafür hat KAREL DELEEUW[13]) kürzlich folgendes gefunden:

c*) *Wenn* $x(t) \in L_1(-\pi, +\pi)$ *und* $\|\sigma(t; r) - x(t)\|_1 = O(\log 1/r)$ *gilt, folgt* $\tilde{x}(t) \in M[-\pi, +\pi]$.

Hier bedeutet $M[-\pi, +\pi]$ den Raum der auf $[-\pi, +\pi]$ definierten Massen (BOURBAKI [*6*] S. 41–48).

c**) *Ist* $x(t) \in C[-\pi, +\pi]$ *und* $\|\sigma(t; r) - x(t)\|_C = O(\log 1/r)$, *so folgt* $\tilde{x}(t) \in L_\infty(-\pi, +\pi)$.

Diese beiden Resultate erhielt DELEEUW, indem er Satz 2.1 c) für Banachräume, die nicht notwendig reflexiv sind, erweiterte. Wesentlich bei dieser Erweiterung ist der Begriff einer konjugierten Halbgruppe von Operatoren, die auf einem „konjugierten" Raume $\mathfrak{X}^+$ definiert ist. Im allgemeinen ist dieser Raum ein Unterraum des vollen konjugierten Raumes $\mathfrak{X}^*$[14]).

Wir führen die Untersuchung der Integrale aus § 1 fort und betrachten nun das Integral von de la Vallée-Poussin, ein trigonometrisches Polynom von der Ordnung n. Bekannt ist: Falls $x(t) \in \text{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ ist, so folgt $\|V_n(t) - x(t)\|_C = O(n^{-\alpha})$ ([*22*] S. 184). Falls $x'(t) \in \text{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ ist, so ist $\|V_n(t) - x(t)\|_C = O\left(n^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)$ ([*7*]). Falls $|x(t)| \leqq M$ ist, dann gilt an jedem Punkte t, wo $x''(t)$ existiert, $\lim_{n \to \infty} n[V_n(t) - x(t)] = x''(t)$ ([*22*] S. 187). Falls $\|V_n(t) - x(t)\|_C = o(n^{-1})$ gilt, folgt daß $x(t)$ konstant ist ([*7*]). Entsprechende Sätze gelten im Raume $L_p(-\pi, +\pi)$ ([*7*]).

Es besteht die *Vermutung*:

$$S.Kat.\ [V_n(t)]_C = \{x(t) \mid x'(t) \in Lip\,1;\ O(1/n);\ \textit{Konstanten}\}.$$

---

[12]) Bezüglich Frage I ist auch bekannt, falls $x(t) \in \text{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$, daß $\|\sigma(t; r) - x(t)\|_C = O[(1-r)^\alpha]$ gilt (s. [*27*]).

[13]) Schriftliche Mitteilung.

[14]) $\mathfrak{X}^*$ ist der Raum aller stetigen linearen Funktionale, die auf $\mathfrak{X}$ definiert sind. $\mathfrak{X}^+$ ist gleich $\overline{\mathfrak{D}(A^*)}$, wo A^* der konjugierte infinitesimale erzeugende Operator ist. Konjugierte Halbgruppen wurden von W. FELLER [*15*] und der Raum $\mathfrak{X}^+$ von R. S. PHILLIPS [*24*] eingeführt.

Für das Integral von Stieltjes, ein gewöhnliches Polynom von der Ordnung n, sind wenige Approximationssätze bekannt[15]). Sie sind aber wahrscheinlich sehr ähnlich wie die für die $V_n(t)$. Zum Beispiel falls $x(t)$ beschränkt ist, so gilt für jedes t, für das $x''(t)$ existiert, daß $\lim_{n\to\infty} n[S_n(t)-x(t)] = (\frac{1}{2})x''(t)$ [2] ist. Das heißt, daß der Grad der Approximation von $x(t)$ durch die $S_n(t)$ höchstens von der Ordnung $O(1/n)$ ist.

Wir *vermuten*

$$S.Kat.\ [S_n(t)]_C = \{x(t) \mid x'(t) \in Lip\ 1;\ O(1/n);\ \textit{lineare Funktionen}\}.$$

3. Die Gauß-Weierstraßsche Transformation

Antworten auf unsere drei Fragen in bezug auf das Integral $W(t;\xi)$ von Weierstraß, welches ein Halbgruppenoperator ist, sind im Raume $L_p(-\infty,+\infty)$ $p>1$ fast vollständig bekannt [*10*]. Dieser Raum $L_p(-\infty,+\infty)$ für $p>1$) ist nämlich reflexiv. In [*10*] haben wir bereits den ersten Umkehrsatz für die $W(t;\xi)$ mittels Satz 2.1 c) und der Halbgruppentheorie bewiesen. Er lautet:

SATZ 3.1.

a) *Ist* $x(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1<p<\infty$, *und gilt*

$$\|W(t;\xi)-x(t)\|_p = O(\xi),$$

so folgt, daß $x(t)$ *und* $x'(t)$ *total stetig sind und* $x''(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$.

b) *Es gilt für* $1<p<\infty$

$$S.Kat.\ [W(t;\xi)]_p = \{x(t) \mid x(t)\ \textit{und}\ x'(t)\ \textit{total stetig},\ x''(t)\in L_p(-\infty,+\infty);\ O(\xi);\ \textit{Nullelement}\}.$$

Hier werden wir direkte Sätze mit den *gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis* für die Räume $C[-\infty,+\infty]$ und $L_1(-\infty,+\infty)$ gewinnen.

SATZ 3.2.

a) *Falls* $x(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ *und für* $h\to 0$

$$(3.1)\qquad \int_0^h [x(t+u)+x(t-u)-2x(t)]\,du = O(h^{2+\alpha}),\qquad 0<\alpha\leqq 1,$$

gilt, dann folgt, daß

$$(3.2)\qquad |W(t;\xi)-x(t)| = O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right),\qquad \xi\to 0.$$

b) *Falls die rechte Seite von* (3.1) *durch* $o(h^{2+\alpha})$ *ersetzt wird, dann wird das groß-O auf der rechten Seite von* (3.2) *durch klein-o ersetzt.*

BEWEIS. Setzen wir

$$y_t(u) = \tfrac{1}{2}\{x(t+u)+x(t-u)-2x(t)\},$$

[15]) Siehe [*28*], S. 429–440 für die bekannten Resultate über die $S_n(t)$.

so folgt offenbar, da $e^{-u^2/\xi}$ eine gerade Funktion in u ist, daß

$$W(t;\xi) - x(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\xi}} \int_0^\infty y_t(u)\, e^{-u^2/\xi}\, du \tag{3.3}$$

ist. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\xi^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ und zerlegen das Integral in zwei Teile, die den Intervallen $(0, u_0)$ und (u_0, ∞) entsprechen (u_0 wird später festgelegt), und setzen wir $Y(u) = \int_0^u y_t(v)\, dv$ in den ersten Teil ein, so folgt:

$$\frac{1}{\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}}[W(t;\xi) - x(t)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} \int_0^{u_0} e^{-u^2/\xi}\, dY(u) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} \left[\int_{u_0}^\infty x(t+u)\, e^{-u^2/\xi}\, du + \int_{u_0}^\infty x(t-u)\, e^{-u^2/\xi}\, du - \int_{u_0}^\infty 2x(t)\, e^{-u^2/\xi}\, du \right]$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Partielle Integration von I_1 ergibt

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} \left[e^{-u_0^2/\xi}\, Y(u_0) - \int_0^{u_0} Y(u)\, d_u\left(e^{-u^2/\xi}\right) \right] =: I_1' + I_1''.$$

Es gilt aber

$$I_1' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u_0}{\sqrt{\xi}}\right)^{2+\alpha} e^{-(u_0/\sqrt{\xi})^2} \frac{Y(u_0)}{u_0^{2+\alpha}} = o(1) \quad \text{für} \quad \xi \to 0$$

falls u_0 fest, aber klein genug ist (erst wählen wir u_0, danach ξ). Da $Y(u) = O(u^{2+\alpha})$ ist, folgt

$$I_1'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} O\left[\int_0^{u_0} u^{2+\alpha}\, d_u\left(e^{-u^2/\xi}\right) \right]$$

$$= O\left[\left(\frac{u_0}{\sqrt{\xi}}\right)^{2+\alpha} e^{-(u_0/\sqrt{\xi})^2} \right] + O\left[(2+\alpha) \int_0^{u_0} \left(\frac{u}{\sqrt{\xi}}\right)^{1+\alpha} e^{-(u/\sqrt{\xi})^2}\, d\left(u/\sqrt{\xi}\right) \right]$$

$$= o(1) + O(1) = O(1) \quad \text{für} \quad \xi \to 0.$$

Unsere Voraussetzungen über $Y(u)$ ergeben $I_1 = O(1)$.

In bezug auf die drei letzten Integrale I_2, I_3 und I_4 haben wir

$$|I_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} e^{-u_0^2/\xi} \int_{u_0}^\infty |x(t+u)|\, du$$

$$\leqq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{u_0^{2+\alpha}} \left(\frac{u_0}{\sqrt{\xi}}\right)^{2+\alpha} e^{-(u_0/\sqrt{\xi})^2} = o(1) \quad \text{für} \quad \xi \to 0$$

und festes u_0.

Ebenso folgt, daß $I_3 = o(1)$.

Schließlich ist

$$|I_4| \leqq \frac{2|x(t)|}{\sqrt{\pi}\,\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2/\xi}\,du \leqq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{|x(t)|}{u_0^{1+\alpha}} \int_{u_0}^{\infty} \frac{u^{1+\alpha} e^{-u^2/\xi}}{\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}}\,du$$

$$= \frac{2|x(t)|}{\sqrt{\pi}\,u_0^{1+\alpha}} \int_{u_0/\sqrt{\xi}}^{\infty} v^{1+\alpha} e^{-v^2}\,dv = o(1), \quad \text{mit} \quad \xi \to 0 \text{ für festes } u_0,$$

da $\int_0^{\infty} u^{1+\alpha} e^{-u^2}\,du < +\infty$ ist.

Unsere Behauptung für Teil a) folgt unmittelbar.

In bezug auf Teil b), falls man $O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$ durch $o\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$ ersetzt, folgt der Beweis genau so wie für Teil a), nur daß $I_1'' = o(1)$ für $\xi \to 0$, da $Y(u) = o(u^{2+\alpha})$ ist. Der Beweis ist nun vollständig.

Die Beweismethode des obigen Satzes ist typisch für Probleme dieser Art (z.B. [5], [29]).

DEFINITION. *Wir schreiben* $x(t) \in P_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, *falls*

$$\left| \frac{x(t+u) + x(t-u) - 2x(t)}{u^{1+\alpha}} \right| = O(1)$$

gleichmäßig in u und t; $x(t) \in \mathfrak{p}_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, *falls der Limes des linken obigen Gliedes mit u gegen Null strebt, gleichmäßig in t.*

Falls $x(t)$ stetig ist, folgt aus $x(t) \in P_\alpha$ für $\alpha > 1$, daß $x(t)$ linear ist. In der Tat, für $\alpha > 1$ ist

$$\left| \frac{x(t+u) + x(t-u) - 2x(t)}{u^2} \right| \leqq M |u|^{\alpha-1};$$

lassen wir u gegen Null konvergieren, so strebt der absolute Betrag gleichmäßig in t gegen Null mit $u \to 0$. Nach dem bekannten Satz von SCHWARZ [z.B. TITCHMARSH, *Theory of Functions*, Oxford 1932 § 13.84] folgt, daß $x(t)$ linear ist.

Falls $x(t)$ stetig ist, folgt aus $x(t) \in \mathfrak{p}_\alpha$ mit $\alpha = 1$, daß $x(t)$ linear ist. Falls die Ableitung $x'(t)$ existiert und $\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ ist, dann folgt $x(t) \in P_\alpha$; denn nach dem Mittelwertsatz ist

$$|x(t+u) + x(t-u) - 2x(t)| = |u[x'(t+\vartheta u) - x'(t-\vartheta u)]|$$
$$\leqq M'|u| \cdot [2\vartheta|u|]^\alpha < 2M'|u|^{1+\alpha}, \quad (o < \vartheta < 1).$$

Falls $x(t) \in P_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, folgt, daß

$$\left| \int_0^h y_t(u)\,du \right| \leqq M \int_0^h |u|^{1+\alpha}\,du = O(h^{2+\alpha})$$

gilt. Falls $x(t) \in \mathfrak{p}_\alpha$, $o < \alpha \leqq 1$, so ist $\left| \int_0^h y_t(u)\,du \right| = o(h^{2+\alpha})$.

FOLGERUNG 3.1.

a) *Falls* $x(t) \in P_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ *oder* $x'(t) \in Lip\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, *gilt, so folgt*

$$|W(t;\xi) - x(t)| = O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right), \quad \xi \to 0. \tag{3.4}$$

b) *Falls* $x(t) \in p_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ *ist, dann kann man die rechte Seite von* (3.4) *durch* $o\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$ *ersetzen.*

Diese Folgerung zeigt, daß wir den Grad $O(\xi)$ für $\alpha = 1$ bekommen. Dieses Resultat ist interessant im Vergleich mit dem, was eine Anwendung von Satz 2.1 b) auf die $W(t;\xi)$ ergibt, nämlich (s. [*10*]):

SATZ 3.3. *Falls* $x(t)$, $x'(t)$ *und* $x''(t) \in C[-\infty, +\infty]$ *sind, erhält man*

$$\|W(t;\xi) - x(t)\|_C \leqq \frac{\xi}{4} \|x''(t)\|_C .$$

Unter einer schwächeren Voraussetzung, $x'(t) \in \mathrm{Lip}\,1$, ergibt die Folgerung 3.1, daß der Grad der Approximation von $x(t)$ durch die $W(t;\xi)$ von der Ordnung $O(\xi)$ ist, genau wie in Satz 3.3. Daß dieser Grad nicht verbessert werden kann, zeigt der folgende Satz, dessen Beweis auch unabhängig von der Halbgruppentheorie ist.

SATZ 3.4. *Falls* $x(t)$ *beschränkt auf* $[-\infty, +\infty]$ *ist, so folgt*

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\xi} [W(t;\xi) - x(t)] = \frac{1}{4} x''(t) \tag{3.5}$$

an jedem Punkt t, *wo* $x''(t)$ *existiert und endlich ist. Insbesondere ist* $x(t) - W(t;\xi)$ *genau von der Ordnung* $O(\xi)$ *falls* $x''(t) \neq 0$ *ist.*

BEWEIS. Wir erhalten

$$W(t;\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\xi}} \int_0^\infty e^{-u^2/\xi} [x(t+u) + x(t-u)]\, du .$$

Weil $x''(t)$ für t existiert, ist

$$x(u) = x(t) + (u-t)\,x'(t) + \tfrac{1}{2}(u-t)^2 [x''(t) + \eta(u-t)],$$

wobei $|\eta(h)| < \varepsilon$ für $|h| \leqq \delta$ und $|\eta(h)| \leqq M$ für alle h. Folglich gilt

$$x(t+u) + x(t-u) = 2x(t) + u^2 [x''(t) + z(u)]$$

mit $z(u) = \eta(t+u) + \eta(t-u)$.

Also gilt

$$W(t;\xi) - x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\xi}} \int_0^\infty u^2 x''(t)\, e^{-u^2/\xi}\, du + \frac{1}{\sqrt{\pi\,\xi}} \int_0^\infty u^2 z(u)\, e^{-u^2/\xi}\, du$$
$$=: I_1 + I_2 .$$

Es ist

$$I_1 = x''(t)\, \frac{\xi}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v^2 e^{-v^2}\, dv = \frac{\xi^2 x''(t)}{4} .$$

In bezug auf I_2, zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$, so daß $|z(u)|<\varepsilon$ für $0\leqq u\leqq\delta$ ist. Auch $|z(u)|\leqq M$ ist für alle u. Daher ist

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\left[\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right]z(u)\,u^2e^{-u^2/\xi}\,du$$

und

$$|I_2|\leqq\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\xi}}\int_0^{\infty}u^2e^{-u^2/\xi}\,du+\frac{M}{\sqrt{\pi\xi}}\int_{\delta}^{\infty}u^2e^{-u^2/\xi}\,du$$

$$=\frac{\varepsilon\xi}{4}+\frac{M\xi}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta/\sqrt{\xi}}^{\infty}v^2e^{-v^2}\,dv<\varepsilon\xi,$$

da $\frac{4M}{3\sqrt{\pi}}\int_{\delta/\sqrt{\xi}}^{\infty}v^2e^{-v^2}dv<\varepsilon$ für $\xi\to0$ und festes $\delta>0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen[16]).

In einem Ergebnis von HILLE[17]) wird eine ähnliche Folgerung erhalten, aber unter der stärkeren Voraussetzung, daß $x(t)$, $x'(t)$ und $x''(t)$ zu $C[-\infty,+\infty]$ gehören.

SATZ 3.5. *Es sei* $x(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ *und für* $h\to0$

$$\int_0^{h}w(u)\,du=O(h^{2+\alpha}),\qquad 0<\alpha\leqq1 \tag{3.6}$$

mit

$$w(u)=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t+u)+x(t-u)-2x(t)|\,dt.$$

Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty}|W(t;\xi)-x(t)|\,dt=O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right),\qquad \xi\to0. \tag{3.7}$$

BEWEIS. Es ist $W(t;\xi)\in L_1(-\infty,+\infty)$ und nach (3.6) und dem Satz von FUBINI gilt

$$\frac{1}{\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}|W(t;\xi)-x(t)|\,dt\leqq\frac{2}{\sqrt{\pi\xi^{2+\alpha}}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_0^{\infty}|y_t(u)|\,e^{-u^2/\xi}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi\xi^{2+\alpha}}}\int_0^{\infty}e^{-u^2/\xi}\,du\int_{-\infty}^{\infty}|y_t(u)|\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi\xi^{2+\alpha}}}\int_0^{\infty}e^{-u^2/\xi}w(u)\,du.$$

Die Fortsetzung des Beweises folgt jetzt ähnlich wie der Beweis von Satz 3.2, indem für Teil I_1 $w(u)$ den Platz von $y_t(u)$ von Satz 3.2 einnimmt. Und für

[16]) Falls $x(t)$ beschränkt auf $(-\infty,+\infty)$ ist, so kann man in ähnlicher Weise zeigen, daß an jedem Punkt t, wo $x'(t)$ existiert, daß $\lim_{\xi\to0}\xi^{-\frac{1}{2}}[W(t;\xi)-x(t)]=0$ folgt.

[17]) [19] erste Auflage 1948 S. 401. Der Satz von HILLE [19] ist eine Aussage über starke Konvergenz im Gegensatz zu der „punktuellen" Konvergenz von Satz 3.4.

die drei anderen Teile gilt folgendes:

$$I_2 + I_3 + I_4 = \frac{2}{\sqrt{\pi \xi^{2+\alpha}}} \int_{u_0}^{\infty} w(u)\, e^{-u^2/\xi} du$$

$$\leqq \frac{2M}{\sqrt{\pi u_0^{1+\alpha}}} \int_{u_0}^{\infty} \frac{u^{1+\alpha}}{\xi^{\frac{2+\alpha}{2}}} e^{-u^2/\xi} du = O(1), \quad \xi \to 0,$$

bei festem u_0, da $0 \leqq w(u) \leqq M$ in $(-\infty, +\infty)$ ist.

FOLGERUNG 3.2. *Falls* $x'(t) \in Lip\,(\alpha, 1)$, $0 < \alpha \leqq 1$ *gilt, d.h. ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t+h) - x'(t)|\, dt = O(h^\alpha),$$

dann folgt die Beziehung (3.7).

BEWEIS. Falls $x'(t) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ ist, folgt nach dem Mittelwertsatz, daß $w(u) = O(u^{1+\alpha})$ ist, woraus (3.6) folgt.

Ähnliche Sätze gelten, falls O durch o ersetzt wird.

4. Drei weitere Halbgruppenoperatoren

Zu dem Integral $p(t; \xi)$ von Poisson-Cauchy definiert man das *konjugierte Integral* $\tilde{p}(t; \xi)$ durch (s. [29] S. 124)

$$\tilde{p}(t; \xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u\, x(t+u)}{u^2 + \xi^2} du$$

und die konjugierte Funktion als

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{[x(t+u) - x(t-t)]}{u} du.$$

Wieder gilt, daß $\tilde{p}(t; \xi)$ für fast alle t gegen $\tilde{x}(t)$ konvergiert, falls $x(t) \in L_1$ $(-\infty, +\infty)$ ([29] S. 134) ist.

SATZ 4.1. *Aus* $x(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ *folgt*

$$|\tilde{p}(t; \xi) - \tilde{x}(t)| = O(\xi^\alpha).$$

BEWEIS. Wir haben

$$\tilde{p}(t; \xi) - \tilde{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [x(t+u) - x(t-u)] \left[\frac{u}{u^2 + \xi^2} - \frac{1}{u}\right] du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t-u) - x(t-u)}{u^2 + \xi^2} \frac{\xi^2}{u} du$$

$$= O\left[\frac{1}{\pi} \xi^2 \int_0^{\infty} \frac{u^\alpha}{u^2 + \xi^2} \frac{du}{u}\right] = O\left[\xi \cdot \frac{\xi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u^2 + \xi^2} du\right]$$

$$= O(\xi^\alpha),$$

wobei die Integrale für $u=0$ als Cauchysche Hauptwerte existieren.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.1 kann man zeigen:

SATZ 4.2. *Aus* $x(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$ *folgt*

$$|p(t;\xi)-x(t)|=O(\xi^{\alpha}).$$

Es besteht die *Vermutung: Falls* $\tilde{x}(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$ *ist, folgt*

$$|p(t;\xi)-x(t)|=O(\xi^{\alpha}).$$

Ähnliche Resultate kann man im Raume $L_1(-\infty,+\infty)$ beweisen.

Als Umkehrsatz im Raume $L_p(-\infty,+\infty)$, $p>1$ haben wir bereits [*10*] folgendes bewiesen[18]):

SATZ 4.3.

a) *Ist* $x(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1<p<\infty$, *und*

$$\|p(t;\xi)-x(t)\|_p=O(\xi),$$

so folgt, daß $\tilde{x}(t)$ *total stetig ist und* $\tilde{x}'(t)$ *in* $L_p(-\infty,+\infty)$ *ist.*

b) *Für* $p>1$ *ist*

S. Kat. $[p(t;\xi)]_p=\{x(t)\,|\,\tilde{x}(t)$ *total stetig,* $x(t)$ *und* $\tilde{x}'(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$; $O(\xi)$; *Nullelement*$\}$.

Das Integral von Laguerre, $l(t;r)$, sowie das von Hermite $h(t;r)$ ist unter der Transformation $r=e^{-t}$ ein Halbgruppenoperator. Eine Anwendung des Satzes 2.1 auf das erste Integral ergibt (s. [*11*]):

SATZ 4.4.

a) *Gilt* $x(t)\in L_p(0,\infty)$, $1<p<\infty$, *und*

$$\|l(t;r)-x(t)\|_p=O(\log 1/r),$$

so folgt $g(t)\in L_p(0,\infty)$, *wo* $g(t)\equiv t\,x''(t)+x'(t)+\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4}\right)x(t)$ *ist.*

b) *Für* $1<p<\infty$ *gilt*

S.Kat. $[l(t;r)]_p=\{x(t)\in L_p(0,\infty)\,|\,g(t)\in L_p(0,\infty)$; $O(\log 1/r)$; $c\,e^{-t/2}\}$.

Setzen wir $k(t)=\frac{1}{2}[x''(t)+(1-t^2)\,x(t)]$, so gilt (s. [*11*]) für den Integraloperator $h(t;r)$:

SATZ 4.5:

a) *Ist* $x(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1<p<\infty$, *und*

$$\|h(t;r)-x(t)\|_p=O(\log 1/r),$$

so folgt $k(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$.

b) *Für* $p>1$ *haben wir*

S.Kat. $[h(t;r)]_p=\{x(t)\in L_p(-\infty,+\infty)\,|\,k(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$; $O(\log 1/r)$; $c\,e^{-t^2/2}\}$.

---

[18]) Für den infinitesimalen erzeugenden Operator von $p(t,\xi)$ s. HILLE, E.: *On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions.* Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhandl. **21**, 1–13 (1951).

5. Integraloperatoren mit einem Approximationsgrad von der Ordnung $O(\zeta)$

Nun wollen wir die Integrale von Jackson-de la Vallée-Poussin, Rogosinski und Picard betrachten. Sie haben die gemeinsame Eigenschaft, daß sie einen Approximationsgrad gegen $x(t)$ von der Ordnung $O(\zeta^2)$ für $\zeta \to 0$ besitzen, wobei dies ihr „bestmöglicher" Grad ist. Dagegen haben die vorhergehenden Integrale nur einen Grad von der Ordnung $O(\zeta)$ gegen $x(t)$ für $\zeta \to 0$. Die Ergebnisse für das Integral von Jackson-de la Vallée-Poussin haben wir bereits in § 2 angegeben.

Das symmetrische Koppelungsverfahren von Rogosinski (s. [25], [26]) ist definiert durch

$$R_n(t) = \frac{1}{2}\left[s_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right) + s_n\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^{19})$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right).$$

In der Form eines singulären Integrals nimmt $R_n(t)$ die Form J von § 1 an. Diese Formel definiert eine Summationsmethode einer Fourierreihe, die äquivalent zu der Cesàroschen $(C, 1)$-Methode ist. Aber $R_n(t)$ gibt einen besseren Approximationsgrad gegen $x(t)$ als $\sigma_n(t)$. Tatsächlich folgt, falls $x(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ ist, daß $\|R_n(t) - x(t)\|_C = O(n^{-\alpha})$ gilt [3]. Falls $x'(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ ist, folgt $\|R_n(t) - x(t)\|_C = O(n^{-1-\alpha})$ (Beweismethode ähnlich wie in [3]). Ein Approximationsgrad mit einer Ordnung besser als $O(n^{-2})$ ist nicht erreichbar [33]: Falls $\|R_n(t) - x(t)\| = o(n^{-2})$ gilt, folgt offenbar, daß $x(t)$ konstant ist[20]. Andere Umkehrsätze sind wieder nicht bekannt. *Vermutlich gilt:*

$$S.Kat.\ [R_n(t)]_C = \{x(t) \mid x'(t) \in Lip\,1;\ O(n^{-2});\ Konstanten\}.$$

Das Integral von Picard[21]) ist auch in der Literatur bekannt (s. [18] S. 137). Es ist kein Halbgruppenoperator. Jedoch beweisen wir

SATZ 5.1. *Falls* $x(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ *und*

$$\int_0^h y_t(u)\,du = O(h^{2+\alpha}), \qquad 0 < \alpha \leqq 1,$$

gilt, ist

$$\|P(t;\xi) - x(t)\|_C = O(\xi^{1+\alpha}).$$

[19]) Hier bedeutet $s_n(t)$ die n-te Teilsumme der Fourier-Entwicklung von $x(t)$.

[20]) In einer schriftlichen Mitteilung hat Herr W. W. ROGOSINSKI die interessante Frage gestellt, ob äquivalente Summationsverfahren (einer Fourier-Reihe) unter bestimmten Voraussetzungen dieselben Saturationsklassen besitzen. Jedoch ist das Koppelungsverfahren von ROGOSINSKI ein Gegenbeispiel zu dieser Vermutung. In der Tat sind die Methoden von CESÀRO und ROGOSINSKI äquivalent, besitzen aber verschiedene Saturationsklassen, nämlich die Menge der Funktionen $x(t)$, für die $x(t) \in \mathrm{Lip}\,1$ bzw. $x'(t) \in \mathrm{Lip}\,1$ gilt mit der Ordnung $O(n^{-1})$ bzw. $O(n^{-2})$.

[21]) In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Picardsche Kern als die Laplacesche Dichte bekannt.

Die Beweismethode ist nur eine leichte Modifikation derjenigen von Satz 3.2. Ähnlich wie Folgerung 3.1 gilt

SATZ 5.2. *Falls* $x'(t) \in Lip(\alpha, 1)$, $0<\alpha\leqq 1$ *ist, gilt*

$$\| P(t;\xi) - x(t)\|_p = O(\xi^{1+\alpha}), \qquad \xi \to 0.$$

SATZ 5.3.

a) *Falls* $x(t)$ *beschränkt auf* $(-\infty, +\infty)$ *ist, so gilt an jedem Punkt* t, *wo* $x''(t)$ *existiert,*

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\xi^2}[P(t;\xi) - x(t)] = x''(t). \tag{5.1}$$

b) *Falls* $x''(t)$ *auf* $(-\infty, +\infty)$ *existiert und stetig ist und einen Stetigkeitsmodul*

$$\omega_2(\delta) = \max_{|h|\leqq\delta} |x''(t+h) - x''(t)|,$$

besitzt, so folgt

$$P(t;\xi) = x(t) + \xi^2 x''(t) + \xi^2 \varepsilon_2(\xi),$$

wo $|\varepsilon_2(\xi)| \leqq 4\omega_2(\xi)$ *ist.*

BEWEIS.

a) Wie im Beweis von Satz 3.4 erhält man

$$P(t;\xi) - x(t) = \frac{1}{\xi}\int_0^\infty y_t(u)\, e^{-u/\xi}\, du$$

$$= \frac{1}{2\xi}\int_0^\infty x''(t)\, u^2 e^{-u/\xi}\, du + \frac{1}{2\xi}\int_0^\infty z(u)\, u^2 e^{-u/\xi}\, du$$

$$=: I_1 + I_2.$$

Nun ist

$$I_1 = \frac{x''(t)}{2\xi}\int_0^\infty \xi^3 v^2 e^{-v}\, dv = \xi^2 x''(t).$$

Für I_2 gilt

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2\xi}\int_0^\delta u^2 e^{-u/\xi}\, du + \frac{M}{2\xi}\int_\delta^\infty u^2 e^{-u/\xi}\, du = \frac{\varepsilon}{2\xi}\, 2\xi^3 + \frac{M\xi^2}{2\xi}\int_{\delta/\xi}^\infty v^2 e^{-v}\, dv < 2\varepsilon\xi^2,$$

da $\frac{M}{2}\int_{\delta/\xi}^\infty v^2 e^{-v}\, dv < \varepsilon$, für $\xi\to 0$, bei festem $\delta>0$. Folglich ist $P(t;\xi) = x(t) + \xi^2 x''(t) + \xi^2\varepsilon_2(\xi)$, wo $\varepsilon_2(\xi)\to 0$ für $\xi\to 0$, falls die Ableitung $x''(t)$ für t existiert. Teil a) ist damit bewiesen.

b) Wir schreiben

$$x(u+t) - x(t) = u\, x'(t) + \frac{u^2}{2!}\, x''(t) + \frac{u^2}{2!}[x''(\eta) - x''(t)], \quad (t<\eta<t+u).$$

Nun ist

$$|x''(\eta) - x''(t)| \leqq \omega_2(|\eta - t|) \leqq \left(1 + \frac{|u|}{\xi}\right)\omega_2(\xi).$$

Es folgt

$$|P(t;\xi)-x(t)| = \frac{1}{2\xi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|/\xi}[x(u+t)-x(t)]\,du\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\xi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\,u\,e^{-|u|/\xi}\,du\right| + \frac{1}{2\xi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} x''(t)\,\frac{u^2}{2!}\,e^{-|u|/\xi}\,du\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\xi}\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_2(\xi)\,u^2\left(1+\frac{|u|}{\xi}\right)e^{-|u|/\xi}\,du,$$

d.h.

$$P(t;\xi)-x(t) = \frac{x''(t)}{2!}\frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-|u|/\xi}\,du + \xi^2\varepsilon_2(\xi),$$

wo

$$\xi^2|\varepsilon_2(\xi)| \leqq \frac{1}{2\xi}\frac{\omega_2(\xi)}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\left(1+\frac{|u|}{\xi}\right)e^{-|u|/\xi}\,du$$

$$= \frac{1}{4\xi}\omega_2(\xi)\,4\xi^3 + \frac{\omega_2(\xi)}{4\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^3 e^{-|u|/\xi}\,du$$

$$= 4\xi^2\omega_2(\xi) \text{ ist, w. z. b. w.}$$

Dieser Satz bedeutet, daß der Grad der Approximation von $x(t)$ durch $P(t;\xi)$ höchstens von der Ordnung $O(\xi^2)$ ist. Die Frage nach Umkehrsätzen für die $P(t;\xi)$ bleibt offen. Jedoch ist es bekannt ([*18*] S. 138), daß die einzigen Elemente, die invariant unter $P(t;\xi)$ bleiben, die linearen Funktionen $x(t)=at+b$ sind. Diese Funktionen sind invariant unter $P(t;\xi)$ für alle $\xi\geqq 0$. Wir vermuten, daß

$$S.Kat.\ [P(t;\xi)]_C = \{x(t)\,|\,x'(t)\in Lip\,1;\ O(\xi^2);\ \textit{lineare Funktionen}\}.$$

Als Verallgemeinerung von Satz 5.3 haben wir

Satz 5.4. *Falls $x^{(2k)}(t)$ auf $(-\infty,+\infty)$ existiert und stetig ist, mit einem Stetigkeitsmodul $\omega_{2k}(\delta)$, so gilt*

$$P(t;\xi) = x(t) + \sum_{i=1}^{k}\xi^{2i}x^{(2i)}(t) + \xi^{2k}\varepsilon_{2k}(\xi),$$

wo

$$|\varepsilon_{2k}(\xi)| \leqq (2k+2)\,\omega_{2k}(\xi)$$

ist.

Beweis. Hierzu genügen wir uns mit der Bemerkung, daß wir die Beweismethode von dem vorhergehenden Satz erweitern. Da $x^{(2k)}(t)$ existiert und stetig ist, können wir die Entwicklung

$$x(u+t)-x(t) = \sum_{i=1}^{2k}\frac{u^i x^{(i)}(t)}{i!} + \frac{u^{2k}}{2k!}[x^{(2k)}(\eta)-x^{(2k)}(t)],$$

wobei $t<\eta<t+u$ ist, ansetzen und die Tatsache verwenden, daß

$$\int_0^\infty u^k e^{-u/\xi}\,du = \xi^{k+1}\Gamma(k+1)$$

ist. Auch in anderer Hinsicht ist der Satz 5.3 (sowie 5.4) interessant. Definieren wir nämlich eine lineare Kombination des Integrals $P(t;\xi)$ durch

$$\mathfrak{P}_{(2)}(t;\xi) \equiv 2P(t;2^{-\frac{1}{2}}\xi) - P(t;\xi)$$

so erhalten wir

SATZ 5.5. *Falls $x''(t)\in Lip\,1$ ist, gilt*

$$\|\mathfrak{P}_{(2)}(t;\xi) - x(t)\|_C = O(\xi^2), \qquad \xi\to 0.$$

BEWEIS. Wir haben (nach Satz 5.3)

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{(2)}(t;\xi) - x(t) &= 2[P(t;2^{-\frac{1}{2}}\xi) - x(t)] - [P(t;\xi) - x(t)]\\ &= 2\frac{\xi^2 x''(t)}{2} - \xi^2 x''(t) + \xi^2\varepsilon_2(\xi),\end{aligned}$$

wo $|\varepsilon_2(\xi)|\leqq 4C\xi$, C ist eine Konstante.

Allgemein definieren wir für $k=1,2,\ldots$

$$\mathfrak{P}_{(2k)}(t;\xi) \equiv 2\mathfrak{P}_{(2k-2)}(t;2^{-\frac{1}{2}k}\xi) - \mathfrak{P}_{(2k-2)}(t;\xi).$$

[Hier gilt $\mathfrak{P}_{(0)}(t;\xi) = P(t;\xi)$.] Gilt $x^{(2k)}(t)\in \mathrm{Lip}\,1$ auf $(-\infty,+\infty)$, so kann man beweisen, daß $\|\mathfrak{P}_{(2k)}(t;\xi) - x(t)\|_C = O(\xi^{2k+1})$ gilt, d.h. die $\mathfrak{P}_{(2k)}(t;\xi)$ geben eine Approximation von der Ordnung $O(\xi^{2k+1})$.

6. Weitere Betrachtungen

Betrachten wir nun für festes $p>0$ das Integral $L(t;\xi;p)$ aus § 1. Man könnte jeden der Sätze aus § 3 und § 5, die für die Integrale F und K gültig sind, für das Integral $L(t;\xi;p)$ in verallgemeinerter Form beweisen. Diese Sätze würden der Reihe nach die entsprechenden Sätze für das Integral von Gauß-Weierstraß und Picard enthalten (s. Fußnote 3).

Typisch ist der folgende Satz:

SATZ 6.1. *Es sei $x(t)$ beschränkt auf $(-\infty,+\infty)$. An jedem Punkt t in $(-\infty,+\infty)$, wo $x''(t)$ existiert, gilt*[22]

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi^{2/p}}[L(t;\xi;p) - x(t)] = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)}x''(t).$$

[22]) Für das Integral von OSTROWSKI (Fußnote 3) gilt

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi^2}\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(3\xi)}[A(t;\xi) - x(t)] = \frac{x''(t)}{2}$$

falls $x''(t)$ existiert. Hier ist $\lim_{\xi\to 0}\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(3\xi)} = 3$.

Wir bemerken, daß man im Beweis die Eigenschaft

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u^p/\xi}\,du = \frac{\xi^{3/p}}{p}\,\Gamma(3/p)$$

verwendet.

Für $p=2$ ist dieses Integral ein Halbgruppenoperator. Besonders für festes $0<p<1$ ist dieses Integral von Interesse. Ist z.B. $p=\frac{1}{2}$, so gibt das Integral $L(t;\xi;\frac{1}{2})$ eine Approximation von der Ordnung $O(\xi^4)$, und keine Verbesserung der Funktionseigenschaften erhöht diesen Approximationsgrad. Natürlich gibt das Integral $L(t;\xi;p)$ für festes $0<p<\frac{1}{2}$ einen „besseren" Grad.

Auch gibt es außer den in § 1 angeführten Integralen noch weitere, die man im Hinblick auf diese drei Fragen betrachten könnte. Hier wäre z.B. das Integral, dessen Kern die Dichte der *Kolmogorov*-Verteilung ist, zu erwähnen.

Anstatt singulärer Integrale kann man auch mit YOSIDA ([*31*] S. 31) den folgenden Halbgruppenoperator betrachten: Es sei $x(t)\in C[-\infty,+\infty]$, $\lambda>0$, $\mu>0$, und

$$T(\xi)\,x(t) = e^{-\lambda\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\xi)^k}{k!}\,x(t-k\mu).$$

Wieder ist $\{T(\xi)\}$ von der Klasse C_0, und der infinitesimale erzeugende Operator A ist durch ([*31*] S. 43)

$$A\,x(t) = \lambda[x(t-\mu)-x(t)]$$

gegeben. Offenbar ist Satz 2.1 a), b) anwendbar.

In meiner nächsten Arbeit [*12*] möchte ich die asymptotische Entwicklung (im Sinne von POINCARÉ) von $W(t;\xi)$ für $\xi>0$, falls $x^{(2n)}(t)\in C[-\infty,+\infty]$ für alle n ist, betrachten:

$$W(t;\xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{4}\right)^k\frac{x^{(2k)}(t)}{k!} = \exp\left(\frac{\xi}{4}\,\frac{d^2}{dt^2}\right)\cdot x(t)$$

(in der symbolischen Schreibweise). Dies bedeutet präziser: daß für jedes $n\geqq 1$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi^n}\left[W(t;\xi)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\xi}{4}\right)^k\frac{x^{(2k)}(t)}{k!}\right] = \frac{1}{n!}\,\frac{x^{(2n)}(t)}{4}$$

gilt.

Dieses Ergebnis erhalten wir als Sonderfall einer wesentlichen Erweiterung des Fundamentalsatzes 2.1. In dieser Erweiterung betrachten wir die Taylorsche Entwicklung von $T(\xi)\,x$ mit Restglied sowie den Zusammenhang von

$$\left\|T(\xi)\,x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\xi^k}{k!}\,A^k x\right\| = O(\xi^n)$$

mit $x\in\mathfrak{D}(A^n)$, $n\geqq 1$, falls $\{T(\xi)\}\in C_0$ ist.

Literatur

[1] Alexits, G.: Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les sommes de Fejér. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **3**, 29–42 (1952). — [2] Arnol'd, G. A.: On the order of approximation of continuous functions by singular integrals of certain special form. Math. Sborn., N. S. **29** (71), 427–432 (1951) [Russ.]. — [3] Bernstein, S.: Sur un procédé de sommation des series trigonometriques. C. R. Acad. Sci. (Paris) **191**, 976–979 (1931). — [4] Bochner, S.: Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley and Los Angeles 1955. — [5] Bochner, S., and K. Chandrasekharan: Fourier transforms. Princeton 1949. — [6] Bourbaki, N.: Intégration, Livre VI. Paris 1952. — [7] Butzer, P. L.: On the singular integral of de la Vallée-Poussin. Archiv d. Math. **7**, 295–309 (1956). — [8] Butzer, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie. J. reine u. angew. Math. **197**, 112–120 (1957). — [9] Butzer, P. L.: Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. C. R. Acad. Sci. (Paris) **243**, 1473–1475 (1956). — [10] Butzer, P. L.: Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math. Ann. **133**, 410–425 (1957). — [11] Butzer, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen. Math. Ann. **134**, 154–166 (1957). — [12] Butzer, P. L.: The Gauss-Weierstrass Integral and semi-groups of bounded linear transformations. (In Vorbereitung.) — [13] Dunford, N., and J. T. Schwartz: Convergence almost everywhere of Operator Averages. J. Rational Mechanics and Analysis **5**, 129–178 (1956). — [14] Feller, W.: On a generalization of Marcel Riesz' Potentials and the semi-groups generated by them. Comm. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund. Tome suppl. dédier à M. Riesz, 73–81 (1952). — [15] Feller, W.: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. Ann. of Math. **55**, 468–519 (1952). — [16] Feller, W.: Semi-groups of transformations in general weak topologies. Ann. of Math. **57–58**, 287–308 (1953). — [17] Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [18] Hille, E.: Notes on linear transformations. I. Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 131–153 (1936). — [19] Hille, E., and R. S. Phillips: Funtional Analysis and Semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31** (1957) rev. ed. — [20] Krachik, D.: Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **7**, 49–64 (1956). — [21] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954. — [22] Natanson, I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Berlin 1955. — [23] Ostrowski, A.: Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires. Comm. Math. Helv. **15**, 265–286 (1942/43). — [24] Phillips, R. S.: The adjoint semi-group. Pac. J. of Math. **5**, 269–283 (1955). — [25] Rogosinski, W. W.: Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. Math. Ann. **95**, 110–134 (1925). — [26] Rogosinski, W. W.: Reihensummierung durch Abschnitts-Koppelungen. Math. Z. **25**, 132–149 (1926). — [27] Salem, R., and A. Zygmund: Capacity of sets and Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 23–41 (1946). — [28] Sansone, G., e E. Vitali: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bd. II. Bologna 1946. — [29] Titchmarsh, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford 1937. — [30] De la Vallée-Poussin, Ch.: Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris 1919. — [31] Yosida, K.: Lectures on semi-group theory and its application to Cauchy's Problem in partial differential equations. Bombay 1957. — [32] Zamansky, M.: Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelque problemes d'approximation. Ann. sci. Ecol. norm. sup. fasc. **1**, 19–93 (1949). — [33] Zygmund, A.: The approximation of functions by typical means of their Fourier series. Duke Math. J. **12**, 695–704 (1945). — [34] Zygmund, A.: Trigonometrical series. Warszawa 1935.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. Mai 1958)

DEKKER, J. C. E.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 113–124 (1958)

Congruences in Isols with a Finite Modulus*)

By
J. C. E. DEKKER

1. NOTATIONS AND TERMINOLOGY. Let us consider non-negative integers *(numbers)*, collections of numbers *(sets)* and collections of sets *(classes)*. These entities are denoted by small Latin letters, small Greek letters and capital Latin letters respectively. A mapping $f(x_1, \ldots, x_n)$ from certain (not necessarily all) ordered n-tuples of numbers onto numbers is called a *function*. The words "recursively enumerable" will be abbreviated by "r.e." The symbols $+$ and $\cdot$ stand for addition and multiplication when applied to pairs of numbers, but for union and intersection when applied to pairs of sets. We write $\subset$ for inclusion. A set is *immune* if it is infinite, but has no infinite r.e. subset; a set is *isolated*, if it is finite or immune. We also use the following notations:

$$c = \text{the cardinality of the continuum},$$
$$o = \text{the empty set of numbers},$$
$$\varepsilon = \text{the set of all numbers},$$
$$\delta f = \text{the domain of the function } f,$$
$$\varrho f = \text{the range of the function } f,$$
$$\alpha \times \beta = \text{the Cartesian product of } \alpha \text{ and } \beta,$$
$$Q = \text{the class of all finite sets},$$
$$I = \text{the class of all isolated sets},$$
$$j(x, y) = x + (x + y)(x + y + 1)/2.$$

The function $j(x, y)$ is primitive recursive and maps $\varepsilon \times \varepsilon$ one-to-one onto ε.

We say that α is *equivalent* to β (written: $\alpha \sim \beta$) if there is a one-to-one correspondence between α and β. We say that α is *recursively equivalent* to β (written $\alpha \simeq \beta$) if there is a partial recursive one-to-one function $p(x)$ such that $\alpha \subset \delta p$ and $p(\alpha) = \beta$. The set α is said to be *separable* from β (written: $\alpha | \beta$) if there exist disjoint r.e. sets α_1 and β_1 such that $\alpha \subset \alpha_1$ and $\beta \subset \beta_1$. The following statements are readily verified: the $\simeq$ relation is reflexive, symmetric and transitive, two finite sets are recursively equivalent if and only if they are equivalent, two finite sets are separable if and only if they are disjoint. It is proved in [2] that there are c immune sets and that a set is not recursively equivalent to a proper subset if and only if it is isolated. The class of all sets which are equivalent to α is called the *equivalence type* represented by α. The class of all sets which are recursively equivalent to α is

*) Presented to the American Mathematical Society, June 15, 1957.

called the *recursive equivalence type* (abbreviated: RET) represented by α and denoted by $\mathrm{Req}\,\alpha$.

2. THE SYSTEM $[\Lambda, +, \cdot]$. A RET which can be represented by an isolated set is called an *isol*. We denote the collection of all isols by Λ. Since two finite sets are equivalent if and only if they are recursively equivalent, we can identify $\mathrm{Req}\,o$ with 0 and $\mathrm{Req}(1, \ldots, n)$ with n. We have now extended ε to Λ. An isol is called *finite* if it consists of finite sets (i.e., if it is identified with a number), and *infinite* if it consists of immune sets. Combining the fact that I has cardinality c with the fact that $\mathrm{Req}\,\alpha$ is denumerable for every non-empty set α, we conclude that Λ has cardinality c.

DEFINITIONS. $\mathrm{Req}\,\alpha + \mathrm{Req}\,\beta = \mathrm{Req}(\alpha + \beta)$, provided $\alpha | \beta$,

$$\mathrm{Req}\,\alpha \cdot \mathrm{Req}\,\beta = \mathrm{Req}\,j(\alpha \times \beta).$$

It can be shown (see [2]) that addition and multiplication are well-defined for any two RETs, and that Λ is closed under these two operations; when applied to finite isols these operations reduce to ordinary addition and multiplication of numbers. We have therefore extended the denumerable system $[\varepsilon, +, \cdot]$ to the system $[\Lambda, +, \cdot]$ of cardinality c.

Henceforth capital Latin letters with the exception of I and Q will only be used to denote arbitrary members of Λ unless otherwise stated. The following properties of $[\Lambda, +, \cdot]$ are proved in [2]:

(2.1) $+$ and $\cdot$ are associative and commutative,

(2.2) $\cdot$ is distributive over $+$,

(2.3) $A + B = A \Leftrightarrow B = 0$,

(2.4) $A \neq 0 \Rightarrow (A \cdot B = A \Leftrightarrow B = 1)$,

(2.5) $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$,

(2.6) $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$,

(2.7) $n \neq 0 \Rightarrow (A = B \Leftrightarrow n \cdot A = n \cdot B)$.

DEFINITIONS. (1) $A^0 = 1$, $A^{n+1} = A \cdot A^n$,

(2) $B \leqq A = (\exists X)[B + X = A]$; $C \geqq D = D \leqq C$,

(3) $A \operatorname{comp} B = A \leqq B \vee B \leqq A$,

(4) $B < A = B \leqq A \,\&\, B \neq A$; $C > D = D < C$,

(5) $B | A = (\exists X)[B \cdot X = A]$,

(6) let $B \leqq A$; then $A - B$ is the solution of $B + X = A$,

(7) let $n | A$ and $n \neq 0$; then A/n is the solution of $n \cdot X = A$.

If $B | A$ we say that B *divides* A and that B is a *divisor* of A. The relations $\leqq$, $<$ and $|$ have the following properties in Λ (see [2]):

(2.8) $\leqq$ is a partial, but not a total ordering relation,

(2.9) A finite & B infinite $\Rightarrow A<B$,

(2.10) B infinite $\Leftrightarrow B>B-1>B-2>\cdots$ ad infinitum,

(2.11) $A<B\Leftrightarrow A+C<B+C$,

(2.12) $A<B\ \&\ C\neq 0\Rightarrow A\cdot C<B\cdot C$,

(2.13) $n\neq 0\Rightarrow(A<B\Leftrightarrow n\cdot A<n\cdot B)$,

(2.14) $a,b\geqq 1\ \&\ (a,b)=1\ \&\ a\,|\,b\cdot X\Rightarrow a\,|\,X$,

(2.15) $1\leqq k\leqq X\Rightarrow k!\,|\,X\cdot(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-k+1)$.

It immediately follows from (2.13) that

(2.16) $n\neq 0\Rightarrow(A\ \mathrm{comp}\ B\Leftrightarrow nA\ \mathrm{comp}\ nB)$.

It is possible to define A^B for any two members A and B of Λ, but in the present paper we shall only consider the special case that B is finite. One readily proves by induction:

(2.17) $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$; $\quad(A^m)^n=A^{mn}$; $\quad(A\cdot B)^m=A^m\cdot B^m$.

It is clear from the relations (2.1) to (2.17) that the arithmetic of isols is in many respects closer to ordinary arithmetic than to cardinal arithmetic. The "reason" is as follows: Λ consists of the RETs into which the class I of all isolated sets (i.e., all sets which are *not recursively equivalent to a proper subset*) is decomposed by the $\simeq$ relation, while ε can be interpreted as consisting of all equivalence types into which the class Q of all finite sets (i.e., all sets which are *not equivalent to a proper subset*) is decomposed by the $\sim$ relation.

Let ε^* denote the collection of all integers. In view of (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), and (2.6), one can extend $[\Lambda,+,\cdot]$ to a ring in exactly the same manner as one can extend $[\varepsilon,+,\cdot]$ to $[\varepsilon^*,+,\cdot]$. The ring to which $[\Lambda,+,\cdot]$ can be extended in this way is denoted by $[\Lambda^*,+,\cdot]$ or in short by Λ^*. The ring Λ^* has ε^* as a proper subring; it is commutative, has a unit element, namely 1, and has cardinality c. According to an unpublished result of J. MYHILL Λ^* has zero-divisors.

3. THE CONGRUENCE RELATION. The purpose of this paper is to generalize the relation $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ between elements a and b of ε to a relation $A\equiv B\ (\mathrm{mod}\ m)$ between elements A and B of Λ. The fact that for a,b,m in ε, $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow(a\geqq b\ \&\ m\,|\,a-b)\vee(b\geqq a\ \&\ m\,|\,b-a)$ suggests the definition:

$$A\equiv_1 B\ (\mathrm{mod}\ m)=(A\geqq B\ \&\ m\,|\,A-B)\vee(B\geqq A\ \&\ m\,|\,B-A).$$

The $\equiv_1$ relation is, however, unsatisfactory. For, whereas it is clearly reflexive and symmetric, it is not transitive. Suppose namely that C and D are incomparable isols. Then $2C\equiv_1 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ and $2D\equiv_1 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, but in view of (2.16), $2C\not\equiv_1 2D\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

DEFINITION. $A\equiv B\ (\mathrm{mod}\ m)=(\exists U)(\exists V)[A+mU=B+mV]$.

This gives us the "natural" generalization. To support this claim we point out:

(3.1) $\begin{cases} \text{if } (m) \text{ is the ideal in } \Lambda^* \text{ generated by } m, \\ A \equiv B \,(\mathrm{mod}\,(m)) \text{ in } \Lambda^* \Leftrightarrow A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \text{ in } \Lambda, \end{cases}$

(3.2) the $\equiv$ relation is reflexive, symmetric and transitive,

(3.3) for A comp B, $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow A \equiv_1 B \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.4) for A, B finite, $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m)$ in $\Lambda \Leftrightarrow A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m)$ in ε.

We briefly indicate the proofs: (3.1) follows from the definition of Λ^*, (3.2) is a corollary of (3.1), (3.3) is implied by (2.16), and (3.4) is a special case of (3.3). In the following list of simple propositions m denotes a positive number and p a positive prime, but n and k stand for arbitrary numbers.

(3.5) $A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow m \mid A$,

(3.6) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \,\&\, C \equiv D \,(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow A + C \equiv B + D \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.7) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow A + C \equiv B + C \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.8) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \,\&\, C \equiv D \,(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow A \cdot C \equiv B \cdot D \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.9) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow A + (m-1) \cdot B \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.10) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow A^n \equiv B^n \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.11) $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow kA \equiv kB \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.12) $\left.\begin{array}{l} kA \equiv kB \,(\mathrm{mod}\, m) \\ k \geqq 1 \quad \text{and} \quad (k, m) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m)$,

(3.13) $\left.\begin{array}{lll} A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m_1) & \text{and} & A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m_2) \\ m_1, m_2 \geqq 1 & \text{and} & (m_1, m_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m_1 m_2)$,

(3.14) $(A + B)^p \equiv A^p + B^p \,(\mathrm{mod}\, p)$,

(3.15) $1 \leqq k \leqq X \Rightarrow X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k!)$.

The first four propositions follow from (3.1); (3.9) is a corollary of (3.7); (3.10) can be obtained from (3.8) by induction; (3.11) is a special case of (3.8); (3.14) can be proved as in the finite case using $\binom{p}{i} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ for $1 \leqq i \leqq p-1$; (3.15) is a restatement of (2.15). We give the proofs of (3.12) and (3.13) in some more detail. The special case $B = 0$ of (3.12) is equivalent to (2.14). In the general case we have by (3.9):

$$\begin{aligned} kA \equiv kB \,(\mathrm{mod}\, m) &\Rightarrow kA + (m-1) \cdot kB \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m) \\ &\Rightarrow k \cdot [A + (m-1) \cdot B] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m) \qquad \text{by (2.2)} \\ &\Rightarrow A + (m-1) \cdot B \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m) \qquad \text{by the special case} \\ &\Rightarrow A \equiv B \,(\mathrm{mod}\, m) \qquad \text{by (3.9)}. \end{aligned}$$

To prove (3.13) we also first consider the special case $B = 0$. Then the hypotheses imply the existence of isols U and V such that $A = m_1 U = m_2 V$. Thus

$m_1 | V$ by (2.14), say $V = m_1 W$. This implies $A = m_1 m_2 W$ and $A \equiv 0 \pmod{m_1 m_2}$. In the general case:

$$X \equiv Y \pmod{m_1} \Rightarrow X + (m_1 m_2 - 1) \cdot Y \equiv 0 \pmod{m_1} \qquad \text{by (3.7)}$$

$$X \equiv Y \pmod{m_2} \Rightarrow X + (m_1 m_2 - 1) \cdot Y \equiv 0 \pmod{m_2} \qquad \text{by (3.7)}.$$

Hence, using the special case:

$$X + (m_1 m_2 - 1) \cdot Y \equiv 0 \pmod{m_1 m_2}$$

$$X \equiv Y \pmod{m_1 m_2} \qquad \text{by (3.9)}.$$

4. INDECOMPOSABLE ISOLS. If A and B are greater than zero, and 1 is their only common divisor, they are called *relatively prime* [written: $(A, B) = 1$]. Let us consider the statement:

$$\text{(I)} \qquad K X \equiv K Y \pmod{m} \,\&\, (K, m) = 1 \Rightarrow X \equiv Y \pmod{m}.$$

In the previous section we have seen that (I) holds in the special case that K is finite. In the present section we wish to show that in general (I) is false.

A set α is *decomposable* if it is the sum of two infinite separable sets, otherwise *indecomposable*. For every indecomposable set α we have therefore:

$$\alpha = \beta + \gamma \,\&\, \beta | \gamma \Rightarrow \beta \in Q \vee \gamma \in Q.$$

It is easily seen that every indecomposable set is isolated. A finite set is trivially indecomposable. An isol is *decomposable* if it is the sum of two infinite isols, otherwise *indecomposable*. For every indecomposable isol A we have therefore:

$$A = B + C \Rightarrow B \text{ is finite or } C \text{ is finite.}$$

A RET is an indecomposable isol if and only if it consists of indecomposable (hence isolated) sets. Every finite isol is trivially indecomposable. To prove the existence of infinite indecomposable isols we shall use the notion of a comparing function for a sequence of functions. Let us write $fg(x)$ for $f(g(x))$. The function $g(x)$ from ε into ε is called a *comparing function* of the sequence $\{f_n(x)\}$ of functions from ε into ε, if $g(x)$ is strictly increasing and for every ordered pair (i, k) of numbers exactly one of the relations

$$f_i g(x) < f_k g(x), \quad f_i g(x) = f_k g(x), \quad f_i g(x) > f_k g(x)$$

holds for almost all x. According to a result of SKOLEM [5, p. 152 and 6, pp. 5, 6] every sequence of functions from ε into ε has at least one comparing function. We shall refer to this result as SKOLEM's lemma.

THEOREM T1. *There exists a collection Δ of $\mathfrak{c}$ infinite isols which are indecomposable and mutually incomparable.*

PROOF[1]). Let $q_n(x)$ be a function of two variables such that for every n, $q_n(x)$ is a partial recursive function of x and such that every partial recursive function of one variable occurs at least once in the sequence $\{q_n(x)\}$. Such

[1]) This theorem is due to J. MYHILL. I am indebted to S. TENNENBAUM for the proof presented here.

a function exists, because there are only denumerably many partial recursive functions of one variable[2]). Let for every n and x

$$f_n(x) = \begin{cases} q_n(x) & \text{if } x \in \delta q_n \text{ and } q_n(x) \in (0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The sequence $\{f_n(x)\}$ of functions from ε into $(0,1)$ has the property that for every partial recursive function $p(x)$ with $\varrho p \subset (0,1)$, there is at least one number i such that $f_i(x)$ is an extension of $p(x)$. By SKOLEM's lemma $\{f_n(x)\}$ has at least one comparing function, say $g(x)$; let $\gamma = \varrho g$. The set γ is infinite, since $g(x)$ is strictly increasing. We claim that γ is indecomposable. For if γ were decomposable there would exist disjoint r.e. sets α and β such that:

$$\gamma = \gamma\alpha + \gamma\beta, \quad \gamma\alpha \notin Q, \quad \gamma\beta \notin Q.$$

The functions $r(y)$ and $r^*(y)$ defined by

$$\delta r = \delta r^* = \alpha + \beta, \quad r(y) = 1 \text{ for } y \in \alpha, \quad r(y) = 0 \text{ for } y \in \beta,$$
$$r^*(y) = 1 - r(y),$$

are partial recursive and have ranges included in $(0,1)$; moreover, $r(y) = 0$ for infinitely many numbers $y \in \gamma$ and $r(y) = 1$ for infinitely many numbers $y \in \gamma$. This implies that each of the statements

$$r g(x) < r^* g(x), \quad r g(x) > r^* g(x)$$

is valid for infinitely many values of x. This contradicts the fact that $g(x)$ is a comparing function of $\{f_n(x)\}$, since both $r(x)$ and $r^*(x)$ have extensions in $\{f_n(x)\}$. We conclude that γ is infinite and indecomposable. Let $g_1(x)$ be any strictly increasing function and $\gamma_1 = \varrho g g_1$. Note that $x > t$ implies $g_1(x) > t$; this implies that $g_1(x)$ is also a comparing function of $\{f_n(x)\}$ and γ_1 an infinite indecomposable set. Observe that $g_1(x)$ can be chosen in c different ways, that different choices of $g_1(x)$ yield different sets γ_1 and that there are only c sets of numbers. Thus the class of all infinite, indecomposable sets has cardinality c. Let Γ be the collection of all infinite, indecomposable isols; then Γ has cardinality c, since every infinite isol is a denumerable class of sets. We say that A and B are *almost equal* if for some number n, either $A = B + n$ or $B = A + n$. This relation of almost equality is an equivalence relation; every equivalence class into which it decomposes Γ is denumerable. Let Δ be a subcollection of Γ which contains exactly one isol from each of these equivalence classes. Thus Δ has cardinality c. For $A, B \in \Delta$,

$$A \leqq B \Rightarrow (\exists n)[A + n = B] \quad \text{and} \quad B \leqq A \Rightarrow (\exists n)[B + n = A],$$

since both A and B are indecomposable. By the definition of Δ no two distinct members of Δ are almost equal. Any two distinct members of Δ are therefore incomparable. This completes the proof.

[2]) It is not necessary for the purposes of this proof to assume that $q_n(x)$ is a partial recursive function of two variables.

THEOREM T2. *Let X be an infinite indecomposable isol, k any number and $m \geqq 2$. Then $X \not\equiv k \pmod m$.*

PROOF. Suppose k and m satisfy the hypothesis. Let X be any infinite isol which is congruent k modulo m, say, $X + mU = k + mV$, i.e., $(X - k) + mU = mV$. Applying (2.13) and putting $V - U = W$ we get

$$X - k = mW = (m-1) \cdot W + W.$$

Since $X - k$ is infinite, so is W. Hence $X - k$ is decomposable; this implies that X is decomposable.

We claim that $X^2 \equiv X \pmod 2$. Note that $X^2 - X$ exists for all X by (2.12). Hence $X^2 - X = X(X-1)$ for $1 \leqq X$. Taking $k = 2$ in (3.15) we get $X(X-1) \equiv 0 \pmod 2$ for $X \geqq 2$. We conclude that $X^2 - X \equiv 0 \pmod 2$ for $X \geqq 2$. The last congruence is trivially true for $X < 2$. Thus $X^2 - X \equiv 0 \pmod 2$ and $X^2 \equiv X \pmod 2$ for all X. Combining this result with T2 we infer that for an infinite indecomposable isol X_0,

$$X_0^2 \equiv X_0 \pmod 2, \quad (X_0, 2) = 1, \quad X_0 \not\equiv 1 \pmod 2.$$

This shows that (I) is false in Λ.

5. FERMAT'S LITTLE THEOREM. There are two versions of FERMAT'S little theorem in ε, namely:

$$(5.1) \qquad (\forall x)\,[x^p \equiv x \pmod p],$$

$$(5.2) \qquad (\forall x)\,[x \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow x^{p-1} \equiv 1 \pmod p].$$

We have seen that in the special case $p = 2$ the relation (5.1) generalizes to Λ. For an infinite, indecomposable isol X_0,

$$X_0 \not\equiv 0 \pmod 2 \quad \text{and} \quad X_0 \not\equiv 1 \pmod 2.$$

Hence (5.2) does not generalize to Λ for $p = 2$. We wish to show that we have a similar situation for every prime p. In looking for a proof of $X^p \equiv X \pmod p$ one should realize that among PEANO'S axioms the induction axiom is the only one which fails in Λ. The well-known proof of $x^p \equiv x \pmod p$ based on induction and the relations

$$0^p \equiv 0 \pmod p \quad \text{and} \quad (x+1)^p \equiv x^p + 1 \pmod p$$

can therefore not be used to prove $X^p \equiv X \pmod p$. For if $s(x) = x + 1$, $s^{n+1}(x) = s\,s^n(x)$, no infinite isol will ever be reached in the sequence

$$0, s(0), s^2(0), \ldots.$$

THEOREM T3. *For any prime p*

(a) $\qquad (\forall X)\,[X^p \equiv X \pmod p]$ *is true,*

(b) $\qquad (\forall X)\,[X \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow X^{p-1} \equiv 1 \pmod p]$ *is false.*

PROOF. Having verified both parts of the theorem in case $p = 2$ we assume $p > 2$.

(a) Let us for $1 \leqq i \leqq p-1$ denote the sum of all products which can be formed using i distinct members of the set $(1, 2, \ldots, p-1)$ by a_i. Then

$$(X+1)\cdot(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+p-1)$$
$$= X^{p-1} + a_1 X^{p-2} + \cdots + a_{p-2} X + (p-1)!\,.$$

By a well-known theorem of number theory [3, p. 86, Theorem 113], $a_i \equiv 0 \pmod{p}$ for $1 \leqq i \leqq p-2$; moreover, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ by WILSON's theorem. Thus

$$(X+1)\cdot(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+p-1) \equiv X^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

$$X\cdot(X+1)\cdot(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+p-1) \equiv X^p - X \pmod{p} \tag{5.3}$$

by (3.8). It readily follows from (3.15) that

$$X\cdot(X+1)\cdot(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+p-1) \equiv 0 \pmod{p}\,. \tag{5.4}$$

The desired result follows from (5.3) and (5.4).

(b) Let X_0 be an infinite, indecomposable isol. Then $X_0, X_0+1, \ldots, X_0+p-1$ are all infinite and indecomposable; none of these is therefore congruent 0 modulo p. If

$$(\forall X)\,[X \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow X^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}]$$

were true, the isols

$$X_0^{p-1},\ (X_0+1)^{p-1},\ \ldots,\ (X_0+p-1)^{p-1}$$

would all be congruent 1 modulo p. Hence

$$X_0^{p-1}\cdot(X_0+1)^{p-1}\cdot\ldots\cdot(X_0+p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{II}$$

by (3.8). We now have a contradiction, for by raising both sides of (5.4) to the power $p-1$ we see by (2.17) and (3.10) that the left side of (II) is congruent 0 modulo p. We conclude that among $X_0, X_0+1, \ldots, X_0+p-1$ there must be at least one isol, say Z, such that:

$$Z \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \textit{and} \quad Z^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}\,. \tag{III}$$

COROLLARY. *Let p be prime and $n \geqq 1$. Then*

(a) $$p \mid X^n \Leftrightarrow p \mid X\,,$$

(b) $$p \mid XY \textit{ does not imply } p \mid X \textit{ or } p \mid Y\,.$$

PROOF. Assume the hypothesis.

(a) Let $p \mid X^n$. Put $k = p^n$. Then $p \mid X^k$, since $n < k$. Thus $X^k \equiv 0 \pmod{p}$. Using T3 and induction we see that

$$X, X^p, X^{p^2}, X^{p^3}, \ldots$$

are mutually congruent modulo p. Since X^k occurs in this sequence, we have $X \equiv 0 \pmod{p}$, hence $p \mid X$. The converse is trivial.

(b) Let Z have the properties listed under (III). By T3 we have $Z^p \equiv Z \pmod{p}$, hence $p \mid Z(Z^{p-1}-1)$. It follows that $X = Z$ and $Y = Z^{p-1}-1$ satisfy the requirements.

As a simple application of T3 (a) we mention

$$X(X+1)(2X+1) \equiv 0 \pmod{6}. \tag{5.5}$$

The left side of (5.5) is congruent 0 modulo 2, because it has the factor $X(X+1)$. To prove (5.5) it now suffices by (3.13) to show

$$X(X+1)(2X+1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

This is easy, for since $X^3 \equiv X \pmod{3}$ we have

$$\begin{aligned} X(X+1)(2X+1) &= 2X^3 + 3X^2 + X \\ &\equiv 2X + 3X^2 + X \pmod{3} \\ &\equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

We now present another proof of T3 (a). Whereas this proof[3]) is longer than the first one, it has the advantage of using little besides the definitions of X, $X^p - X$ and $p \mid Z$. In particular it is not based on (3.15).

Second proof of T3 (a). We first introduce some notations and terminology. Let

$$j_2(x_0, x_1) = j(x_0, x_1)$$

$$j_{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = j\big(j_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), x_n\big)$$

for $n \geqq 2$. For $n \geqq 2$, j_n is a primitive recursive function which maps the collection of all ordered n-tuples of numbers one-to-one onto ε. It is readily verified that

$$\xi \in X \Rightarrow j_n(\xi, \ldots, \xi) \in X^n.$$

Let m be a fixed natural number $\geqq 2$ and $\mu = (0, 1, \ldots, m-1)$. Put $0' = 1$, $1' = 2, \ldots, (m-1)' = 0$, and denote the smallest non-negative residue of x modulo m by x^*. A permutation $c(x)$ of μ is *cyclical*, if $c(x') = \big(c(x)\big)'$ for $x \in \mu$. We define for $0 \leqq i \leqq m-1$,

$$c(i, x) = (x+i)^* \qquad \text{for all } x \in \mu.$$

It is clear that μ has exactly m cyclical permutations, namely, $c(0, x), \ldots, c(m-1, x)$; we call $c(0, x)$ the *identical* permutation. If $(j, m) = 1$ and z ranges over μ so does $(jz)^*$ by [3, p. 51, Theorem 56]. From now on we assume that m is prime, we write $m = p$ and we use the words cyclical permutation only in the sense of a cyclical permutation of $\mu = (0, 1, \ldots, p-1)$. Thus

(5.6) if $1 \leqq j \leqq p-1$ and z ranges over μ, so does $(jz)^*$.

[3]) It was suggested by Perott's proof [4] of Fermat's little theorem in ε.

For purposes of presentation we call every ordered p-tuple $(u_x) = (u_0, \ldots, u_{p-1})$ of numbers an *object*; this object is *abnormal* if $u_0, \ldots, u_{p-1}$ are all equal, otherwise *normal*. We claim:

(5.7) { if (u_x) is a normal object and $c(x)$ a cyclical permutation which is not identical, $(u_{c(x)}) \neq (u_x)$.

For suppose $c(x) = (x+j)^*$, where $1 \leqq j \leqq p-1$ and assume $(u_{c(x)}) = (u_x)$, i.e., $u_{(x+j)^*} = u_x$ for $0 \leqq x \leqq p-1$. This implies that for all y

$$u_{(y+j)^*} = u_{y^*}. \tag{5.8}$$

For if y is written in the form $tp + x$ with $0 \leqq x \leqq p-1$, we have $y^* = x$ and $(y+j)^* = (x+j)^*$. By substituting successively $0, j, 2j, \ldots, \overline{p-1}j$ for y in (5.8) we get:

$$u_0 = u_{j^*} = u_{(2j)^*} = \cdots = u_{(\overline{p-1}j)^*}.$$

We conclude by (5.6) that $u_0 = u_1 = \cdots = u_{p-1}$, i.e., that (u_x) is abnormal. This completes the proof of (5.7). It is clear that if (u_x) is a normal object and $c(x)$ a cyclical permutation, $(u_{c(x)})$ is also a normal object. Moreover,

(5.9) { if (u_x) is normal and $c(x)$ and $d(x)$ are cyclical permutations, then $c(x) \neq d(x) \Rightarrow (u_{c(x)}) \neq (u_{d(x)})$.

For assume the hypothesis and $c(x) \neq d(x)$. Then $dc^{-1}(x)$ is a cyclical, but not identical permutation, which when performed on the indices of $(u_{c(x)})$ maps $(u_{c(x)})$ onto $(u_{d(x)})$. Thus $(u_{c(x)}) \neq (u_{d(x)})$ by (5.7). We define

$$\Gamma_i(u_x) = (u_{c(i,x)}) \quad \text{for} \quad 0 \leqq i \leqq p-1.$$

The mappings $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{p-1}$ of objects onto objects are called the *cyclical mappings*; they form a group, since $c(0, x), \ldots, c(p-1, x)$ form a group. We say that (u_x) and (v_x) are *conjugate*, if $\Gamma(u_x) = (v_x)$ for some cyclical mapping Γ. This relation between (u_x) and (v_x) is an equivalence relation. We see from (5.9):

(5.10) { for any normal object (u_x) there are exactly p objects conjugate to (u_x) and all of these are normal.

The p normal objects conjugate to the normal object (u_x) are mapped onto different numbers by $j_p(x_0, \ldots, x_{p-1})$ and these numbers can be effectively computed from $u_0, \ldots, u_{p-1}$. If

$$j_p(u_x) = \text{minimum of } j_p\Gamma_0(u_x), \ldots, j_p\Gamma_{p-1}(u_x),$$

we call (u_x) a *minimal object*. We now define for any set σ:

$$\begin{aligned}
\Omega(\sigma) &= \{(u_x) \mid (\forall x)(0 \leqq x \leqq p-1 \Rightarrow u_x \in \sigma)\},\\
\Theta(\sigma) &= \text{collection of all abnormal objects in } \Omega(\sigma),\\
\Omega_0(\sigma) &= \text{collection of all minimal objects in } \Omega(\sigma) - \Theta(\sigma),\\
\Omega_i(\sigma) &= \Gamma_i\Omega_0(\sigma) \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq p-1,\\
\omega(\sigma) &= \{j_p(u_0, \ldots, u_{p-1}) \mid (u_x) \in \Omega(\sigma)\},\\
\vartheta(\sigma) &= \{j_p(u_0, \ldots, u_{p-1}) \mid (u_x) \in \Theta(\sigma)\},\\
\omega_i(\sigma) &= \{j_p(u_0, \ldots, u_{p-1}) \mid (u_x) \in \Omega_i(\sigma)\} \quad \text{for} \quad 0 \leqq i \leqq p-1.
\end{aligned}$$

We claim that for every set σ,

(α_1) $\quad \vartheta(\sigma) < \omega(\sigma)$ and $\vartheta(\sigma) \mid \omega(\sigma) - \vartheta(\sigma)$,

(α_2) $\quad \omega(\sigma) - \vartheta(\sigma) = \omega_0(\sigma) + \cdots + \omega_{p-1}(\sigma)$,

(α_3) $\quad \omega_0(\sigma) < \omega_0(\varepsilon), \ldots, \omega_{p-1}(\sigma) < \omega_{p-1}(\varepsilon)$,

(α_4) $\quad \omega_0(\varepsilon), \ldots, \omega_{p-1}(\varepsilon)$ are r.e. and mutually disjoint,

(α_5) $\quad \omega_i(\sigma) \simeq \omega_0(\sigma)$ for $1 \leqq i \leqq p-1$.

The relations (α_2) and (α_3) are obvious. The first part of (α_1) is trivial and the second part follows from

$$\Theta(\sigma) < \Theta(\varepsilon), \quad \Omega(\sigma) - \Theta(\sigma) < \Omega(\varepsilon) - \Theta(\varepsilon)$$

and the fact that every member of $\Omega(\varepsilon)$ can be effectively tested on normality The p sets mentioned in (α_4) are not only r.e. but also recursive. For first of all every normal object can be effectively tested on minimality. Secondly, given any non-minimal normal object (u_x) we can effectively find the unique number k such that $1 \leqq k \leqq p-1$ and $\Gamma_k(u_x)$ is minimal, hence also the unique number i such that

$$(u_x) = \Gamma_i(v_x), \quad (v_x) \text{ minimal}, \quad 1 \leqq i \leqq p-1.$$

As far as (α_5) is concerned, the function

$$f_i(x) = j_p \Gamma_i j_p^{-1}(x)$$

is recursive, one-to-one and maps $\omega_0(\sigma)$ onto $\omega_i(\sigma)$. Now suppose X is an isol. Since $X^p \equiv X \pmod p$ is obvious for $X < 2$ we assume $X \geqq 2$. Let $\xi \in X$, then ξ has at least two members. Let $(\beta_1), \ldots, (\beta_5)$ be the relations obtained from $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_5)$ respectively by replacing σ by ξ. Then $\omega(\xi) - \vartheta(\xi) \in X^p - X$ in view of (β_1) and the fact that $\omega(\xi) \in X^p$, $\vartheta(\xi) \in X$. If we put $Y = \operatorname{Req} \omega_0(\xi)$ we get $\omega(\xi) - \vartheta(\xi) \in p\,Y$ by $(\beta_2) - (\beta_5)$. Hence $X^p - X = p\,Y$ and $X^p \equiv X \pmod p$.

Let as before p denote as positive prime. The relation $X^p \equiv X \pmod p$ can be extended from Λ to Λ^*. For every element A of Λ^* can be written in the form $B - C$, where $B, C \in \Lambda$. Note, however, that B and C may be incomparable; if this is the case neither $B - C$ nor $C - B$ belongs to Λ. It is readily verified that

$$(5.11) \qquad \begin{cases} B - C \equiv D - E \pmod{(p)} & \text{in } \Lambda^* \\ \Leftrightarrow B + E \equiv D + C \pmod p & \text{in } \Lambda, \end{cases}$$

$$(5.12) \qquad (X - Y)^p \equiv X^p - Y^p \pmod{(p)} \quad \text{in } \Lambda^*.$$

Now suppose Z is any element of Λ^*, say $Z = X - Y$, where $X, Y \in \Lambda$. In Λ we have $X^p \equiv X \pmod p$ and $Y \equiv Y^p \pmod p$, hence also $X^p + Y \equiv Y^p + X \pmod p$. Using (5.11) we get $X^p - Y^p \equiv X - Y \pmod{(p)}$ in Λ^* and using (5.12) $Z^p \equiv Z \pmod{(p)}$ in Λ^*.

References

[1] DEKKER, J. C. E.: A non-constructive extension of the number system, two abstracts. J. Symbolic Logic **20**, 204–205 (1955). – [2] DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL: Recursive equivalence types, monograph, to be published in 1959 by the University of California Press. – [3] HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: An introduction to the theory of numbers. VII + 419 pp., 3rd ed. Oxford: Clarendon Press 1954. – [4] PEROTT, M. J.: Sur le théorème de Fermat. Bull. des Sci. Math. 2me Série **24**, 175–176 (1900). – [5] SKOLEM, TH.: Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. Fund. Math. **23**, 150–161 (1934). – [6] SKOLEM, TH. et alii: Mathematical interpretation of formal systems. VIII + 113 pp. Amsterdam: North-Holland Pu. Co. 1955.

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey (U.S.A.)

(Eingegangen am 25. Januar 1958)

HOFMANN, K. H.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 125–155 (1958)

Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen

Von
KARL HEINRICH HOFMANN

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift, Bd. 70 S. 13–37 erschienenen Arbeit über topologische Loops. In ihr soll die naheliegende Frage untersucht werden, inwieweit topologische Voraussetzungen über eine topologisch-algebraische Struktur, in der das Assoziativitätsgesetz nicht gefordert wird, die Gültigkeit dieser Rechenregel erzwingen können. In der erwähnten Arbeit haben wir nur einen Satz dieser Art bewiesen, nämlich den Satz I, (5.12). Die in dieser Arbeit gelegentlich angeführten Beispiele nicht assoziativer topologischer Loops [z.B. I, (4.4)] machen schon verständlich, daß Ergebnisse in dieser Richtung nur erwartet werden dürfen, wenn die betrachteten Strukturen durch zusätzliche algebraische Voraussetzungen bereichert werden, die den Weg zum Assoziativitätsgesetz vorbereiten. In der Tat werden alle tiefer liegenden Sätze entscheidend auf solchen Voraussetzungen fußen; und wo immer es möglich ist, wird auch die Notwendigkeit solcher Forderungen durch Konstruktion von Gegenbeispielen erhärtet werden. Die den betrachteten Strukturen zugrunde liegenden topologischen Räume werden in der Regel lokalkompakt sein.

Alle mit der römischen Ziffer I zitierten Stellen finden sich in der vorausgegangenen Arbeit.

§ 1. Abschwächung des Assoziativitätsgesetzes

(1.1) Ist $(E, .)$ eine algebraische Struktur mit einer zweistelligen Verknüpfung $(x, y) \to x \cdot y = xy$, so nennen wir ein Element $a \in E$ *monassoziativ*, wenn es in E eine Halbgruppe erzeugt, und *potenzassoziativ*, wenn es eine Gruppe erzeugt. Ein Elementepaar $(a, b) \in E \times E$ heißt *diassoziativ*, wenn a und b in einer und derselben Halbgruppe in E liegen und *alternativ*, wenn a und b in einer und derselben Gruppe liegen. Keine dieser Eigenschaften läßt sich durch eine endliche Anzahl von Identitäten kennzeichnen. Die Struktur $(E, .)$ heißt *monassoziativ* (bzw. *potenzassoziativ*), wenn jedes ihrer Elemente *monassoziativ* ist (bzw. *potenzassoziativ*); sie heißt *diassoziativ*, wenn jedes Paar ihrer Elemente *diassoziativ* ist; entsprechendes gelte für den Begriff der *Alternativität*. Man beachte jedoch *den Zusatz bei der Korrektur* am Schluß.

Jede diassoziative I-Loop ist potenzassoziativ.

BEWEIS. G sei eine diassoziative Loop. Zu $x \in G$ gibt es ein Element x^{-1} mit $xx^{-1} = e$. Die Elemente x und x^{-1} liegen in einer Halbgruppe; daraus

folgt $x^n(x^{-1})^n = x \dots x x^{-1} \dots x^{-1} = e$, woraus $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ folgt. x liegt in einer Halbgruppe, die x^{-1} enthält und also eine Gruppe ist, d.h. G ist potenzassoziativ.

Jede alternative Loop ist eine I-Loop.

(1.2) Die topologisch-algebraische Struktur $(E, .)$ habe bezüglich $(x, y) \to x \cdot y$ ein neutrales Element e. Wir bezeichnen sie dann als *monassoziativ konzentriert*, wenn e Häufungspunkt von monassoziativen Elementen ist; in analoger Weise definieren wir *eine potenzassoziativ konzentrierte Struktur*. $(E, .)$ werde ferner als *lokal monassoziativ* (bzw. *lokal potenzassoziativ*) bezeichnet, wenn eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ existiert, so daß U nur monassoziative (bzw. potenzassoziative Elemente enthält. Sollte $U \times U$ nur aus diassoziativen (bzw. alternativen) Elementepaaren bestehen, so nennen wir $(E, .)$ *lokal diassoziativ* (bzw. *lokal alternativ*).

(1.3) Hat eine topologisch-algebraische Struktur $(E, .)$ bezüglich $(x, y) \to x \cdot y$ ein neutrales Element e, so bezeichnen wir sie als *eudoxisch*, wenn sie monassoziativ konzentriert ist, und wenn eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ existiert, die außer $\{e\}$ keine, volle von einem Element erzeugte Halbgruppe enthält.

(1.4) *Eine total unzusammenhängende nicht diskrete lokalkompakte Loop G ist nicht eudoxisch*; oder umgekehrt: *In einer eudoxischen lokalkompakten Loop G besitzt das neutrale Element (und damit jeder Punkt) sicher in jeder seiner Umgebungen eine nichttriviale Zusammenhangskomponente und G gestattet nach* I, (5.15) *eine lokal zusammenhängende Verfeinerung ihrer Topologie.*

BEWEIS. $\mathfrak{U}(e)$ besitzt eine Basis aus kompakten und offenen Umgebungen. Es sei V eine offene und kompakte Umgebung von e, und A sei ihr abgeschlossenes Komplement in G. Dann gibt es eine Umgebung $W \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $AW \cap V\,W = \emptyset$ und überdies $W \subseteq V$ gilt [I, (3.8)]. Die Abbildung $f_2 = ((x, y) \to xy)$ bildet $V \times W$ in VW ab; nun ist $VW \cap A = \emptyset$, d.h. $VW \subseteq V$. Die Abbildung f_n von $V \times W \times \cdots \times W$ (insgesamt n Faktoren) in G, die durch $f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n = x_1^{R x_2 \cdots R x_n}$ erklärt ist, bildet, wie man durch vollständige Induktion beweist, $V \times W \times \cdots \times W$ in V ab. Ist $x \neq e$ ein monassoziatives Element in W, so liegen alle Potenzen zu einem positiven Exponenten von diesem Element in V, d.h. G ist nicht eudoxisch, denn alle offenen und kompakten Umgebungen V von e bilden in ihrer Gesamtheit eine Basis von $\mathfrak{U}(e)$.

(1.5) $(E, .)$ sei eine topologisch-algebraische Struktur; zu einem Element $y_0 \in E$ existiere ein Netz $(x_h)_{h \in I}$ das gegen y_0 konvergiert und nur aus monassoziativen Elementen besteht. Dann ist y_0 monassoziativ.

BEWEIS. n sei eine natürliche Zahl und $(g_i)_{i \in J_n}$ diejenige Menge von Abbildungen $(y_1, \dots, y_n) \to g_i(y_1, \dots, y_n)$ von $E \times \cdots \times E$ in E, die entsteht, wenn man in der Reihe der Elemente $y_1 y_2 \dots y_n$ auf alle möglichen Arten Klammern setzt und auf diese Weise alle möglichen Produkte der n-Elemente $y_1, \dots, y_n$ in dieser Reihenfolge der Faktoren ausrechnet. Ein Element $y \in E$ ist genau dann monassoziativ, wenn für alle Paare $(i, j) \in J_n \times J_n$ die Identität $g_i(y, \dots, y) = g_j(y, \dots, y)$ bei beliebigem natürlichem n erfüllt ist. Infolge der Stetigkeit

der Abbildungen g_i hat man die Beziehung $g_i(y_0, \ldots, y_0) = \lim_{k \in I} g_i(y_k, \ldots, y_k)$ $\lim_{k \in I} g_j(y_k, \ldots, y_k) = g_j(y_0, \ldots, y_0)$ für alle Paare $(i, j) \in J_n \times J_n$ und alle natürlichen n; denn die Elemente y_k sind sämtlich monassoziativ.

Eine Struktur $(E, .)$ mit neutralem Element e ist also lokal monassoziativ, wenn eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ vorhanden ist, in der die Menge aller monassoziativen Elemente dicht ist. Entsprechende Aussagen gelten bei Ersetzung des Begriffes monassoziativ durch den Begriff potenzassoziativ. Analog zu (1.5) beweist man den Satz

(1.6) Zu zwei Elementen x_0 und y_0 aus einer topologisch-algebraischen Struktur E existiere ein Netz $\big((x_k, y_k)\big)_{k \in I}$ auf $E \times E$ das gegen (x_0, y_0) konvergiert und nur aus diassoziativen Paaren besteht. Dann ist (x_0, y_0) diassoziativ.

Aus (1.5) und (1.6) folgt unmittelbar

(1.7) *Die Menge aller monassoziativen Elemente (bzw. diassoziativen Elementepaare) ist in E (bzw. in $E \times E$) abgeschlossen. Entsprechendes gilt für die Begriffe „potenzassoziativ" und „alternativ".*

Wir werden später ein Beispiel einer monassoziativen, aber nicht potenzassoziativen Loop angeben.

§ 2. Moufangloops

(2.1) Eine Loop G heißt eine *Moufangloop*, wenn für jedes Tripel $(x, y, z) \in G \times G \times G$ die Regel $x(y(zy)) = ((xy)z)y$ erfüllt ist. Jede Moufangloop ist eine alternative Loop. In jeder kommutativen Moufangloop ist $\mathfrak{H}$ eine Automorphismengruppe. Die Abbildung $x \to x^3$ einer kommutativen Moufangloop in sich ist ein Homomorphismus in ihr Zentrum; vgl. R. H. Bruck [3].

(2.2) *Eine zusammenhängende eudoxische kommutative Moufangloop ist eine Gruppe.*

Beweis. Es sei U eine Umgebung von e, die [abgesehen von e] frei ist von Elementen der Ordnung 3; eine solche existiert, da G eudoxisch ist. Wir wählen $V \in \mathfrak{U}(e)$ so, daß V^{-1} und $VV \subseteq U$ gilt. Dann wird V durch $g = (x \to x^3)$ eineindeutig abgebildet; andernfalls wäre $x^3 = y^3$ für ein gewisses Paar $(x, y) \in V \times V$ mit $x \neq y$; dann läge $z = x^{-1}y$ in U und es wäre $z^3 = x^{-3}y^3 = e$; nach Wahl von U müßte dann aber $z = e$ sein im Widerspruch zu $x \neq y$. Die Umgebung V erzeugt G [I. (5.7)], ist aber andrerseits eine assoziative Untermenge, die in einer Moufangloop eine Gruppe erzeugt.

Der Satz II, (2.2) gestattet eine wesentliche Verschärfung. Beim Beweis dieses Satzes haben wir nur benötigt, daß der Kern von g, d.h. die Menge aller Elemente der Ordnung 3, diskret ist. Es gilt also der Satz

(2.3) *G sei eine zusammenhängende kommutative Moufangloop. Die Menge aller Elemente der Ordnung 3 sei diskret in G. Dann ist G eine abelsche Gruppe.*

(2.4) *Enthält eine kommutative lokalkompakte zusammenhängende Moufangloop eine kompakte Gruppe als Normalteiler, so liegt dieser im Zentrum der Loop.*

BEWEIS. H sei ein kompakter assoziativer Normalteiler einer lokalkompakten zusammenhängenden kommutativen Moufangloop G. Als kompakte abelsche Gruppe besitzt er eine diskrete Charaktergruppe $\hat{H}$. Die Translation $R_xR_yR_{xy}^{-1}$ ist ein Automorphismus von G und bildet H in sich ab. Ist c ein Charakter aus $\hat{H}$, so ist die Abbildung $(x, y)\to c\circ R_xR_yR_{xy}^{-1} = c\circ R_xR_yR_{(xy)^{-1}}$ eine stetige Abbildung des zusammenhängenden Raumes $G\times G$ in den diskreten Raum $\hat{H}$ und ist daher nach I, (5.12) konstant und zwar gleich der Abbildung $(x, y)\to c$, weil $R_xR_yR_{xy}^{-1}$ für $x=y=e$ die identische Abbildung darstellt. (Die Abbildung $x\to R_x$ von einer lokal kompakten Loop G in den Raum der Translationen $\mathfrak{G}$ ist stetig, wenn $\mathfrak{G}$ mit der kompakt-offenen Topologie ausgestattet wird. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ hat in der kompakt-offenen Topologie eine stetige Multiplikation $(x, y)\to xy$ (vgl. z.B. BOURBAKI [2] X, § 2, Nr. 6, prop. 10). Da die Topologie auf $\hat{H}$ die kompaktoffene ist, ist nach einem Satz aus der Theorie der Funktionenräume [l. c.] die Abbildung $(x, y)\to c\circ R_xR_yR_{xy}^{-1}$ stetig). Es ist also $c\circ R_xR_yR_{xy}^{-1}=c$ für alle $(x, y)\in G\times G$ und alle $c\in\hat{H}$. Da man Entsprechendes für $R_yL_xR_{xy}^{-1}$ beweist, gilt schließlich für jedes $T\in\mathfrak{H}$ die Beziehung $c\circ T=c$ für alle $c\in\hat{H}$. Da die Charaktere die Punkte von H trennen, muß jedes T auf H konstant sein, woraus die Behauptung folgt.

Der Beweis von (2.4) ist eine Modifikation eines in der Gruppentheorie bekannten Verfahrens. Ist H ein zusammenhängender abelscher Normalteiler und daher eine Torusgruppe gewisser Mächtigkeit, so kann der Satz ohne die Voraussetzung der Lokalkompaktheit von G bewiesen werden (HOFMANN [5]).

§ 3. Einparametergruppen und Einparameterhalbgruppen

(3.1) Jede topologische Gruppe E, die stetiges, algebraisch homomorphes Bild der additiven Gruppe R der reellen Zahlen ist und nicht nur aus einem Punkt besteht, heißt *Einparametergruppe*. E heißt *Einparameterhalbgruppe*, wenn E stetiges, algebraisch homomorphes Bild der additiven Halbgruppe R_+ der nichtnegativen reellen Zahlen ist und nicht aus einem Punkt besteht. Gibt es eine Abbildung f_a eines Intervalls $[0, a]$ in eine algebraische Struktur mit der Eigenschaft, daß aus r_1, r_2 und $r_1+r_2\in[0, a]$ immer $f_a(r_1)f_a(r_2)=f_a(r_1+r_2)$ folgt, so bezeichnen wir diese Eigenschaft, um eine kurze Redeweise zu haben, mit $L(a)$. Hat f_a die Eigenschaft $L(a)$ und ist überdies eine homöomorphe Abbildung in eine topologisch-algebraische Struktur, so nennen wir die Punktmenge $f_a([0, a])$ einen *Strahl* und f_a einen *Homomorphismus von* $[0, a]$ *in* E.

(3.2) $(G.)$ sei eine topologisch-algebraische Struktur, die einen Strahl enthalte, der aus einer Abbildung f_a in der vorigen Nummer beschriebenen Weise hervorgeht. Besteht nun dieser Strahl nur aus monassoziativen Elementen, so gibt es eine eindeutig bestimmte Einparameterhalbgruppe E von G, die in dem Erzeugnis des Strahls enthalten ist. Es existiert ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R_+ in G, der auf $[0, a]$ mit f_a übereinstimmt.

BEWEIS. Der Beweis dieser Tatsache ist einem fast gleichlautenden Beweis von BOURBAKI in [2], Chap. V nachgebildet und bringt keine neuen Gesichts-

punkte, so daß wir ihn übergehen können. Der Grundgedanke beruht darauf, nachzuweisen, daß die Menge aller Potenzen der Elemente des Strahls in G gerade die gesuchte Einparameterhalbgruppe darstellt.

Ist G insbesondere eine Loop, und besteht der Strahl aus potenzassoziativen Elementen, so läßt sich dieser sogar in eine eindeutig bestimmte Einparametergruppe einbetten; die Menge aller positiven und negativen Potenzen von Elementen aus dem Strahl bildet dann die gesuchte Gruppe.

(3.3) Wir vermerken noch die bei BOURBAKI l.c. bewiesene Tatsache, daß jede Einparametergruppe entweder stetiges algebraisch isomorphes Bild von R oder ein stetiges algebraisch isomorphes Bild einer eindimensionalen Torusgruppe (und dann sogar ein isomorphes Bild derselben) darstellt. Entsprechend ist eine Einparameterhalbgruppe ein stetiges algebraisch isomorphes Bild von R_+ oder ein isomorphes Bild einer eindimensionalen Torusgruppe.

(3.4) Ein algebraischer Homomorphismus f von R_+ in eine topologisch-algebraische Struktur $(E, .)$ mit neutralem Element ist stetig, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{f(V)}$ des Bildes einer Umgebung V von 0 in R_+ kompakt ist und keine von $\{e\}$ verschiedene Halbgruppe enthält.

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{F}$ der Filter auf $\overline{f(V)}$, der von den abgeschlossenen Hüllen der Mengen aus $f(\mathfrak{U}(0))$ auf $\overline{f(V)}$ erzeugt wird. Ferner sei $H = \cap\{\overline{f(U)}; U \in \mathfrak{U}(0)\}$; dann gilt $HH \subseteqq \cap\{\overline{f(U)}\,\overline{f(U)};\ U \in \mathfrak{U}(0)\} \subseteqq \cap\{\overline{f(UU)};\ U \in \mathfrak{U}(0)\} = H$; denn erstens ist wegen der Stetigkeit von $(x, y) \to xy$ immer $\overline{A}\,\overline{A} \subseteqq \overline{AA}$ und zweitens durchläuft UU eine Basis von $\mathfrak{U}(0)$, wenn U den Filter $\mathfrak{U}(0)$ durchläuft. Jedes Element von H ist monassoziativ und erzeugt eine in H liegende Halbgruppe. Da H in $\overline{f(V)}$ enthalten ist, folgt nach Voraussetzung $H = \{e\}$. Es gilt demnach $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = \lim_{\mathfrak{F}} f(y) = e$; damit hat man einerseits

$$\lim_{y \to 0,\ y > 0} f(x+y) = \lim_{y \to 0,\ y > 0} f(x) f(y) = f(x) \text{ für } x \geqq 0$$

und andererseits

$$\lim_{y \to 0,\ x \geqq y > 0} f(x-y) = \lim_{y > 0,\ x \geqq y > 0} f(x) f(y)^{-1} = f(x);$$

d.h. f ist stetig. Ein genau entsprechender Satz gilt für alle algebraischen Homomorphismen von R in eine topologische Loop.

(3.5) Jeder algebraische Homomorphismus f von R_+ in eine lokalkompakte, eudoxische topologisch algebraische Struktur $(E, .)$ mit neutralem Element ist ein stetiger algebraischer Homomorphismus, wenn ein volles Intervall $[0, a]$ durch f in eine kompakte Umgebung von e abgebildet wird, die außer $\{e\}$ keine Halbgruppen enthält. Dies folgt unmittelbar aus der vorherigen Nummer.

ANMERKUNGEN. Der Bestand dieses Paragraphen geht im wesentlichen auf BOURBAKI [2], Chap. V zurück. Der Satz (3.4) stammt aus einer Arbeit von GLEASON [4]. Es gibt algebraisch isomorphe Bilder von R in der ebenen Vektorgruppe R^2 in der natürlichen Topologie, die keine stetigen Bilder von R darstellen, die aber zusammenhängend und lokal zusammenhängend sind und unendlichen lokalen Multikohärenzgrad besitzen [7].

§ 4. Eindeutigkeit von Einparametergruppen

(4.1) $(G, .)$ sei eine topologisch algebraische lokal monassoziative Struktur mit neutralem Element e bezüglich der zweistelligen Verknüpfung $(x, y) \to x \cdot y$. Gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$, auf der die Abbildung $x \to x^2$ eine eineindeutige Abbildung von U in G darstellt, so folgt daraus die Existenz einer Umgebung $V \in \mathfrak{U}(e)$, in der jedes von e verschiedene Element x_0 auf höchstens einer Einparameterhalbgruppe von G liegt, sofern x_0 denjenigen Zusammenhangskomponenten in V der durch x_0 laufenden Einparameterhalbgruppen angehört, auf denen e liegt.

BEWEIS. Ist $W \in \mathfrak{U}(e)$ eine Umgebung von e, die nur aus monassoziativen Elementen besteht, so wählen wir $V = W \cap U$. Es sei $x_0 \in V$, $x_0 \neq e$, und es gebe zwei stetige algebraische Homomorphismen f_1 und f_2 von R_+ in G derart, daß $f_1(0) = f_2(0) = e$ und $f_1(a) = f_2(b)$. Setzen wir nun voraus, daß $f_1([0, a])$ und $f_2([0, b])$ ganz in V liegen [d.h., daß x_0 jeweils auf der Zusammenhangskomponente der Einparameterhalbgruppen in V liegt, die $e = f_1(0) = f_2(0)$ enthält], so liegen alle Elemente $f_1(2^{-n}a)$ und $f_2(2^{-n}b)$ in V für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; wegen der Eineindeutigkeit von $x \to x^2$ gilt dann aber für alle natürlichen n die Gleichung $f_1(2^{-n}a) = f_2(2^{-n}b)$. Da sowohl f_1 wie f_2 stetig sind, ist $e = f_1(0) = f_2(0)$ Häufungspunkt dieser Punktmenge. Die stetigen Abbildungen $r \to f_1(ar)$ und $r \to f_2(br)$ von R_+ stimmen auf der in R_+ dichten Menge aller dyadischen Rationalzahlen $2^{-n}p$ (n und p natürliche Zahlen) überein, also auch auf ganz R_+. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(4.2) $(G, .)$ sei eine lokalkompakte, lokal einfache, lokal alternative topologische Loop. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$, auf der die Abbildung $x \to x^2$ eineindeutig ist.

BEWEIS. Wir wählen zunächst eine kompakte Umgebung U_0 so, daß $U_0 U_0$ frei ist von nicht trivialen Halbgruppen und alle Elemente aus $U_0 \times U_0$ alternativ sind. W sei eine offene Umgebung von e, für die $WW \subseteq U_0$ gilt. Da in $U_0 U_0$ keine nicht trivialen Halbgruppen existieren, gibt es in der kompakten Menge $U_0 \cap W^c$ keine Elemente der Ordnung 2. Es gibt sogar eine volle Umgebung $W'(e)$, die kein Quadrat eines Elementes aus $U_0 \cap W^c$ enthält, denn andernfalls hätte nämlich die Filterbasis auf $U_0 \cap W^c$, die aus den Mengen $(u; u \in U_0 \cap W^c, u^2 \in W')$ besteht, einen Adhärenzpunkt $z \in U_0 \cap W^c$ mit der Eigenschaft $z^2 = e$. Da G eine I-Loop ist, ist die Abbildung $x \to x^{-1} = e^{R_x^{-1}}$ definiert. Wir wählen nun eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ mit folgenden Eigenschaften $U = U^{-1}$ (z.B. kann man $U = U' \cap U'^{-1}$ setzen, wenn U' diese Eigenschaft noch nicht besitzt) und $UU \subseteq W' \cap W$. U hat nun die behauptete Eigenschaft: Es sei $x \in U$ und $x^2 = y^2$ mit einem $y \in U$. Alle folgenden Rechnungen führen wir in der von x und y erzeugten Gruppe aus. Wir setzen $p = x^{-1}y$ und bekommen $xp = y = p^{-1}x$ und allgemeiner $(p^m x)^2 = p^m x p^m x = p^m p^{-m} x^2 = x^2$ für alle $m = 1, 2, \ldots$. Jede Quadratwurzel von x^2 liegt entweder in W oder aber außerhalb U_0, dies gilt demnach für alle $p^m x$ ($m = 1, 2, \ldots$). Da $p \in UU \subseteq W$, folgt aus $p^n x \in W$ immer $p^{n+1} x \in WW \subseteq U_0$, also sogar $p^{n+1} x \in W$; da $x \in U$ natürlich in W liegt, haben wir für alle $m = 0, 1, \ldots$ die Aussage

$p^m x \in W$ und damit $p^m = p^m x \cdot x^{-1} \in WW \subseteq U_0$ abgeleitet. Daraus folgt aber gerade $p = e$, denn U_0 darf als Halbgruppe nur die triviale $\{e\}$ enthalten.

Dieser Beweis ist für Gruppen in ähnlicher Form von GLEASON in [4] angegeben.

§ 5. Existenz von Einparameterhalbgruppen

(5.1) *$(G, .)$ sei eine topologisch algebraische Struktur mit neutralem Element bezüglich der Verknüpfung $(x, y) \to x \cdot y = xy$. G sei lokal kompakt, eudoxisch. Dann enthält G eine Einparameterhalbgruppe.*

BEWEIS. $U \in \mathfrak{U}(e)$ sei eine kompakte Umgebung von e, die keine nichttrivialen Halbgruppen enthält. Auf U existiert eine Filterbasis $\mathfrak{B}$, deren Mengen nur aus monassoziativen Elementen bestehen und die gegen e konvergiert, aber nicht die Menge $\{e\}$ enthält. Es gibt nun eine Abbildung $x \to n(x)$ der Menge M aller monassoziativen Elemente in U in die Menge N_+ aller nicht negativen ganzen Zahlen, die durch folgende Festsetzung definiert ist: $n(e) = 0$, $n(x) = \max\{m; e, x, x^2, \ldots, x^m \in U\}$ falls $x \neq e$. Dieses Maximum existiert, da M keine nichttrivialen Halbgruppen enthält. Bezeichnet $[a]$ für ein reelles a die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als a, so ist auch die Abbildung $(r, x) \to [r\,n(x)]$ von $[0, 1] \times M$ in N_+ eindeutig definiert. Die Abbildung $x \to x^{[r\,n(x)]}$ bildet für ein festes $r \in [0, 1]$ die Menge M in U ab, weil x^n in U liegt für alle $0 \leqq n \leqq n(x)$. Wir bilden das topologische Produkt $P = P\{U_r; U_r = U, r \in [0, 1]\}$, d.h. die Menge aller Abbildungen von $[0, 1]$ in U. Dann ist P in der Produkttopologie nach dem Satz von TYCHONOFF kompakt. Q sei derjenige Teilraum von P, der aus den Abbildungen von $[0, 1]$ in M besteht. Da M in U nach (1.7) abgeschlossen ist, ist Q kompakt. Die Abbildung $x \to (r \to x^{[r\,n(x)]})$ von M in Q bildet die Filterbasis $\mathfrak{B}$ in eine Filterbasis in Q ab. Diese Filterbasis hat in Q wenigstens einen Adhärenzpunkt g. Es gibt daher eine Filterbasis $\mathfrak{B}_g$ auf M, deren Bild bei jener Abbildung gegen g konvergiert. $g = (r \to g(r))$ ist eine Abbildung von $[0, 1]$ in M. Da eine Filterbasis in einem Produktraum genau dann kovergiert, wenn sie komponentenweise konvergiert, haben wir die Beziehung $g(r) = \lim \mathfrak{B}_g\, x^{[r\,n(x)]}$ erhalten. Wegen $0\,n(x) = 0$ ist $g(0) = e$. Ferner gilt $g(1) \in \overline{U} \cap \overline{U^c}$; denn es ist $x^{n(x)} \in U$ und $x^{n(x)} x \in U^c$. Da $\lim \mathfrak{B}_g\, x = e$ gilt und $(a, b) \to ab$ stetig ist, folgt daraus in der Tat die Behauptung. g ist also nicht konstant. Liegen nun r_1, r_2 und $r_1 + r_2$ in $[0, 1]$, so haben wir $g(r_1 + r_2) = \lim \mathfrak{B}_g\, x^{[(r_1+r_2)\,n(x)]} = \lim_{\mathfrak{B}_g} x^{[r_1 n(x)]}\, x^{[r_2 n(x)]}\, x^{d(x)} = g(r_1)\, g(r_2)$, da $|d(x)| \leqq 2$ ist. g hat also die Eigenschaft $L(1)$. g wird nun nach dem in (3.2) erwähnten Verfahren zu einem algebraischen Homomorphismus f von R_+ in G fortgesetzt, für den $f(r) = g(r)$ für alle $r \in [0, 1]$ gilt. Da die abgeschlossene Hülle $\overline{f([0, 1])} = \overline{g([0, 1])}$ in M liegt, ist sie kompakt und frei von nichttrivialen Halbgruppen; nach (3.4) ist f also ein stetiger algebraischer Homomorphismus. Ist G insbesondere eine Halbloop, so läßt sich f dann in eindeutiger Weise zu einem Homomorphismus von R in G fortsetzen, wenn G lokal potenzassoziativ ist. Die Gesamtheit aller Adhärenzpunkt f in U von den Bildern aller gegen e konvergierenden Filter bei

der Abbildung $x \to (r \to x^{[r^n(x)]})$ entspricht genau der Gesamtheit aller Strahlen, die in M liegen und bis zum Rand von U laufen.

Eine Variante des Satzes II, (5.1), die sich fast wörtlich wie dieser beweisen läßt, lautet folgendermaßen:

(5.2) *$(G, .)$ sei eine topologisch-algebraische Struktur und K ein kompakter Teilraum von G mit folgenden Eigenschaften*

a) *e ist Häufungspunkt von monassoziativen Elementen in K.*

b) *Ist x ein monassoziatives Element aus K und gilt $x^n \in K$, dann gilt auch $x^m \in K$ für alle $m = 0, \ldots, n$.*

c) *Für jedes monassoziative x in K gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $x^n \notin K$.*

Unter diesen Voraussetzungen erhält K einen Strahl, d.h. das Bild des Intervalls $[0, 1]$ bei einem stetigen algebraischen Homomorphismus f von $[0, 1]$ in G.

(5.3) Es sei S derjenige Teilraum des Produktraums P, der aus allen Homomorphismen von $[0, 1]$ in U besteht. Die Beziehung $S \subseteq Q$ ist auf Grund der Definitionen trivial. Ist nun $r \to h(r)$ ein Element aus $\bar{S}$, der abgeschlossenen Hülle von S in Q, so existiert ein gegen h in Q konvergierendes Netz $(h_i)_{i \in I}$ aus Homomorphismen h_i von $[0, 1]$ in U. Sind ferner r_1 und r_2 zwei Elemente in $[0, 1]$ derart, daß $r_1 + r_2$ in $[0, 1]$ liegt, so rechnet man sehr leicht folgende Gleichungskette nach: $h(r_1 + r_2) = \lim_{i \in I} h_i(r_1) \cdot h_i(r_2) = \lim_{i \in I} h_i(r_1) \lim_{i \in I} h_i(r_2) = h(r_1) h(r_2)$; da die Abbildung h infolge der bei (5.1) für f angegebenen Gründe stetig sein muß, ist sie ein stetiger algebraischer Homomorphismus von $[0, 1]$ in G, und S ist in Q abgeschlossen.

(5.4) Die Menge A aller Punkte in U, die auf wenigstens einem Strahl liegen, ist in U abgeschlossen.

BEWEIS. Es sei $x \in \bar{A}$. Dann ist x Limes eines Netzes $(y_i)_{i \in I}$ von Punkten y_i, die auf Strahlen in U liegen. Es gibt also ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ $(f_i \in S)$, so daß $x = \lim_{i \in I} f_i(1)$. Da S kompakt ist, kann man, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, daß $\lim_{i \in I} f_i = f_0$ existiert (andernfalls könnte man eine kofinale Indexmenge $I' \subseteq I$ mit $\lim_{i \in I'} f_i = f_0$ finden). f_0 liegt nach (5.3) in S und es gilt $f_0(1) = x$; x liegt daher in A, w.z.b.w.

(5.5) $(G, .)$ sei eine eudoxische lokalkompakte topologische Loop. U sei eine offene relativ kompakte Umgebung von e, so daß UU nur aus potenzassoziativen Elementen besteht, welche sämtlich nicht endliche Gruppen erzeugen. Eine solche Loop nennen wir hinfort *lokal torsionsfrei*. Unter diesen Umständen gibt es zu jedem kompakten Teilraum K von $\overline{U}$, der e nicht enthält, eine natürliche Zahl l_K, so daß $y^l \notin U$, wenn $|l| \geqq l_K$ und $y \in K$.

BEWEIS. Es sei x ein Element aus U. Die *von x erzeugte zyklische Untergruppe* $\langle x \rangle$ ist entweder diskret, oder aber $\overline{\langle x \rangle}$ ist eine kompakte abelsche Gruppe, in der $\langle x \rangle$ dicht liegt; vgl. A. WEIL [*14*], p. 96. $\overline{\langle x \rangle}$ ist dann nicht total unzusammenhängend und nicht diskret, denn sonst hätte diese Gruppe

beliebig kleine, also z.B. in U liegende nichttriviale zyklische Untergruppen (1.4). Die Zusammenhangskomponente in $\overline{\langle x\rangle}$ ist als kompakte zusammenhängende abelsche Gruppe ohne beliebig kleine Untergruppen eine Torusgruppe und enthält also Elemente endlicher Ordnung im Durchschnitt mit U, was gerade ausgeschlossen war. $\langle x\rangle$ ist also diskret und hat mit UU einen endlichen Durchschnitt. Zu jedem Element x von $U-\{e\}$ existiert demnach eine kleinste natürliche Zahl $n(x)$, so daß $x^m \notin UU$ für alle $|m|>n(x)$. Die Abbildung $x\to n(x)$ ist oberhalb stetig auf U; denn aus $\lim_{i\in I,\, y_i\in U} y_i = x$ folgt $\lim_{i\in I,\, y_i\in U} y_i^m = x^m$ für alle m, also gilt $x^m \notin UU$, wenn $y_i^m \notin UU$ für alle i oberhalb eines festen Index i_0; sie hat auf jedem kompakten Teilraum K von U, der e nicht enthält, ein Maximum l_K, welches das Verlangte leistet.

(5.6) Eine lokal potenzassoziative Loop G, in der eine Umgebung U von e existiert mit der Eigenschaft, daß zu jedem $x\in U$ mit $x^m\in U$ eine Umgebung $U_{x,m}$ von x in U vorhanden ist, die bei $y\to y^m$ offen in U abgebildet wird, nennen wir *potenzoffen*.

$(G,.)$ sei eine lokalkompakte, lokal zusammenhängende, lokal potenzassoziative, eudoxische und lokal torsionsfreie topologische Loop, die überdies potenzoffen sei. Dann existiert eine Umgebung von e in G, deren sämtliche Elemente auf Einparameteruntergruppen liegen.

Beweis. Wir wählen eine offene zusammenhängende relativ kompakte Umgebung W von e, die ein festes Element a von G nicht enthält, für die $W=W^{-1}$ gilt; und $\overline{W}$ bestehe nur aus potenzassoziativen Elementen (so daß also die Abbildung $x\to x^{-1}$ als Übergang zum Inversen in jeder Untergruppe erklärt ist) und liege in einer Umgebung U, die die eingangs genannte Bedingung erfüllt. Mit p_n bezeichnen wir diejenige Abbildung von $\overline{W}$ in $\overline{W}\cup\{a\}$, die durch die Forderungen $p_n(x)=x^n$, wenn $x^n\in\overline{W}$ und $p_n(x)=a$ sonst definiert ist. Wir betrachten nun die Basis $\mathfrak{B}$ derjenigen offenen Umgebungen von e, deren Hüllen ganz in W enthalten sind. Zu jedem $V\in\mathfrak{B}$ gibt es eine ganze Zahl $n=k(V)>0$, so daß $p_n(\overline{W}-V)=\{a\}$: Dies folgt gerade aus (5.5). Angenommen, für ein $V\in\mathfrak{B}$ besitze $p_{k(V)}(V)$ einen Randpunkt y in $\overline{W}$. Die Menge $\mathfrak{M}=\{U\cap p_{k(V)}(V)\cap\overline{W};\ U\in\mathfrak{U}(y)\}$ ist eine Filterbasis in $p_{k(V)}(V)\cap\overline{W}$. Ihr Urbild in V bei $p_{k(V)}$ ist eine Filterbasis $\mathfrak{N}$ auf V, die wenigstens einen Adhärenzpunkt $x\in\overline{V}$ hat, denn $\overline{W}$ ist kompakt. Es gibt also auf V einen gegen x konvergierenden Filter $\mathfrak{F}$, der feiner ist als der von $\mathfrak{N}$ erzeugte, und dessen Bild bei $p_{k(V)}$ gegen y konvergiert. Es gilt also $\lim_{\mathfrak{F}} p_{k(V)}(z)=y$. Wäre nun $p_{k(V)}(x)=a$, so würde auch noch eine ganze Umgebung von x auf a abgebildet, was wegen $\lim_{\mathfrak{F}} p_{k(V)}(z)=y\in\overline{W}$ unmöglich ist. $p_{k(V)}$ ist also in x stetig, da $p_{k(V)}(x)=x^{k(V)}\in\overline{W}$. Es gibt nach Voraussetzung eine Umgebung $U_{x,k(V)}$ von x, so daß $p_{k(V)}(U_{x,k(V)}\cap V)$ offen ist. x liegt also nicht in V, sonst wäre eine Umgebung von y — nämlich $p_{k(V)}(U_{x,k(V)}\cap V)$ — in $p_{k(V)}(V)$ enthalten, und y wäre kein Randpunkt von $p_{k(V)}(V)$ in $\overline{W}$. Es muß also x in $\overline{W}-V$ liegen; $\overline{W}-V$ wird aber von $p_{k(V)}$ auf $\{a\}$ abgebildet im Widerspruch zu $y\neq a$. Der Teilraum $p_{k(V)}(V)$ hat also keinen Randpunkt in $\overline{W}$. Er ist

also in $\overline{W}$ offen und abgeschlossen und stimmt daher mit dem zusammenhängenden Raum $\overline{W}$ überein.

Es sei nun $x \neq e$ ein fester Punkt in W. Zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ existiert wenigstens ein $x_V \in V$ mit $x_V^{k(V)} = x$. Benützt man $\mathfrak{V}$ als durch $\subseteq$ geordnete Indexmenge, so bildet $(x_V)_{V \in \mathfrak{V}}$ ein gegen e konvergierendes Netz. Mit $n(V)$ bezeichnen wir die Zahl max $(n; x_V^m \in W, 0 \leq |m| \leq n)$. Dann ist $(r \to x_V^{[r n(V)]})_{V \in \mathfrak{V}}$ ein Netz auf dem kompakten Produktraum $P = P\{\overline{W}_r; W_r = W, r \in [0, 1]\}$. Es gibt also ein Unternetz $(r \to x_V^{[r n(V)]})_{V \in \mathfrak{V}'}$ mit zu $\mathfrak{V}$ kofinaler Teilmenge $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{V}$, welches in P gegen $r \to f(r)$ konvergiert. f ist aus den schon in (5.1) dargelegten Gründen ein stetiger algebraischer Homomorphismus von $[0, 1]$ in W mit $f(1) \in \overline{W} \cap \overline{W}^c$.

Angenommen, das Netz $(k(V)^{-1} n(V))_{V \in \mathfrak{V}'}$ hätte kein auf dem Raum R_+ aller nichtnegativen reellen Zahlen konvergentes Unternetz. Dann gäbe es zu jeder natürlichen Zahl s ein $V \in \mathfrak{V}'$, so daß $n(V') \geqq s k(V')$ gälte für alle $V' \subseteq V$ aus $\mathfrak{V}'$, d.h. es wäre $x_{V'}^{s k(V')} = x^s \in W$ für alle natürlichen s. Dann wäre aber notwendig $x = e$ im Widerspruch zur Wahl von x. Es existiert also eine zu $\mathfrak{V}'$ kofinale, durch $\subseteq$ geordnete Menge $\mathfrak{V}''$ mit $\lim_{V \in \mathfrak{V}''} \big(k(V)^{-1} n(V)\big) = r_0$. Es sei zunächst $r_0 \neq 0$. Dann gilt $1 = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} \big(r_0^{-1} n(V)\big)^{-1} k(V) = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} [r_0^{-1} n(V)]^{-1} k(V)$ oder $0 = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} [r_0^{-1} n(V)]^{-1} ([r_0^{-1} n(V)] - k(V))$. Zu jeder ganzen Zahl t gibt es also ein $V_0 \in \mathfrak{V}''$, so daß für alle $V \subseteq V_0$ in $\mathfrak{V}''$ die Ungleichungen $-n(V) \leqq \big([r_0^{-1} n(V)] - k(V)\big) t \leqq n(V)$ erfüllt sind. Für $z = f(r_0^{-1}) x^{-1} = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{[r_0^{-1} n(V)] - k(V)}$ gilt also wegen $W = W^{-1}$ für jedes ganze t die Beziehung $z^t \in \overline{W}$, denn nach der Definition von $n(V)$ und den eben angegebenen Ungleichungen liegen für $V \subseteq V_0$ alle Elemente $x_V^{([r_0^{-1} n(V)] - k(V)) t}$ in W. Dann muß aber $z = e$ oder $f(r_0^{-1}) = x$ gelten; x liegt dann auf einer Einparametergruppe.

Ist nun aber $\lim_{V \in \mathfrak{V}''} \big(k(V)^{-1} n(V)\big) = 0$, so bezeichnen wir $n(V)^{-1} k(V)$ mit $s(V)$ und haben $s(V) n(V) = k(V)$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\lim_{V \in \mathfrak{V}''} \big(s(V) - [s(V)]\big) = s_0 \in [0, 1]$ existiert (andernfalls würden wir zu einem geeigneten Unternetz übergehen). Dann gilt $f(s_0) = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{[s_0 n(V)]} = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{(s(V) - [s(V)]) n(V)}$; denn es gilt ja $\lim_{V \in \mathfrak{V}''} (s(V) - [s(V)] - s_0) = 0$; und für alle ganzen t existiert ein V_0, so daß für alle $V \subseteq V_0$ aus $\mathfrak{V}''$ die Ungleichungen $-n(V) \leqq ((s(V) - [s(V)]) n(V) - [s_0 n(V)]) t \leqq n(V)$ gelten.

Nach einem vorhin an analoger Stelle durchgeführten Schluß folgt daraus in der Tat die behauptete Gleichheit. Wir bekommen somit $x f(s_0)^{-1} = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{s(V) n(V)} \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{([s(V)] - s(V)) n(V)} = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} x_V^{[s(V)] n(V)} = \lim_{V \in \mathfrak{V}''} (x_V^{n(V)})^{[s(V)]} \in \overline{W W^{-1}} \subseteq U'$ mit einer geeigneten offenen relativ kompakten Umgebung U' von e. Nun gibt es zu einer kompakten Umgebung K von $f(1)$ in U', die e nicht enthält, eine natürliche Zahl $l(K)$ so, daß $x^l \notin U'$ für alle $|l| > l(K)$ und $y \in K$. Es gibt nun ein $V' \in \mathfrak{V}''$ derart, daß für alle $V \subseteq V'$, $V \in \mathfrak{V}''$ die Punkte $x_V^{n(V)}$ in K liegen und $|s(V)| > l(K) + 1$ ist, d.h., daß also $x_V^{n(V)[s(V)]}$ nicht in U' enthalten ist. Weil U' offen ist, liegt dann also $x f(s_0)^{-1}$ nicht in U' also erst recht nicht in $\overline{W W^{-1}}$.

Dieser Widerspruch beweist $\lim_{V \in \mathfrak{B}''} k(V)^{-1} n(V) \neq 0$; damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

(5.7) *$(G, .)$ sei eine n-dimensional lokal euklidische topologische Loop. Sie enthalte eine offene Umgebung U von e, so daß $U \times U$ nur diassoziative und kommutative Paare enthält und U die Eigenschaft hat, daß aus x, y, x^n und $y^n \in U$ und $x^n = y^n$ stets $x = y$ folgt, falls nur y in einer gewissen Umgebung $U_{x,n}$ von x in U liegt. Dann ist G potenzoffen.*

BEWEIS. Zu jedem $x \in U$ mit $x^n \in U$ gibt es eine kompakte Umgebung $U_{x,n}$, die zu einer n-dimensionalen abgeschlossenen Kugel homöomorph ist, und die bei $q_n = (x \to x^n)$ stetig eineindeutig, also homöomorph in U etwa auf $B_{x,n} = q_n(U_{x,n})$ abgebildet wird. $B_{x,n}$ ist n-dimensional und enthält innere Punkte (HUREWICZ-WALLMANN, [6] Chap. IV, § 4), z.B. x^n. Dieser Punkt hat eine in G offene Umgebung $W'' \subseteq B_{x,n}$, die bei q_n eine offene Umgebung W' von z als Urbild hat. Bei dem Homöomorphismus $R_{s^{-1}z}$ von G auf G wird eine Umgebung A' eines inneren Punktes s von $U_{x,n}$ offen und homöomorph in W' abgebildet. Schließlich wird A' durch $R_{(s^{-1}z)^{-n}} \circ q_n \circ R_{s^{-1}z}$ offen und homöomorph auf eine Umgebung A'' des Punktes s^n abgebildet. Es sei $a \in A'$. Dann gilt $R_{(s^{-1}z)^{-n}} \circ q_n \circ R_{s^{-1}z}(a) = a^n = q_n(a) = (a(s^{-1}z))^n (s^{-1}z)^{-n}$. A'' liegt also in $B_{x,n}$. Das bedeutet aber gerade, daß $U_{x,n}$ durch q_n offen abgebildet wird.

Der Hilfssatz (5.7) bleibt auch noch gültig, wenn G nicht lokal euklidisch, sondern lokal homogen im Sinne von MONTGOMERY [9] vorausgesetzt wird.

(5.8) *Ist G eine n-dimensionale, lokal euklidische, lokal alternative, kommutative und eudoxische Loop, dann ist G potenzoffen.*

BEWEIS. U sei eine relativ kompakte offene, von nichttrivialen Untergruppen freie Umgebung von e derart, daß $U \times U$ nur alternative Paare enthält. Es gelte nun $x^n = y^n \in U$ für x und y aus U. Wir wählen V so aus, daß $(\ldots((VV)V)\ldots)V$ mit insgesamt n Faktoren in W enthalten ist. Wäre nun yx^{-1} in V gelegen, so läge $(yx^{-1})^n$ in U und es müßte $yx^{-1} = e$ oder $x = y$ gelten. Zu jedem $x \in U$ mit $x^n \in U$ gibt es also eine kompakte Umgebung $U_{x,n}$, die bei $q_n = (x \to x^n)$ stetig eineindeutig, also homöomorph in U abgebildet wird. Dann folgt aber die Behauptung aus der vorigen Nummer.

Aus den Sätzen (5.6) *und* (5.8) *folgt also, daß in jeder n-dimensionalen lokal euklidischen, eudoxischen und lokal torsionsfreien, lokal alternativen und kommutativen Loop G eine Umgebung von e existiert, in der jeder Punkt auf wenigstens einer, und wegen* (4.1) *und* (4.2) *auf genau einer Einparametergruppe liegt.*

(5.9) *G sei eine lokal potenzassoziative eudoxische kompakte n-dimensionale topologische Loop. Zu einem Element $x = x_0$ gebe es eine Folge $(x_i)_{i \in N}$ von Elementen, so daß $\lim_{i \to \infty} x_i = e$ gilt und für $i < j$ die von x_i erzeugte zyklische Gruppe $\langle x_i \rangle$ in der von $\langle x_j \rangle$ erzeugten enthalten ist. Dann liegt x auf einer Einparametergruppe.*

BEWEIS. Die Menge $A = \overline{\bigcup \{\langle x_i \rangle ; i \in N\}}$ ist als Hülle einer Vereinigung einer aufsteigenden Kette zyklischer Gruppen eine kompakte eudoxische

abelsche Gruppe, die lokal einem direkten Produkt aus einer endlich dimensionalen Torusgruppe T^m und einer total unzusammenhängenden Gruppe isomorph ist (vgl. z.B. MONTGOMERY u. ZIPPIN [10], p. 182), die aber wegen (1.4) diskret sein muß. Die Zusammenhangskomponente Z von e in A ist offen in A. Dann sind Z und $Z^c \cap A$ abgeschlossen in A, also kompakt in G, da A abgeschlossen und G kompakt ist. Nach I, (3.8) gibt es ein $W \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $ZW \cap (Z^c \cap A)W = \emptyset$. Nun bezeichnen wir mit Z_i die zyklische Gruppe $\langle x_i \rangle$ für welche $x_i \in W$ gilt. Wäre $Z_i \cap (Z^c \cap A) \neq \emptyset$, so wäre $Z_i \cap (ZW)^c \neq \emptyset$. Es gäbe eine früheste Potenz x_i^n welche nicht in Z, aber dann in ZW läge. Diese kann aber nicht in $Z^c \cap A$ und damit nicht in A liegen. Daraus folgt $Z^c \cap A = \emptyset$ oder $Z = A$, d.h. A ist ein Torusgruppe, in welcher x enthalten ist. x liegt also sicher auf einer Einparametergruppe.

ANMERKUNGEN. Der Beweis von Satz (5.1) benutzt insofern einen meines Wissens neuen Gedanken, als der Satz von TYCHONOFF verwendet wird, dadurch werden die mannigfachen in der Gruppentheorie bekannten Beweisansätze abgekürzt und vereinheitlicht und durch die Anwendung des im Satz von TYCHONOFF verborgenen Auswahlaxioms der Verzicht auf Abzählbarkeitsforderungen ermöglicht. Die Sätze (5.5) bis (5.7) untersuchen die Frage, wie groß die von Einparametergruppen überdeckten Bereiche sein können. In diesem Paragraphen haben sie den Charakter von Hilfssätzen, die allerdings nicht ganz an der Oberfläche liegen. Das in (5.8) genannte Ergebnis werden wir im Verlaufe dieses Kapitels ohne Verwendung des Hilfssatzes (5.6) wesentlich verschärfen können; erst in einer späteren Arbeit [diese Ztschr. Bd. 70, S. 221 (3.1)] wird dieser Satz wieder wichtige Dienste leisten. Der Satz (5.9) unterscheidet sich von Satz (5.1) insofern, als er die Existenz einer Einparameteruntergruppe durch einen vorgegebenen Punkt liefert; dafür sind auch die benötigten Voraussetzungen wesentlich schärfer. Grob anschaulich könnte man sein Ergebnis dahingehend zusammenfassen, daß jedes Element mit beliebig kleinen Wurzeln sogar auf einer Einparametergruppe liegt.

§ 6. Eine spezielle Klasse von Strukturen

(6.1) $(G, .)$ sei eine topologisch algebraische Struktur mit neutralem Element e; sie sei monassoziativ konzentriert. Es existiere eine kompakte zusammenhängende Umgebung U von e und auf U eine Vollordnung $<$ derart, daß die durch sie auf U definierte Intervalltopologie mit der auf U induzierten Topologie übereinstimme. Dann ist G eudoxisch, wenn auf U aus $ac = bc$ stets $a = b$ folgt.

BEWEIS. Es sei $x \neq e$ ein monassoziatives Element in U und die Menge M aller seiner Potenzen mit positivem Exponenten liege in U. Wegen $x \neq e$ gilt entweder $x^2 < x$ oder $x^2 > x$. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x^2 > x$. Die Menge $A_x = \{z; z \in U, x^2 z > xz\}$ ist nicht leer; denn sie enthält e. Sie ist offen, denn zu jedem z mit $x^2 z > xz$ gibt es ein $V \in \mathfrak{U}(e)$, so daß $x^2(zV) > x(zV)$, da andernfalls doch eine gegen z konvergierende Folge $(z_i)_{i \in I}$ mit $x^2 z_i \leqq xz_i$ existieren müßte, woraus dann in der Intervalltopologie $x^2 z \leqq xz$ im Widerspruch zur Annahme folgen würde. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: A_x ist auch abgeschlossen in U. Dann ist $A_x = U$, denn U ist zusammenhängend. Oder aber es hat A_x eine obere Grenze a (d.h. einen größten Randpunkt a) in U. Für diesen gilt aber $x^2 a = xa$, woraus $x^2 = x$ folgte im Widerspruch zur Annahme. Es gilt also durchweg $x^2 z > xz$ für alle $z \in U$; d.h.

insbesondere, daß $x^3 > x^2$ gilt. Durch vollständige Induktion beweist man so die Monotonie der Folge $(x^n)_{n \in N}$ $(N = \{n; n = 0, 1, \ldots\})$. Es existiert also $\lim_{n \to \infty} x^n = u \in U$. Nun gilt aber $xu = \lim_{n \to \infty} x^{n+1} = u = eu$, woraus $x = e$ folgt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Der Beweis liefert darüber hinaus die Einsicht, daß aus $e < x \in U$, $x^2 \in U$ stets $e < x < x^2$ folgt. Denn andernfalls läge ja M zwischen e und x einschließlich, was eben als unmöglich nachgewiesen wurde.

Die Voraussetzung, daß die Rechtstranslationen auf U eineindeutig seien, ist durchaus wesentlich. Sie ist z. B. in jeder Loop erfüllt. Es gibt aber eine kommutative monassoziative topologisch-algebraische Struktur, die zu der reellen Halbgeraden $R_+ = [0, \infty[$ homöomorph ist (also die topologischen Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt), in der jedes Element idempotent und 0 neutrales Element ist. Als Verknüpfung definiere man auf R_+ z. B.:

$$(x, y) \to \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 (x + y)^{-1} & \text{wenn } x + y \neq 0. \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Ebenso ist die Voraussetzung des Zusammenhangs von U wesentlich. Das Cantorsche Diskontinuum als U genommen erfüllt die topologischen Voraussetzungen, abgesehen vom Zusammenhang. Es läßt sich mit der Struktur einer topologischen Gruppe ausstatten, die nicht lokal einfach ist.

Jede topologisch-algebraische Struktur $(G, .)$ mit einer Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$, die einem reellen Intervall homöomorph ist, erfüllt die Voraussetzungen von Satz zu (5.1), die bezüglich U gemacht worden waren.

(6.2) G sei eine topologisch-algebraische Struktur, wie sie in (5.6) angegeben war und U habe dieselbe Bedeutung wie dort. Der Rand von U in G besteht aus den Punkten $a = \min U$ und $b = \max U$ (ein Randpunkt zwischen a und b würde nämlich den Zusammenhang von U stören). Nach (5.1) enthält U einen Strahl; d. h. es existiert ein Homomorphismus f von $[0, 1]$ in U derart, daß $f(0) = e$ und $f(1) = a$ oder $f(1) = b$ gilt, wobei wir uns o. B. d. A. auf $f(1) = b$ und $b \in \overline{U^c}$ (d. h. auf $b \neq e$) festlegen wollen. Jeder Punkt von U, der zwischen e und b einschließlich liegt, kommt in dem zusammenhängenden Bild $f([0, 1])$ von $[0, 1]$ vor. Gibt es nun zu einem $x \in U$ mit $x < e$ ein $r \in [0, 1]$ mit $f(r) = x$, so gäbe es ein $[r, 0]$ ein s mit $e = f(s)$; denn $f([r, 1])$ ist zusammenhängend. Dann ist aber $f(s) = f(0)$, woraus $s = 0$ folgt, denn $f([0, 1])$ kann als zusammenhängender Teilraum des vollgeordneten topologischen Raums U nicht zu einem eindimensionalen Torus homöomorph sein. So wird also $[0, 1]$ durch f homomorph und sogar isomorph auf $\{z; z \in U, z > e\}$ abgebildet. Nach § 3 läßt sich der Strahl $f([0, 1])$ mindestens zu einer Einparameterhalbgruppe in G fortsetzen. Ist nun aber auch $a \neq e$, dann gibt es, da für jedes y mit $a < y < e$ eine natürliche Zahl n existiert, für die y^n nicht zwischen a und e liegt, einen zweiten Isomorphismus g von $[0, 1]$ auf $\{z; z \in U, z < e\}$ mit $g(1) = a$ und $g(0) = e$.

Ist nun G kompakt, so ist die Fortsetzung des Strahls $f([0, 1])$ eine Torusgruppe T [(3.3)], denn $f([0, 1])$ ist in G eine offene Menge und die besagte

Fortsetzung ist daher lokal isomorph zu R_+, kann aber aus Kompaktheitsgründen nicht zu R_+ isomorph sein. In diesem Fall ist also das Erzeugnis von U in G eine Torusgruppe. Diese ist offen in G, denn sie enthält U; sie ist abgeschlossen in G, weil sie kompakt ist. Alles in allem bildet sie die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G.

Ist G andererseits eine potenzassoziativ konzentrierte Loop, so hat der Strahl $f([0,1])$ eine Einparametergruppe als Fortsetzung ,zu der ein Homomorphismus f von R in G gehört. Die Menge $\{r; f([r,1]) \subseteq U\}$ hat ein Minimum r_0, welches echt unterhalb 0 liegt, da f von vornherein stetig ist. Wäre $f(r)$ in $f([0,1])$ enthalten für alle $r \in [r_0, 0]$, wäre also $f(r) = f(s(r))$ mit $s(r) \in [0,1]$ so gälte $f(s(r) - r) = e$ für alle betragsmäßig hinreichend kleinen Werte von $s(r) - r$, d.h. f wäre in keiner Umgebung von 0 eineindeutig. Es gibt also ein r mit $f(r) < e$. Mit den in dieser Nummer früher angewandten Schlüssen folgt, daß f das Intervall $[r, 1]$ auf die Menge $\{z; z \in U, f(r) \leqq z\}$ isomorph abbildet. $f(R)$ ist lokal isomorph zu G, woraus wir schließen, daß die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G eine Einparametergruppe darstellt.

(6.3) *Es gibt eine zum Raum R der reellen Zahlen homöomorphe kommutative, monassoziative, aber nicht assoziative (also auch nicht potenzassoziative) topologische Loop.*

BEWEIS. Auf R betrachten wir die Verknüpfung

$$(x, y) \to x \circ y = \begin{cases} x + y & \text{falls } xy \geqq 0 \\ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } xy < 0. \end{cases}$$

$(R, \circ)$ ist kommutativ und monassoziativ, aber nicht potenzassoziativ. Wir müssen noch nachweisen, daß $R_a = (x \to x \circ a)$ eine eineindeutige Abbildung ist. Daß diese Translationen R auf sich abbilden, folgt nämlich schon daraus, daß $\lim_{x \to \pm\infty} x \circ a = \pm\infty$, und daß die Verknüpfung stetig ist. Es sei nun $a > 0$. Dann gilt

$$x \circ a = \begin{cases} x + a & \text{falls } x \geqq 0 \\ \frac{x^3 + a^3}{x^2 + a^2} & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Nun gilt aber

$$\frac{d}{dx}(x \circ a)|_{x=y} = \begin{cases} 1 & \text{falls } y > 0 \\ \frac{3a^3y^3 + y^4 - 2a^3y}{(y^3 + a^3)^2} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Diese Ableitung ist für alle $y \neq 0$ größer als 0, da für $y < 0$ stets $a^3 y < 0$ gilt. Das Entsprechende beweist man für $a < 0$. In beiden Fällen ist also $x \to x \circ a$ eine eigentlich monotone Abbildung. Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden SATZ zusammen:

(6.4) *G sei eine zusammenhängende topologisch-algebraische Struktur mit neutralem Element e und einer Umgebung U aus* $\mathfrak{U}(e)$, *die einem abgeschlossenen*

reellen Intervall homöomorph ist (oder eine mit der Topologie verträgliche Vollordnung zuläßt und kompakt und zusammenhängend ist). Es werden wahlweise folgende Eigenschaften betrachtet:

a) G sei monassoziativ konzentriert,

b) G sei kompakt und monassoziativ konzentriert,

c) G sei potenzassoziativ konzentriert.

Aus a) folgt, daß G wenigstens eine Einparameterhalbgruppe enthält, aber genau zwei verschiedene, wenn e innerer Punkt von U und wenn G nicht kompakt ist. In jedem Fall wird U von Einparameterhalbgruppen ganz ausgefüllt. Eine Verschärfung dieses Ergebnisses ist nicht möglich; insbesondere braucht G nicht assoziativ zu sein. Aus b) folgt, daß G zu einer eindimensionalen Torusgruppe isomorph ist. Aus c) folgt, daß G zu der Gruppe der reellen Zahlen oder zu einer Torusgruppe isomorph ist.

Als Korollar formulieren wir den folgenden Satz

(6.5) *G sei eine kommutative Moufangloop, in der die Zusammenhangskomponente Z von e lokal einem reellen Intervall homöomorph ist; dann liegt Z im Zentrum von G.*

BEWEIS. Z ist homomorphes Bild der additiven Gruppe R der reellen Zahlen. Die Abbildung $x \to x^3$ bildet Z auf sich, aber zugleich ins Zentrum von G ab.

ANMERKUNGEN. Durch das Beispiel (6.3) wird erwiesen, daß der anscheinend bislang noch nicht formulierte Begriff der Monassoziativität schon in dem (topologisch noch verhältnismäßig einfachen) betrachteten Fall eine echte Abschwächung des Begriffes der Potenzassoziativität bildet. Das Aussagepaar (6.4) a) und (6.4) b) stellt ein erstes typisches Beispiel dafür dar, daß die Kompaktheit Assoziativität erzwingen kann, wo diese bei Lokalkompaktheit unter sonst gleichen Voraussetzungen noch nicht zu folgen braucht. Wir werden noch andere Sätze dieser Art von globalen Aussagen beweisen. Der Satz (6.4) c) wurde von SALZMANN in [13] durch einen Verweis auf einen Beweis von BOURBAKI in [2], Chap. V, § 2 bewiesen, was von unserem Vorgehen ziemlich abweicht

§ 7. Einparametergruppen in kommutativen alternativen Loops

(7.1) $(G, .)$ sei eine lokal diassoziative topologisch-algebraische Struktur mit neutralem Element e. Ferner seien f_1 und f_2 stetige algebraische Homomorphismen von R_+ in G und die Elemente der Halbgruppen $f_1(R_+)$ und $f_2(R_+)$ seien sämtlich paarweise vertauschbar, sobald sie in einer gewissen Umgebung V von e betrachtet werden. Dann ist die Abbildung $(r_1, r_2) \to g(r_1, r_2) = f_1(r_1) f_2(r_2)$ ein stetiger algebraischer Homomorphismus von $R_+ \times R_+$ in G.

BEWEIS. Es seien r_1, r_1', r_2 und r_2' rationale Zahlen aus R_+. Dann wird

$$(r_1 + r_1', r_2 + r_2') = (r_1, r_2) + (r_1', r_2')$$

abgebildet auf

$$g(r_1 + r_1', r_2 + r_2') = f_1(r_1 + r_1') f_2(r_2 + r_2') = f_1\left((p_1 + p_1') q^{-1}\right) f_2\left((p_2 + p_2') q^{-1}\right)$$

mit einem gemeinsamen Nenner q und entsprechenden ganzen Zahlen p_1, p_1', q und q_1' derart, daß $(f_1(q^{-1}), f_2(q^{-1}))$ in $U \times U$ liegt, wobei $U \times U$ nur diassoziative

Paare enthalte und U in V liege. Dann gilt nämlich $g(r_1+r_1', r_2+r_2') = f_1(q^{-1})^{p_1+p_1'} \cdot f_2(q^{-1})^{p_2+p_2'} = f_1(q^{-1})^{p_1} \cdot f_2(q^{-1})^{p_1'} \cdot f_1(q^{-1})^{p_2} \cdot f_2(q^{-1})^{p_2'} = g(r_1, r_2)\, g(r_1', r_2')$. Die Abbildung g ist stetig und ist auf einer in $R_+ \times R_+$ dichten Unterhalbgruppe ein stetiger algebraischer Homomorphismus, also auch auf dem vollen Raum $R_+ \times R_+$.

Ist G insbesondere eine lokal alternative Loop, so gilt das Vorhergehende für stetige algebraische Homomorphismen f_1 und f_2 von R in G, und g ist ein stetiger algebraischer Homomorphismus von $R^2 = R \times R$ in G. Im ursprünglichen Fall ist das Bild von $R_+ \times R_+$ bei g eine Halbgruppe, die die Halbgruppen $f_1(R_+)$ und $f_2(R_+)$ enthält; das Entsprechende gilt für den Fall einer Loop. Wir formulieren also den Satz

(7.2) In einer lokal diassoziativen (bzw. lokal alternativen) topologischen Loop erzeugen zwei elementweise vertauschbaren Einparameterhalbgruppen (bzw. Einparametergruppen) stets eine kommutative Halbgruppe (bzw. Gruppe).

(7.3) $(G, .)$ sei eine lokal alternative kommutative Loop mit neutralem Element e. H sei die Menge aller Punkte von G, die auf Einparametergruppen liegen. Dann ist H eine charakteristische Unterloop.

BEWEIS. Es sei $(x, y) \to H \times H$. Dann gibt es zwei stetige algebraische Homomorphismen f_1 und f_2 von R in G mit $f_1(1) = x$ und $f_2(1) = y$. Die Abbildung $r \to g(r) = f_1(r) f_2(r)$ ist ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R in G definiert eine Einparametergruppe, auf der xy liegt. Da G eine I-Loop ist, bildet H eine Unterloop, die charakteristisch sein muß, weil jeder Automorphismus von G eine Einparametergruppe wieder in eine solche überführt.

In jeder kompakten Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ ist $U \cap H$ abgeschlossen [(5.4)] Dann ist aber auch ganz H abgeschlossen, wenn H Normalteiler ist, denn $H = k^{-1}(k(U \cap H))$, wo k den Restklassenhomomorphismus von G auf G/H angibt.

(7.4) G sei eine lokalkompakte topologische Loop; V sei eine kompakte Umgebung aus $\mathfrak{U}(e)$ in der jeder Punkt auf genau einem Strahl mit $f_x(1) = x$ liege. P bezeichnet das Produkt $P\{V_r; V_r = V, r \in [0, 1]\}$. Die Abbildung $x \to f_x$ von V in P, die jedem Element von V das Element von P zuordnet, welches als stetiger algebraischer Homomorphismus zu der durch x laufenden Einparametergruppe mit der Normierung $f_x(1) = x$ gehört, ist stetig.

BEWEIS. Die Abbildung $x \to x^n$ ist ein Homöomorphismus auf der Menge aller x mit $x^n \in W$. Daraus folgt die Stetigkeit der Umkehrabbildung $x \to f_x(1/n)$ für alle x, für die $f_x(1/n)$ in W liegt. Durch Zusammensetzung von Abbildungen dieses Typs folgt, daß $x \to f_x(pq^{-1})$ eine stetige Abbildung darstellt für alle rationalen Zahlen pq^{-1}, solange der Definitionsbereich so gewählt ist, daß x und $f_x(pq^{-1})$ in W liegen. Zu jeder Umgebung $V \in \mathfrak{U}(e)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f_x(r) \in V$ für alle $|r| < \varepsilon$ und alle $x \in W$ gilt (denn es gibt ja ein natürliches n, so daß das Bild von V bei $x \to x^n$ die Umgebung W umfaßt; es genügt also $\varepsilon < 1/n$ zu wählen). Nun sei r eine reelle Zahl, für die x_0 und $f_{x_0}(r)$ in W liegen.

$V = \overline{V} \in \mathfrak{U}(e)$ sei so gewählt, daß $(V(f_{x_0}(r)))\,V \subseteq W$. Es sei $(x_i)_{i\in I}$ ein gegen x_0 konvergierendes Netz. Zu V wähle man ε wie angegeben und betrachte $f_{x_i}(r) = f_{x_i}(r')\,f_{x_i}(r-r')$ mit rationalem r' und mit $|r-r'|<\varepsilon$. Der Grenzwert $\lim\limits_{i\in I} f_{x_i}(r')$ existiert und ist gleich $f_{x_0}(r')$ und alle $f_{x_i}(r-r')$ liegen in V. Nun liegt $f_{x_0}(r')$ in $V f_{x_0}(r)$; wählen wir ein $i_0 \in I$ so, daß aus $i > i_0$ stets $f_{x_i}(r') \in V f_{x_0}(r')$ folgt, so gilt für alle diese i immer $f_{x_i}(r) = f_{x_i}(r')\,f_{x_i}(r-r') \in (V(V f_{x_0}(r)))\,V$. Da zu jedem $V' \in \mathfrak{U}(f_{x_0}(r))$ ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $(V(V f_{x_0}(r)))\,V \subseteq V'$ existiert, folgt daraus $\lim\limits_{i\in I} f_{x_i}(r) = f_{x_0}(r)$.

Unter Beachtung der Stetigkeit $r \to f_x(r)$ auf $[0,1]$ und der in diesem Beweis benutzten Tatsachen kann man auch die Stetigkeit der Abbildung $(x, r) \to f_x(r)$ feststellen.

(7.5) *G sei lokal alternativ, kommutativ, lokalkompakt und eudoxisch. H sei die charakteristische Unterloop, in der alle Punkte auf Einparametergruppen liegen. Ist H ein Normalteiler, dann enthält G/H keine Einparametergruppe.*

Beweis. Es sei $r \to h(r) = g(r)H$ ein nichttrivialer stetiger algebraischer Homomorphismus von R in G/H und k der Restklassenhomomorphismus von G auf G/H; mit G' werde das Urbild $k^{-1}(h(R))$ von $h(R)$ bezeichnet, welches H umfaßt. Ist $x \in G'$ ein Element aus $g(r)H$, so hat es in $g\left(\frac{r}{2}\right)H$ eine Quadratwurzel, denn $g\left(\frac{r}{2}\right)^2$ hat die Form xy^2 mit einem geeigneten y^2 aus H, da ja jedes Element von H eine Quadratwurzel besitzt. Das Element $g\left(\frac{r}{2}\right)y^{-1}$ ist dann die gesuchte Quadratwurzel von x, wir bezeichnen sie mit $x^{2^{-1}}$. Auf diese Weise kann induktiv zu x eine Folge $x^{2^{-n}}$ von 2^n-ten Wurzeln gefunden werden, so daß stets $x^{2^{-n}}$ die Quadratwurzel von $x^{2^{-(n-1)}}$ ist. Nun sei $Z_n = \langle x^{2^{-n}} \rangle$ die von $x^{2^{-n}}$ erzeugte zyklische Gruppe. $\bigcup\{Z_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ist Vereinigung einer aufsteigenden Kette zyklischer Gruppen und ist daher eine abelsche Gruppe. Dasselbe gilt dann auch von der abgeschlossenen Hülle A dieser Vereinigung. A ist eine lokalkompakte eudoxische abelsche Untergruppe von G', die x enthält. Trivialerweise ist demnach $k(A) \subseteq k(G') = h(R)$. Andererseits umfaßt $k(A)$ die Menge $\left\{h(s);\ s = r \cdot \frac{m}{2^n},\ m \text{ ganze}, n \text{ natürliche Zahl}\right\}$, die in $h(R)$ dicht ist. Weil $k(A)$ lokalkompakt und in einer Einparametergruppe $h(R)$ dicht ist, muß $k(A) = h(R)$ gelten. Die Zusammenhangskomponente $Z(e)$ in A ist isomorph einer Gruppe $R^p \times T^q$, wo p und q natürliche Zahlen bedeuten. Wäre sie ganz in H enthalten, so wäre $k(A)$ ein homomorphes Bild einer total unzusammenhängenden lokalkompakten abelschen Gruppe und wäre entweder diskret oder enthielte beliebig kleine Untergruppen, was für $k(A) = h(R)$ sicher nicht zutrifft. Es gibt also einen Punkt $x \in G' - H$, der in Z, also auf einer Einparametergruppe liegt, die nicht in H verläuft; dies ist ein Widerspruch.

Wir haben im Beweis (7.5) die gegebenen Voraussetzungen nicht voll ausgenützt, sondern vielmehr den entscheidenden Teil des folgenden Satzes bewiesen:

(7.6) *G sei eine lokalkompakte potenzassoziative Loop. H sei ein abgeschlossener Normalteiler von G, in dem jedes Element eine p-te Wurzel habe für ein festes p. Jedes Element von H sei ferner mit jedem Element von G vertauschbar (was z.B. der Fall ist, wenn H im Zentrum von G liegt). G/H sei isomorph einer Einparametergruppe. Dann gibt es eine Vertretergruppe in G, d.h. eine Einparametergruppe E in G, die bei dem Restklassenhomomorphismus k von G auf G/H abgebildet wird. Liegt H im Zentrum von G, so ist $G = EH$.*

BEWEIS. Nach dem Beweis von (7.5) existiert eine nicht in H gelegene Einparametergruppe E in G. Dann ist $k(E)$ eine nichttriviale Einparameteruntergruppe der Einparametergruppe G/H und muß daher ganz G/H ausfüllen.

Das Ergebnis der letzten Nummern kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

(7.7) *Eine lokalkompakte eudoxische, lokal alternative, kommutative Loop G enthält eine charakteristische Unterloop H, in der jeder Punkt auf einer Einparametergruppe liegt; ist H normal in G, so ist H abgeschlossen und die Faktorloop G/H enthält keine Einparametergruppe.*

An späterer Stelle, wenn die Struktur von H weiter aufgeklärt sein wird, können wir über G/H weitere Aussagen machen. H ist z.B. immer normal, wenn G Moufangsch ist; dann ist nämlich jede charakteristische Unterloop normal.

§ 8. Fastvektorräume

(8.1) Eine potenzassoziative Loop $(G, +)$ nennen wir einen *Fastvektorraum über einem Körper K*, wenn die Elemente r von K als Linksoperatoren $\mathfrak{x} \to r \cdot \mathfrak{x}$ auf G operieren und zwar derart, daß sie sämtlich algebraische Endomorphismen von G bilden mit der Körpereins als identischem Automorphismus und stets $(r+s)\cdot\mathfrak{x} = r\cdot\mathfrak{x} + s\cdot\mathfrak{x}$ und $(rs)\cdot\mathfrak{x} = (r\cdot(s\cdot\mathfrak{x}))$ für alle $\mathfrak{x} \in G$ gilt. Daraus folgt sofort $0\cdot\mathfrak{x} = 0$ (wobei das neutrale Element von G und die Null in K mit demselben Buchstaben bezeichnet wird; wenn die Verknüpfung in G durch $\dotplus$ angegeben wird, so muß sie von der Addition in K wohl unterschieden werden). Ist K ein topologischer Körper, so heißt G *ein topologischer Fastvektorraum*, wenn G eine topologische Loop ist, und die Abbildung $\mathfrak{x} \to r\cdot\mathfrak{x}$ ein topologischer Endomorphismus und $r \to r\cdot\mathfrak{x}$ eine stetige Abbildung von K in G ist.

(8.2) Ist G ein K-Fastvektorraum, so sind alle von 0 verschiedenen Elemente von K als Operatoren auf G Automorphismen von G auf G

BEWEIS. Die Menge aller Elemente aus K, die ein Element $\mathfrak{x} \in G$ annullieren, bildet ein Ideal in K und stimmt also mit $\{0\}$ oder K überein. Wird also ein Element $\mathfrak{x} \in G$ von einem $r \in K$ annulliert, so ist entweder $r = 0$ oder $\mathfrak{x}$ wird von jedem $s \in K$ annulliert, also insbesondere von 1; d.h. $1\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{x} = 0$. Für $r \neq 0$ ist also $\mathfrak{x} \to r\cdot\mathfrak{x}$ ein Automorphismus, und zwar von G auf G, denn ein Element $\mathfrak{x} \in G$ hat das Urbild $r^{-1}\cdot\mathfrak{x}$. Jeder Fastvektorraum, der von einem Element $\mathfrak{x}$ erzeugt wird, ist ein Vektorraum isomorph zu R; dabei ist das

Erzeugnis einer Teilmenge M in einem Fastvektorraum G der kleinste Unterfastvektorraum, der M enthält.

(8.3) *Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines kommutativen alternativen Fastvektorraums G erzeugen stets einen Untervektorraum von G, wenn K ein Primkörper von Charakteristik $p \neq 0$ ist, oder wenn G topologisch und K der Körper der reellen Zahlen ist.*

Beweis. Das Erzeugnis von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ enthält die Menge $K \cdot \mathfrak{x} + K \cdot \mathfrak{y}$; hat K die Charakteristik $p \neq 0$, so ist diese das Erzeugnis von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im alten Sinn. Im andern Fall ist die Behauptung mit den Schlüssen von (7.1) zu beweisen, die wir hier nicht wiederholen wollen.

(8.4) Es gibt z.B. über dem Körper aus drei Elementen nach Bol [*1*] einen kommutativen alternativen nicht assoziativen Fastvektorraum, der sogar moufangsch ist. Jeder zu R homöomorphe Fastvektorraum ist assoziativ [(6.4)]. Das in (6.2) angegebene Beispiel erfüllt außer $(r+s) \cdot \mathfrak{x} = r \cdot \mathfrak{x} + s \cdot \mathfrak{x}$ alle Axiome eines Fastvektorraums. Siehe auch Pickert [*16*], S. 49.

(8.5) *Ein lokal alternativer topologischer K-Fastvektorraum ist kommutativ, wenn K die Charakteristik 0 hat und der Primkörper von K die natürliche Topologie des Körpers der rationalen Zahlen trägt.*

Beweis. Es gilt: $\mathfrak{x}+\mathfrak{y} = (n \cdot 1/n)(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = n \cdot (1/n \cdot \mathfrak{x} + 1/n \cdot \mathfrak{y}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot (1/n \cdot \mathfrak{x} + 1/n \cdot \mathfrak{y})$. Sobald aber $(1/n \cdot \mathfrak{x},\ 1/n \cdot \mathfrak{y})$ in $U \times U$ liegt, nämlich in einer Umgebung, die nur alternative Paare enthält, ist $n(1/n \cdot \mathfrak{x} + 1/n \cdot \mathfrak{y}) = 1/n \cdot \mathfrak{x} + n(1/n \cdot \mathfrak{y} + 1/n \cdot \mathfrak{x}) - 1/n \cdot \mathfrak{y}$ und es gilt $(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \mathfrak{x} + \lim_{n\to\infty} n \cdot (1/n \cdot (\mathfrak{y}+\mathfrak{x})) - \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{y}+\mathfrak{x}$. Weil $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in der von $1/n \cdot \mathfrak{x}$ und $1/n \cdot \mathfrak{y}$ erzeugten Gruppe liegen, ist G trivialerweise alternativ.

(8.6) G sei ein topologischer Fastvektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. h sei ein lokaler Homomorphismus von G in eine topologische Loop $(H, +)$. Dann läßt sich h zu einem eindeutigen bestimmten Homomorphismus h' von G in H fortsetzen.

Beweis. Zunächst die Eindeutigkeit: h' und h'' seien zwei Homomorphismen von G in H, die auf einer Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ in G übereinstimmen. Zu jedem $\mathfrak{x} \in G$ gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß $1/n \cdot \mathfrak{x} \in U$. Nun ist $h'(1/n \cdot \mathfrak{x}) = h''(1/n \cdot \mathfrak{x})$ und $h'(\mathfrak{x}) = n \cdot h'(1/n \cdot \mathfrak{x}) = n \cdot h''(1/n \cdot \mathfrak{x}) = h''(\mathfrak{x})$. Nun sei der lokale Homomorphismus h mit der Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ als Definitionsbereich gegeben. Zu jedem $\mathfrak{x} \in G$ wählen wir wieder eine natürliche Zahl n, so daß $1/n \cdot \mathfrak{x} \in U$ und setzen $h'(\mathfrak{x}) = n \cdot h(1/n \cdot \mathfrak{x})$. Hätten wir eine zweite natürliche Zahl n dieser Eigenschaft gewählt, so läge $\frac{1}{r} \cdot \mathfrak{x}$ auch bei einem gemeinsamen Vielfachen r von m und n in U (etwa $r = sm = tm$) und es gälte $m \cdot h(1/m \cdot \mathfrak{x}) = sm \cdot h(1/sm \cdot \mathfrak{x}) = tn \cdot h(1/tn \cdot \mathfrak{x}) = n \cdot h(1/n \cdot \mathfrak{x})$. Die Definition von h' hängt also nicht von n ab. h' ist ein Homomorphismus: $h(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = h'\left(n \cdot 1/n(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\right) = n \cdot h(1/n \cdot \mathfrak{x} + 1/n \cdot \mathfrak{y}) = n\left(h(1/n \cdot \mathfrak{x}) + h(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = n \cdot h(1/n \cdot \mathfrak{x}) + n \cdot h(1/n \cdot \mathfrak{y}) = h'(\mathfrak{x}) + h'(\mathfrak{y})$ mit einem natürlichen n, für welches $1/n \cdot (\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$, $1/n \cdot \mathfrak{x}$ und $1/n \cdot \mathfrak{y}$ in U liegen. Da h in einer Umgebung von 0

mit h' übereinstimmt, ist h' in 0 stetig und relativ offen und ist daher nach I, (2.14) stetig und relativ offen.

(8.7) *Zwei lokal isomorphe Fastvektorräume sind isomorph.*

BEWEIS. Ist h ein lokaler Isomorphismus des Fastvektorraums G auf eine Umgebung von 0 in H, einem Fastvektorraum, so ist die Fortsetzung h' ein Isomorphismus von G in H. Umgekehrt läßt sich der lokale Isomorphismus h^{-1}, der eine Umgebung von 0 in H auf eine Umgebung von 0 in G abbildet, zu einem Isomorphismus von H in G fortsetzen, der sich als Umkehrabbildung von h' erweist.

(8.8) *Ein topologischer R-Fastvektorraum ist einfach zusammenhängend.*

BEWEIS. Ist G ein topologischer R-Fastvektorraum, so ist G kurvenzusammenhängend und lokal kurvenzusammenhängend, sowie einfach kurvenzusammenhängend; denn jede geschlossene Kurve K in G ist 0-homotop bei der Homotopie $(\xi, r) \to r \cdot \xi$ von $K \times [0, 1]$ in G. Dann ist G auch einfach zusammenhängend in dem früher angegebenen Sinne (NOVOSAD [*11*]).

(8.9) *Ein lokaler Fastvektorraum* ist eine topologische Loop $(G, +)$, die eine Umgebung U von 0 besitzt derart, daß jedes $x \in U$ auf genau einem Strahl mit dem stetigen algebraischen Homomorphismus f_x von $[0, 1]$ in G mit $f_x(1) = x$ liegt, und daß $f_x(r) + f_y(r) = f_{x+y}(r)$ für alle x und y gilt, die zusammen mit $x + y$ in U liegen. Wir bezeichnen dann das Element $f_x(r)$ stets mit $r \cdot x$. Schließlich wird gefordert, daß die Abbildung $x \to r \cdot x$ auf $1/r \cdot U$ stetig sei.

(8.10) G sei ein lokaler Fastvektorraum. Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter R-Fastvektorraum F_G, der zu G lokal isomorph ist.

BEWEIS. Die Eindeutigkeit folgt aus (8.7).

$\mathfrak{E}$ sei die Menge aller Einparametergruppen von G; mit $U \in \mathfrak{U}(e)$ sei eine Umgebung von e in G bezeichnet, wie sie in (8.9) beschrieben wurde. Ist $E \in \mathfrak{E}$, so bezeichne f_E einen Homomorphismus von R in G, der das Intervall $[a_E, b_E]$ isomorph auf die Zusammenhangskomponente von e in $E \cap U$ abbildet. In dem Produktraum $P = P\{R_E; R_E = R, E \in \mathfrak{E}\}$ betrachten wir diejenige Teilmenge Q, die aus allen Punkten $(x_E)_{E \in \mathfrak{E}}$ besteht, deren sämtliche Koordinaten bis auf eine gleich null sind. Jedes $x \in U$ liegt auf genau einer Einparametergruppe E_x. Die Abbildung g von U in Q, die dem Punkt $x \in U$ dasjenige Element $(x_E)_{E \in \mathfrak{E}}$ in Q zuordnet, für welches $x_{E_x} = f_{E_x}^{-1}(x)$ und $x_F = 0$ für $x \notin F$ gilt, bildet U eineindeutig in Q ab, wenn wir über U noch voraussetzen, daß für jede Einparametergruppe E in G der Raum $E \cap U$ zusammenhängend ist; dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn notfalls kann man diejenigen Punkte von U weglassen, die sich nicht mit 0 durch einen ganz in U liegenden Strahl verbinden lassen. Ist s eine reelle Zahl, für die x und sx in U liegen, so gilt $g(s \cdot x) = s \cdot g(x)$, wobei $s \to s \cdot \xi$ die Skalarmultiplikation in Q als Untermenge des Vektorraums P angibt. Nun definieren wir eine Verknüpfung in Q. Zu zwei Elementen ξ und η in Q gibt es eine

natürliche Zahl n derart, daß $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$, $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})$ und $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})$ in U liegen. Wir setzen $\mathfrak{x} \circ \mathfrak{y} = n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right)$. Ist nun m eine zweite natürliche Zahl, die dieselben Forderungen wie n erfüllt, so gilt $\mathfrak{x} \circ \mathfrak{y} = (nm)\,1/m \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = nm \cdot g\left(1/m \cdot (g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y}))\right) = nm \cdot g\left(g^{-1}(1/nm \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/nm \cdot \mathfrak{y})\right)$. Dieser letzte Ausdruck ist symmetrisch in n und m, woraus $n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = m \cdot g\left(g^{-1}(1/m \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/m \cdot \mathfrak{y})\right)$ folgt; daraus folgt nun seinerseits die Unabhängigkeit der Definition der Verknüpfung von der Auswahl der natürlichen Zahl n. Nun sei ferner r eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt $r \cdot \mathfrak{x} \circ r \cdot \mathfrak{y} = n \cdot g^{-1}(1/n \cdot r \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot r \cdot \mathfrak{y})) = n \cdot g\left(r \cdot \left((g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y}))\right)\right) = rn \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = r \cdot (\mathfrak{x} \circ \mathfrak{y})$ mit einem natürlichen n, für welches $g^{-1}(1/n \cdot r \cdot \mathfrak{x})$, $g^{-1}(1/n \cdot r \cdot \mathfrak{y})$, $r \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$ $r \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})$ und $r \cdot \left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right)$ in U liegen. Die Beziehung $(rs) \cdot \mathfrak{x} = r \cdot (s \cdot \mathfrak{x})$ ist trivial in Q. Die Relation $(r+s) \cdot \mathfrak{x} = r \cdot \mathfrak{x} \circ s \cdot \mathfrak{x}$ folgt unschwer mit den bisher angewandten Methoden: $r \cdot \mathfrak{x} \circ s \cdot \mathfrak{x} = n \cdot g\left(g^{-1}(r \cdot 1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(s \cdot 1/n \cdot \mathfrak{x})\right) = n \cdot g\left(r \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + s \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})\right) = n \cdot g\left((r+s) \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})\right) = (r+s)\,n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})\right) = (r+s) \cdot \mathfrak{x}$, weil $r \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$ und $s \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$ auf derselben Einparametergruppe liegen. Natürlich muß n hinreichend groß gewählt werden. Aus $\mathfrak{x} \circ \mathfrak{y} = \mathfrak{x} \circ \mathfrak{y}'$ folgt bei Auswahl eines geeigneten n die Gleichung $n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = 1/n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y}')\right)$, woraus man zuletzt $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}'$ ableiten kann. Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ in Q gegeben, so wähle man n so groß, daß man zu $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$ in U und $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})$ in U ein y in U so finden kann, daß $g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + y = g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})$; dann gilt mit $1/n \cdot \mathfrak{y} = g(y)$ die Beziehung $\mathfrak{x} \circ \mathfrak{y} = n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = n \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{z})\right) = \mathfrak{z}$. Wir bezeichnen $\mathfrak{y}$ mit $-\mathfrak{x} \circ \mathfrak{z}$. Entsprechend definiert man $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}$ durch $(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}) \circ \mathfrak{x} = \mathfrak{z}$. Q ist also ein R-Fastvektorraum. Wir definieren eine Abbildung h von Q auf die Zusammenhangskomponente Z von e in G durch folgende Festsetzung: Zu jedem Q nehme man eine natürliche Zahl n, für die $1/n \cdot \mathfrak{x}$ in $g(U)$ enthalten ist und setze $h(\mathfrak{x}) = n \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})$. Wiederum ist diese Definition von n unabhängig und stimmt auf $g(U)$ mit g^{-1} überein. Sehr rasch erkennt man die Eigenschaft $s \cdot h(\mathfrak{x}) = h(s \cdot \mathfrak{x})$. Jeder Punkt x aus der Zusammenhangskomponente von e in G liegt auf einer Einparametergruppe, ist also etwa n-te Potenz eines Elementes x' aus U und es gilt daher $x = n \cdot g^{-1}(g(x')) = h(n \cdot g(x'))$; x hat also ein Urbild in Q. Man rechnet nach, daß $h(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = n \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x} + 1/n \cdot \mathfrak{y}) = n \cdot \left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})\right) = n \cdot f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})}(1) = f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})}(n) = f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})}(n) + f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})}(n) = n \cdot f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})}(1) + n \cdot f_{g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y})}(1) = n \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x}) + n \cdot g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{y}) = h(\mathfrak{x}) + h(\mathfrak{y})$ gilt für geeignet gewähltes natürliches n. h ist also ein algebraischer Operatorhomomorphismus von $(Q, \circ)$ auf Z. Auf Q betrachten wir die gröbste Topologie, in der erstens g^{-1} auf $g(U)$ ein Homöomorphismus ist und in der zweitens die Abbildungen $\mathfrak{x} \to r \cdot \mathfrak{x}$ Homöomorphismen von Q auf Q sind. Eine Subbasis der offenen Mengen dieser Topologie sind diejenigen Mengen V, für die ein $r \in R$ existiert, so daß $r \cdot V \subseteq g(U)$ und daß $g^{-1}(r \cdot V)$ in U offen ist. Ist $g^{-1}(r \cdot V)$ offen in U, so ist auch $g^{-1}(s \cdot V)$ offen in U, wenn $s \cdot V \subseteq g(U)$, denn es gilt $rs^{-1} \cdot g^{-1}(s \cdot V) = g^{-1}(r \cdot V)$ und die Abbildung $x \to rs^{-1}$. x ist auf $sr^{-1} \cdot U$ ein Homöomorphismus. Die angegebene Festsetzung definiert eine Topologie auf

G, in der die Verknüpfung $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \to \mathfrak{x} \circ \mathfrak{y}$ sowie die Abbildung $\mathfrak{x} \to r \cdot \mathfrak{x} = nr \cdot g\left(g^{-1}(1/n \cdot \mathfrak{x})\right)$ stetig sind. Der algebraische Homomorphismus h stimmt auf der Umgebung $g(U)$ von 0 mit g^{-1} überein, ist also in 0 stetig und relativ offen und ist daher ein Homomorphismus und sogar ein lokaler Isomorphismus. Der so gebildete Fastvektorraum F_G leistet das in der Behauptung Verlangte. Die Abbildung $(r, \mathfrak{x}) \to r \cdot \mathfrak{x}$ von $R \times Q$ in Q ist übrigens stetig, wenn Q alternativ ist: Es sei $\lim_{i \in I} r_i = r_0$ und $\lim_{i \in I} \mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_0$, dann gilt $\lim_{i \in I} (r_0 \mathfrak{x}_0 - r_i \mathfrak{x}_i) = \lim_{i \in I} (r_0 \mathfrak{x}_0 - r_i \mathfrak{x}_0 + r_i \mathfrak{x}_0 - r_i \mathfrak{x}_i) = 0$.

(8.11) *Ein zusammenhängender lokaler Fastvektorraum G besitzt eine universelle Überlagerungsloop (G, f) und diese ist isomorph (F_G, h).*

BEWEIS. F_G ist einfach zusammenhängend; G ist schlicht überlagert von F_G bei h; F_G ist also eine einfach zusammenhängende Überlagerungsloop von G; diese ist aber bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Daraus die Behauptung.

(8.12) *G sei ein R-Fastvektorraum. $\mathfrak{x}$ liege im Zentrum von G. Dann liegt $R \cdot \mathfrak{x}$ im Zentrum von G.*

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{y} = r \cdot \mathfrak{x}$ und $R_a R_b R_{a+b}^{-1}$ sei eine Translation aus $\mathfrak{H}$. Ferner sei $\mathfrak{y}^{R_a R_b R_{a+b}^{-1}} = \mathfrak{z}$. Dann gilt $(\mathfrak{y} + a) + b = \mathfrak{z} + (a + b)$ und $(1/r \cdot \mathfrak{y} + 1/r \cdot a) + 1/r \cdot b = 1/r \cdot \mathfrak{z} + (1/r \cdot a + 1/r \cdot b)$ oder $(1/r \cdot \mathfrak{y})^{R_a R_b R_{a+b}^{-1}} = 1/r \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{x}^{R_a R_b R_{a+b}^{-1}} = \mathfrak{x}$, weil $\mathfrak{x}$ im Zentrum liegt. Also ist $\mathfrak{z} = r \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Entsprechendes gilt für $R_a L_b R_{a+b}^{-1}$. Daher bleibt $\mathfrak{y}$ bei einem Erzeugenden-System von $\mathfrak{H}$ fest, also bei ganz $\mathfrak{H}$. Somit muß $\mathfrak{y}$ im Zentrum liegen.

(8.13) *G sei ein lokaler Fastvektorraum und sei zusammenhängend und nicht einfach zusammenhängend. Dann enthält G einen zusammenhängenden, nicht einfach zusammenhängenden Normalteiler, der im Zentrum von G liegt, also insbesondere eine abelsche Gruppe ist.*

BEWEIS. (F_G, h) sei die universelle Überlagerungsloop von G. Der Kern $\tilde{K}$ von h ist ein diskreter Normalteiler von F_G, der also im Zentrum von F_G liegt. Nach (8.12) liegen sämtliche Elemente von $R \cdot \tilde{K}$ im Zentrum von F_G; daher bildet $\langle R \cdot \tilde{K} \rangle$ einen zusammenhängenden zentralen Normalteiler von F_G. Dann ist $h\left(\langle R \cdot \tilde{K} \rangle\right)$ eine normale Untergruppe von G, die überdies im Zentrum von G liegt. Denn es sei $y \in h\left(\langle R \cdot \tilde{K} \rangle\right)$, also z. B. $y = h(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x} \in \langle R \cdot \tilde{K} \rangle$, dann sei $y^{R_a R_b R_{a+b}^{-1}} = z$; die Gleichung $(y + a) + b = z + (a + b)$ besagt dasselbe. Es gibt nun Elemente a und b in F_G mit $h(a) = a$ und $h(b) = b$, für welche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{R_a R_b R_{a+b}^{-1}}$ oder $(\mathfrak{x} + a) + b = \mathfrak{x} + (a + b)$ gilt, woraus $(y + a) + b = y + (a + b)$ oder $z = y$ folgt.

(8.14) Jeder topologische R-Fastvektorraum G, der einen Homomorphismus und zugleich lokalen Isomorphismus h in eine topologische Loop besitzt, so daß $h(G)$ keinen abgeschlossenen Unterfastvektorraum enthält, ist eine abelsche Gruppe.

BEWEIS. Es ist zu zeigen, daß mit dem Kern $\tilde{K}$ von h stets $\langle R \cdot \tilde{K} \rangle = G$ gilt. Gäbe es ein $\mathfrak{x}$ in G, das nicht in $\langle R \cdot \tilde{K} \rangle$ läge, so würde $R \cdot \mathfrak{x}$ isomorph durch h in $h(G)$ abgebildet, was gerade ausgeschlossen war.

(8.15) *G sei ein lokalkompakter lokaler Fastvektorraum. Dann enthält G eine größte kompakte zusammenhängende Untergruppe H und diese ist ein charakteristischer zentraler (also abelscher) Normalteiler.*

BEWEIS. Die in (8.13) angegebene Gruppe $\langle R \cdot \tilde{K} \rangle$ ist isomorph einem Vektorraum, der infolge der vorausgegesetzten Lokalkompaktheit hier zu R^n isomorph ist; $\tilde{K}$ ist isomorph der Untergruppe $\{(m_1, \ldots, m_n);\ m_1 \text{ ganz}\}$ und $H = h(\langle R \cdot \tilde{K} \rangle)$ ist schließlich isomorph einer Torugsruppe T^n und ist daher kompakt. Es sei y ein Element von G, das nicht in dieser Gruppe enthalten sei. Dann ist $(n \cdot y)_{n \in N}$ eine Menge ohne Häufungspunkt in G, denn $R \cdot y$ wird durch h isomorph abgebildet. Jede Unterloop von G, die H echt umfaßt, ist daher nicht kompakt. H ist charakteristisch, weil die Eigenschaft, größte kompakte Untergruppe zu sein, bei Automorphismen erhalten bleibt.

(8.16) *G sei ein lokalkompakter lokaler Fastvektorraum, der einer kompakten Loop H lokal isomorph sei. Dann ist G eine Gruppe.*

BEWEIS. Der lokale Isomorphismus h von G in H läßt sich zu einem Homomorphismus h' von G in H fortsetzen. $h'(G)$ ist ein kompakter lokaler Fastvektorraum und ist daher eine Torusgruppe [(8.15)]. Diese enthält aber keinen abgeschlossenen Untervektorraum. Dann folgt die Behauptung aus (8.14).

(8.17) *G sei ein lokaler Fastvektorraum und eine Moufangloop. Dann ist die Zusammenhangskomponente Z von 0 in G eine abelsche Gruppe [vgl. hingegen* (8.4)].

BEWEIS. F_G ist kommutativ nach (8.5), also auch G. Die Menge der Elemente der Ordnung drei in der Zusammenhangskomponente von 0 ist diskret, denn $3 \cdot x = 0$ ist nicht für beliebig kleine x erfüllbar. Nach (2.3) ist Z eine abelsche Gruppe. Es gilt schärfer: Z liegt im Zentrum von G; denn die Abbildung $x \to 3 \cdot x$ bildet auf Z sich ab; Z liegt nämlich jedes Element auf einer Einparametergruppe.

(8.18) *G sei ein lokalkompakter, lokaler Fastvektorraum. Dann enthält G eine Unterloop, die dem direkten Produkt aus dem zentralen größten kompakten Normalteiler K von G und einem maximalen, in G enthaltenen abgeschlossenen Fastvektorraum L isomorph ist. $K + L$ hat die Eigenschaft, daß jedes nicht in $K + L$ gelegene Element x auf einem eindimensionalen Vektorraum $R \cdot x$ liegt, der mit $K + L$ den Durchschnitt $\{0\}$ hat.*

BEWEIS. K sei der nach (8.15) existierende größte kompakte Normalteiler von G. Ist H ein abgeschlossener lokaler Unterfastvektorraum, so ist H genau dann ein Fastvektorraum, wenn $K \cap H = \{0\}$. Denn $H \cap K$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von K, die keine Elemente endlicher Ordnung enthält, wenn H ein Fastvektorraum ist, und stimmt dann mit $\{0\}$ überein. Ist umgekehrt $H \cap K = \{0\}$, so wird H bei dem Restklassenhomomorphismus h von G auf G/H isomorph abgebildet, und G/H ist ein Fastvebtorraum. Nun sei L ein abgeschlossener lokaler Unterfastvektorraum von G, der bezüglich der Eigenschaft $L \cap K = \{0\}$ maximal sei; ein solcher existiert nach dem Zornschen Lemma.

Da K im Zentrum liegt, ist $K+L$ eine Unterloop von G, die direktes Produkt von K und L ist. L ist ein Fastvektorraum. Es sei $x \in G-(K+L)$. Wegen $x \notin K$ existiert eine abgeschlossene Einparametergruppe $R \cdot x$ isomorph zu R. Die abgeschlossene Untergruppe $R \cdot x \cap L$ ist wegen $x \notin L$ zyklisch, also etwa gleich $\langle r \cdot x \rangle$ mit $r \in R$. Ist y ein Element aus L mit $r \cdot y = r \cdot x$, so ist $x-y$ ein Element aus K und x liegt in $K+L$ im Widerspruch zur Annahme.

Ob $G=K+L$ gilt, muß offen bleiben; jedenfalls ist G/K einem Fastvektorraum isomorph, der ein isomorphes Bild von L enthält.

(8.19) *Ist unter den Voraussetzungen von* (8.18) *G/K höchstens zweidimensional, dann ist G eine abelsche Gruppe isomorph dem direkten Produkt eines Untervektorraums von R^2 mit einer Torusgruppe.*

BEWEIS. G/K ist eine Vektorgruppe [(8.3)], dann auch L. Dabei ist L höchstens zweidimensional; wäre die Dimension von G/K zwei und die von L eins, so wäre mit $x \notin K+L$ die Loop $\langle R \cdot x, L \rangle$ ein zweidimensionaler Vektorraum im Widerspruch zur Maximalität von L. Es gilt also $G=L+K$.

(8.20) G sei eine eudoxische, lokalkompakte, lokal alternative, kommutative Loop. G enthält eine charakteristische Unterloop H, die ganz von Einparametergruppen überdeckt wird und die ihrerseits eine Unterloop enthält, die dem direkten Produkt aus einem in H zentralen charakteristischen Normalteiler H_1, der einer endlichdimensionalen Torusgruppe isomorph ist, und einem in H maximalen Fastvektorraum H_2, der zu einem kommutativen Fastvektorraum isomorph ist. Ist H normal, so enthält G/H keine Einparametergruppe.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus (7.7) und (8.18).

(8.21) *Ist G eine lokaleuklidische, eudoxische und lokal torsionsfreie, lokalalternative, kommutative Loop, so ist H, die von Einparametergruppen überdeckte Unterloop, die Zusammenhangskomponente von e in G und ist daher normal. Sie ist nach* (8.20) *einem kommutativen Fastvektorraum isomorph; G/H ist diskret.*

BEWEIS. Nach (5.6) enthält H eine Umgebung von e und ist wegen I, (3.2) offen. Nach I, (3.1) ist H auch abgeschlossen und umfaßt mindestens die Zusammenhangskomponente von e in G, denn e ist ein in H gelegener Punkt. Andererseits ist H kurvenzusammenhängend und wird also von dieser Zusammenhangskomponente ganz ausgefüllt. Genau wenn H offen ist, ist G/H diskret.

Jede lokaleuklidische zusammenhängende torsionsfreie alternative und kommutative eudoxische Loop ist demnach ein topologischer Fastvektorraum.

Für das Folgende beweisen wir zunächst einige Hilfssätze aus der Theorie der alternativen und kommutativen Loops.

(8.22) Ist G eine beliebige alternative kommutative Loop, so ist die Menge T_n aller Elemente, deren Ordnung n teilt, ein Normalteiler (n ist eine natürliche Zahl). Die Menge T_∞ aller Elemente endlicher Ordnung ist ebenfalls ein Normalteiler von G. Falls G topologisch ist, so ist natürlich auch die abgeschlossene Hülle $T=\overline{T_\infty}$ von T_∞ ein Normalteiler von G.

BEWEIS. Die Abbildung $f_n = (x \to x^n)$ von G in sich ist ein Endomorphismus mit dem Kern T_n. Zusammen mit allen T_n bleibt auch $T_\infty = \cup \{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ invariant bei sämtlichen Translationen der inneren Transformationsgruppe $\mathfrak{H}$ von G [vgl. I, (14)].

(8.23) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen Normalteiler G_n von G, der aus sämtlichen Elementen von G besteht, die eine Ordnung besitzen, die das $k \cdot g \cdot V \cdot (1, 2, 3, \ldots, n)$ teilt.

BEWEIS. Ist $l = k \cdot g \cdot V \cdot (1, \ldots, n)$, so setzen wir einfach $G_n = T_l$.

Ist G eine Torsionsloop, d.h. haben alle Elemente von G endliche Ordnung, so ist $G = \cup \{G_n; n = 1, 2, \ldots\}$.

(8.24) In dieser und in den folgenden Nummern sei stets G eine lokalkompakte, eudoxische, alternative und kommutative Loop. Die von Einparametergruppen überdeckte charakteristische Unterloop H sei als normal vorausgesetzt. *Wir bezeichnen diese Eigenschaften kurz mit* $N(G)$.

Hat nun G die Eigenschaft $N(G)$ und ist G/H eine Torsionsloop, so ist G/H total unzusammenhängend; d.h. H ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G.

BEWEIS. $G_n \cdot H$ ist eine Unterloop in G. Ist nun U eine Umgebung von e in G, die keine nichttrivialen Untergruppen enthält, so wählen wir eine abgeschlossene Umgebung V von e in U derart, daß alle g-ten und niedrigeren Potenzen von Elementen aus V in U liegen, wobei g das $k \cdot g \cdot V \cdot (1, \ldots, n)$ bezeichne.

Nun ist der Durchschnitt von V mit G_n gerade gleich $\{e\}$, denn jedes Element x von $V \cap G_n$ erzeugt eine zyklische Untergruppe, deren Ordnung $g = k \cdot g \cdot V \cdot (1, \ldots, n)$ teilt, die daher in U liegt. Dann ist aber $x = e$, weil U keine nichttrivialen Gruppen enthält. G_n ist diskret (und also abgeschlossen) in $G_n \cdot H$.

$G_n \cap H$ ist ein diskreter Normalteiler von $G_n H$. $G_n H/(G_n \cap H)$ ist ein direktes Produkt aus einer diskreten Loop $G_n/(G_n \cap H)$ und einer zu H lokal isomorphen Loop $H/(G_n \cap H)$. In $G_n H/(G_n \cap H)$ ist $H/(G_n \cap H)$ die offene Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes. Da $G_n H/(G_n \cap H)$ zu $G_n H$ lokal isomorph ist, muß H, das Urbild von $H/(G_n \cap H)$ in $G_n H$ offen sein. Dann ist H aber auch abgeschlossen [I, (3.1)] und enthält die Zusammenhangskomponente von e in $G_n H$. Da H zusammenhängend ist, ist dieser Normalteiler gerade die in $G_n H$ offene Zusammenhangskomponente von e in $G_n H$ und $G_n H/H = (G/H)_n$ ist diskret [H ist eine Unterloop mit Division!]. $G_n H$ ist normal in G. Nun ist aber $G/H = \cup \{(G/H)_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Es sei Z die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes in G/H, dann ist $Z = \cup \{(G/H)_n \cap Z; n = 1, 2, \ldots\}$.

Da $(G/H)_n \cap Z$ in Z diskret ist, liegt diese Loop für alle n im Zentrum von Z [I, (5.12)]. Deswegen liegt Z im eigenen Zentrum und ist daher eine zusammenhängende lokalkompakte abelsche Gruppe. Eine solche besitzt aber einen

maximalen kompakten Normalteiler K, so daß Z/K einer Vektorgruppe isomorph ist. $K \cap (G/H)_n$ ist endlich, und offen in $Z \cap (G/H)_n$; d.h.

$$(Z \cap (G/H)_n/(K \cap (G/H)_n) \cong ((((G/H)_n \cap Z)K)/K$$

ist diskret. Eine Vektorgruppe kann jedoch keine aufsteigende abzählbare Vereinigung diskreter Gruppen sein. Also ist $Z = K$ und ist daher kompakt. Z ist also eine Torusgruppe geeigneter Dimension und ist dann und nur dann aufsteigende abzählbare Vereinigung diskreter Untergruppen, wenn diese Dimension null ist, d.h. wenn Z nur einen Punkt enthält.

Wir haben damit bewiesen, daß G/H total unzusammenhängend ist.

(8.25) Hat G die Eigenschaft $N(G)$ und ist H torsionsfrei, d.h. einem Fastvektorraum isomorph, so ist H die Zusammenhangskomponente von e in G.

BEWEIS. U sei eine kompakte Umgebung von e, die keine nichttrivialen zyklischen Untergruppen enthalte. Es sei x ein Element aus UH, für welches $\langle x \rangle \subseteq UH$ gelte. Da UH abgeschlossen ist [I, (3.9); (7.4)], liegt auch $\overline{\langle x \rangle}$ in UH. Wäre $\langle x \rangle \cap H \neq \{e\}$, so wäre $\langle x \rangle \cap H$ eine zyklische Untergruppe von H, die etwa von h_x' erzeugt sein möge; h_x' sei gleich x^m. In H existiert ein eindeutig bestimmtes Element h_x derart, daß $h_x^m = h_x'$. Die Gruppe $\langle x h_x^{-1} \rangle$ hat mit H den Durchschnitt $\{e\}$ und hat in G/H dasselbe Bild wie $\langle x \rangle$. Wir nehmen nun o.B.d.A. an, es sei $\langle x \rangle \cap H = \{e\}$ und, da H abgeschlossen ist und keine nichttrivialen kompakten Untergruppen enthält, auch $\overline{\langle x \rangle} \cap H = \{e\}$. Nun ist $\overline{\langle x \rangle}$ eine total unzusammenhängende und eudoxische abelsche Gruppe, denn die Zusammenhangskomponente von $\overline{\langle x \rangle}$ müßte nichttriviale Einparametergruppen enthalten. Als solche ist sie aber diskret. Da sie in der Faktorgruppe isomorph auf eine in der Umgebung UH liegende, also kompakte Gruppe abgebildet wird, ist sie endlich. Die einzigen in der Umgebung UH liegenden Untergruppen von G/H sind also endlich. Die abgeschlossene Hülle T der Torsionsloop von G hat mit dem abgeschlossenen torsionsfreien Normalteiler H den Durchschnitt $\{e\}$. Das Produkt TH ist direkt. In G/T ist TH/T isomorph zu H. Da G/T torsionsfrei ist, ist $(G/T)/(TH/T)$ nach dem eben Bewiesenen eudoxisch und enthält andererseits keine Einparametergruppen und ist daher diskret. Daher ist TH/T offen in G/T, weshalb auch TH offen ist in G. Die Loop T ist eudoxisch und enthält keine Einparametergruppen, ist also diskret und stimmt daher mit T_∞ überein. Nach (8.24) ist H die Zusammenhangskomponente von e in TH und muß auch in G die Zusammenhangskomponente von e bilden.

(8.26) Hat G die Eigenschaft $N(G)$, so ist H die Zusammenhangskomponente von e in G.

BEWEIS. Es sei T wieder die abgeschlossene Hülle der Torsionsloop von G. Dann ist $T \cap H$ die in H enthaltene Torusgruppe. Diese ist also normal in G. In $G/(T \cap H)$ ist $H/(T \cap H)$ torsionsfrei und bildet nach (8.25) die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes in $G/(T \cap H)$; d.h.

$$(G/(T \cap H))/(H/(T \cap H)) = G/H$$

ist total unzusammenhängend; daraus folgt die Behauptung.

(8.27) *G sei eine lokalkompakte, eudoxische, zusammenhängende, alternative und kommutative topologische Loop. Die Unterloop H, die von Einparametergruppen ganz überdeckt wird, sei normal. Dann enthält G ein direktes Produkt aus einem größten kompakten zentralen Normalteiler H_1, der einer endlichdimensionalen Torusgruppe isomorph ist und aus einem maximalen alternativen, kommutativen Fastvektorraum H_2, der zu einer Unterloop von G/H_2 isomorph ist. G wird von Einparametergruppen ganz überdeckt.*

BEWEIS. G ist zusammenhängend und daher in H enthalten. Die Behauptung folgt dann aus (8.20).

Für Moufangloops gewinnen wir daraus das in (2.2) auf einfachere Weise gewonnene Ergebnis zurück.

(8.28) *G sei nun eine kompakte, eudoxische, kommutative und alternative Loop. Dann ist H, die Untergruppe von G, die von Einparametergruppen überdeckt wird* [(8.16)], *normal in G.*

BEWEIS. Die Normalteiler T_∞, T und G_n seien definiert wie in (8.22) und (8.23). Wie in (8.24) sieht man ein, daß die G_n sämtlich diskrete, also abgeschlossene und daher kompakte Normalteiler bilden; als solche sind sie notwendig endlich. In der Unterloop G_nH ist H das Komplement des (als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen) abgeschlossenen Teilraums $\cup(xH;\ xH\cap H=\emptyset,\ x\in G_n)$ [vgl. I, (3.1)] und ist daher offen und abgeschlossen in G_nH; somit ist H in G_nH Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes. H ist also in G_nH normal für alle n, d.h. H wird von allen Translationen $R_xR_yR_{xy}^{-1}$ in sich abgebildet, falls x und y in G_nH liegen für ein geeignetes n. Daher wird H durch $R_xR_yR_{xy}^{-1}$ auch in sich abgebildet, wenn x und y in T_∞ H liegen; H ist demnach normal in $T_\infty H$, da Entsprechendes für $R_yL_xR_{xy}^{-1}$ gilt.

Liegen nun x und y in T, so gibt es Netze $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_j)_{j\in J}$ auf $T_\infty H$, die gegen x bzw. y konvergieren. Ist z ein Element von H, so gilt z.B. $((z+x_i)+y_j)-(x_i+y_j)\in H$. Da H abgeschlossen ist, folgt daraus $((z+x)+y)-(x+y)\in H$, d.h. H ist normal in $T=T\cdot H$.

Dann ist aber nach (8.26) H die Zusammenhangskomponente von e in T.

Nun sei A eine beliebige Translation aus der inneren Transformationsgruppe $\mathfrak{H}$ von G. Dann bildet A den Normalteiler T in sich ab. A induziert auf T einen Homöomorphismus auf sich, der e festläßt und die Zusammenhangskomponente H von e in T auf sich abbildet. Das heißt H bleibt bei den Translationen von $\mathfrak{H}$ als Ganzes fest und ist daher normal in G.

(8.29) SATZ: *G sei eine kompakte eudoxische kommutative und alternative Loop. Dann ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes in G eine endlich dimensionale Torusgruppe.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt direkt aus (8.26) und (8.28).

(8.30) SATZ: *Jede alternative, kommutative, kompakte, zusammenhängende, eudoxische Loop ist assoziativ.*

§ 9. Ein Gegenbeispiel

(9.1) G sei die Punktmenge des euklidischen Raumes R^3. $(x\,y)\to\langle x, y\rangle$ sei das innere Produkt des Vektorraums G. Mit A bezeichnen wir den Homöomorphismus $x=(x_1, x_2, x_3)\to\left(x_1+\frac{x_1^3}{\langle x, x\rangle}, x_2, x_3\right)$ von G auf G. A ist in der Tat eineindeutig und überall umkehrbar stetig, und jeder Punkt von G ist Bildpunkt. A ist sogar reell analytisch außerhalb von $0=(0, 0, 0)$. Es gilt $A(r\,x)=r\,A(x)$ für alle $r\in R$. Die Vektoren x und y seien linear unabhängig. Dann ist der Einheitsvektor n_{xy} mit $n_{xy}\cdot|[A(x), A(y)]|=[A(x), A(y)]$ definiert, wo $(x, y)\to[x, y]$ das äußere Produkt bezeichne und $x\to|x|=\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ die übliche Norm. $\mathfrak{B}_{xy}$ sei der Untervektorraum $\{z;\langle n_{xy}, z\rangle=0\}$. Mit P_{xy} bezeichnen wir die Orthogonalprojektion von G auf $\mathfrak{B}_{xy}$, d.h. die Abbildung $v\to v-n_{xy}\cdot\langle n_{xy}, v\rangle$. Zu jedem $u\in\mathfrak{B}_{xy}$ existiert nun genau ein $v\in G$, so daß $P_{xy}(v)=u$ und $A(v)\in\mathfrak{B}_{xy}$: es sei nämlich mit einem noch unbestimmten Parameter s_u gerade $v=u+s_u\cdot n_{xy}$. Dann muß unter Beachtung von $\langle n_{xy}, u\rangle=0$ stets gelten:

$$\begin{aligned}0=\langle n_{xy}, A(v)\rangle&=\left\langle n_{xy}, v+\left(\frac{v_1^3}{\langle v, v\rangle}, 0, 0\right)\right\rangle\\&=\left\langle n_{xy}, u+s_u\cdot n_{xy}+\left(\frac{(u_1+n_{xy1}\cdot s_u)^3}{\langle u+s_u\cdot n_{xy}, u+s_u\cdot n_{xy}\rangle}, 0, 0\right)\right\rangle\\&=s_u+n_{xy1}\cdot\frac{(u_1+n_{xy1}\,s_u)^3}{u^2+s_u^2}\end{aligned}$$

(wobei unter u^2 natürlich $\langle u, u\rangle$ zu verstehen ist) oder

$$(s_u^3+u^2 s_u)+\left(u_1 n_{xy1}^{\frac{1}{3}}+(n_{xy1}^{\frac{1}{3}})^2 s_u\right)^3=0,$$

wo $n_{xy1}^{\frac{1}{3}}$ die reelle dritte Wurzel aus n_{xy1} angeben soll. Die Summe von zwei gleichsinnig monotonen Funktionen ist wieder monoton, also hat diese Gleichung für s_u eine und nur eine reelle Lösung s_u, die von u und n_{xy} stetig differenzierbar (ja sogar reell analytisch) abhängt. Die Abbildung $u\to v$ bezeichnen wir mit Q_{xy}. Sie ist eine eineindeutige und umkehrbar stetige, also homöomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}_{xy}$ in G. Das Bild von $\mathfrak{B}_{xy}$ bei Q_{xy} heiße $\mathfrak{W}_{xy}$. Die Einschränkung von P_{xy} auf $\mathfrak{W}_{xy}$ ist gerade die Umkehrabbildung von Q_{xy}. Die Vektoren x und y liegen in $\mathfrak{W}_{xy}$. Die Relation $z\in\mathfrak{W}_{xy}$ ist gleichbedeutend mit der gleichzeitigen Gültigkeit der beiden Aussagen $\langle A(z), n_{xy}\rangle=0$ und $z=Q_{xy}(P_{xy}(z))$. Aus $z\in\mathfrak{W}_{xy}$ folgt sets $r\cdot z\in\mathfrak{W}_{xy}$ für alle $r\in R$; denn es gilt ja $\langle A(rz), n_{xy}\rangle=r\langle A(z), n_{xy}\rangle=0$ und $Q_{xy}(P_{xy}(rz))=Q_{xy}(r\,P_{xy}(z))=r\,Q_{xy}(P_{xy}(z))=rz$, wobei $Q_{xy}(ra)=r\,Q_{xy}(a)$ für alle $a\in\mathfrak{B}_{xy}$, $r\in R$ benutzt wurde, eine Beziehung, die richtig ist, weil Q_{xy} eine Projektion ist und aus $A(a+s\cdot n_{xy})\in\mathfrak{B}_{xy}$ auch $A(r\cdot a+rs\cdot n_{xy})\in\mathfrak{B}_{xy}$ folgt. Insbesondere gilt also, wenn x' und y' linear abhängig sind und in $\mathfrak{W}_{xy}$ liegen (also etwa die Beziehung $x'=r\cdot y'$ befriedigen), die Gleichung $Q_{xy}(P_{xy}(x'+y'))=Q_{xy}(P_{xy}((r+1)\,y'))=(r+1\cdot Q_{xy}(P_{xy}(y'))=r\cdot Q_{xy}(P_{xy}(y'))+Q_{xy}(P_{xy}(y'))=Q_{xy}(P_{xy}(x'))+Q_{xy}(P_{xy}(y'))$. Nun definieren wir eine Verknüpfung $(x, y)\to x\circ y$:

$$(x, y)\to x\circ y=\begin{cases}Q_{xy}(P_{xy}(x+y)), & \text{wenn } x \text{ und } y \text{ linear unabhängig sind}\\ x+y, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Betrachtet man ferner auf $(G, \circ)$ die gewöhnliche Skalarmultiplikation $(r, x) \to r \cdot x$, so werden die Addition und die Skalarmultiplikation in $(\mathfrak{B}_{xy}, +)$ isomorph auf $\mathfrak{B}_{xy}$ übertragen, d.h. x und y liegen in $(G, \circ)$ in dem $\circ$-Untervektorraum $\mathfrak{B}_{xy}$, d.h. G ist ein dreidimensionaler, kommutativer alternativer R-Fastvektorraum. Das inverse Element von x bezüglich $\circ$ bezeichnen wir mit $\sim x$, während wir mit $-x$ das Inverse von x bezüglich $+$ bezeichnen.

Wir beweisen nun, daß die Rechtstranslationen $x \to x \circ a$ für alle $a \in G$ stetig sind. Wir müssen dazu noch nachweisen, daß $\lim\limits_{x \to ra} x \circ a = (r+1)a$ gilt. Wir bemerken zunächst, daß der oben eingeführte Parameter $s_u = s(u_1, u_2, u_3, n_{xy1}) = s(u, n_{xy1})$ in einer Umgebung $U \times V \subseteq R^3 \times R$ eines reellen Punktes (u_1, u_2, u_3, n_{xy1}) eine holomorphe Funktion ist. Für einen Punkt (u_1', u_2', u_3', n_x) aus dieser Umgebung gilt demnach $s_{u'} - s_u = \langle u' - u, f + g \rangle$ wo f eine holomorphe Funktion von u und n_{xy1} und g eine holomorphe Funktion von u, u' und n_{xy1} bezeichnen und g gegen null strebt, wenn u' gegen u strebt. g ist in jedem kompakten Teilraum von $R^3 \times R^3 \times [-1, 1]$ beschränkt.

Nun gilt

$$x \circ a - (r+1)a = Q_{ax}(P_{ax}(x+a)) - (r+1)a = Q_{ax}(P_{ax}(x+a)) -$$
$$- Q_{ax}((r+1)P_{ax}(a)) = P_{ax}(x+a) + n_{ax} \cdot s(P_{ax}(x+a), n_{ax1}) - ((r+1)P_{ax}(a) +$$
$$+ n_{ax} \cdot s((r+1)P_{ax}(a), n_{ax1})) = P_{ax}(x - ra) + n_{ay} \cdot \langle P_{ax}(x - ra), f + g' \rangle$$

wobei $f = f(n_{ax})$ und g' eine Funktion von n_{xa}, x und a angibt, die beschränkt bleibt, wenn x gegen ra strebt. Bezeichnet man wie üblich mit $|y|$ den Skalar $\langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$, so gilt

$$|x \circ a - (r+1)a| \leqq |P_{ax}(x - ra)| + 1 \cdot |P_{ax}(x - ra)| \cdot |f + g'|.$$

Weil $x \to n_{ax} = \frac{[A(a), A(x)]}{|[A(a), A(x)]|}$ jede Umgebung von a ohne a auf die kompakte Einheitskugeloberfläche abbildet, ist $f(n_{ax})$ auf jeder Umgebung von a beschränkt; d.h. es gilt $|f(n_{ax})| < k$ für $x \in U - \{a\}$, $U \in \mathfrak{U}(a)$; ferner gilt $|P_{ax}(y)| = |y - \langle n_{ax}, y \rangle n_{ax}| \leqq |y| + 1 \cdot 1 \cdot |y| = 2 \cdot |y|$; wir haben also $|P_{ax}(x - ra)| = 2 \cdot |x - ra|$; daraus folgt in der Tat $\lim\limits_{x \to ra}((x \circ a) - (r+1)a) = 0$, denn es gilt $|x \circ a - (r+1)a| \leqq 2|x - ra| \{1 + |f(n_{ax}) + g'|\} = 2(1 + 2k)|x - ra|$ sobald $|g'| < k$. Sind nun x und y nicht linear abhängig, so ist die Abbildung $z \to z \circ y$ in einer Umgebung von x stetig differenzierbar, d.h. es gibt eine von y stetig abhängende Lineartransformation $L(y)$ und eine Lineartransformation L', so daß $z \circ y - x \circ y = L(y)(z - x) + L'(z - x)$, wobei L' gegen die Nullabbildung strebt, wenn z gegen x strebt.

Es gilt demnach $\lim |x \circ y - x' \circ y'| = 0$, falls (x, y) gegen (x', y') strebt und x' und y' nicht linear abhängig sind, weil $L(y')$ gegen $L(y)$ strebt. Entsprechend gilt $\lim |x \circ a' - (r+1)a'| = 0$, falls (x, a') gegen (ra, a) strebt, denn $|x \circ a' - (r+1)a'| \leqq 2|x - ra'| \{1 + |f(n_{a'x}) + g'(n_{a'x}, x, a')|\}$; wobei das Restglied beschränkt bleibt, wenn (x, a') gegen (ra, a) strebt. Geht nun (x', y') gegen (x, y), so gilt also $\lim |x' \circ y' - x \circ y| \leqq \lim |x' \circ y' - x \circ y'| + \lim |x \circ y' - x \circ y| = 0$.

Die Loop $(G, \circ)$ ist daher ein topologischer dreidimensionaler, alternativer kommutativer Fastvektorraum.

Die Gleichung $x \circ y = x + y = Q_{xy}(P_{xy}(x+y))$ gilt genau wenn $x + y \in \mathfrak{B}_{xy}$, d.h. wenn

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\big(A(x+y), A(x), A(y)\big) &= \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + \frac{(x_1+y_1)^2}{\langle x+y, x+y\rangle}, & x_1 + \frac{x_1^2}{\langle x,x\rangle}, & y_1 + \frac{y_1^2}{\langle y,y\rangle} \\ x_2 + y_2 \quad , & x_2 \quad , & y_2 \\ x_3 + y_3 \quad , & x_3 \quad , & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{(x_1+y_1)^2}{\langle x+y, x+y\rangle} - \frac{x_1^2}{\langle x,x\rangle} - \frac{y_1^2}{\langle y,y\rangle}\right)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist z.B. befriedigt, wenn a) $\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$ oder wenn b) zugleich $y_1 = 0$ ist und $y + 2x$ auf y senkrecht steht. Nun betrachte man die Vektoren $u = (1, 1, 0)$, $v = (-1, 1, 0)$ und $w = (0, -1, 1)$. Dann ist wegen a) die Beziehung $u \circ v = u + v$ richtig, und es gilt sogar $(u \circ v) \circ w = u + v + w$, denn $u + v + 2w = (0, 0, 2)$ steht auf $u + v = (0, 2, 0)$ senkrecht, und die erste Komponente von $u + v$ ist 0. Es gilt ferner $(u \circ w) = u + w$, denn $w + 2u = (2, 1, 1)$ steht auf $w = (0, -1, 1)$ senkrecht, und w_1 ist 0.

Nun gilt $A(u + v + w) = A\big((0, 1, 1)\big) = (0, 1, 1)$ und $A(u + w) = A\big((1, 0, 1)\big) = (1 + \frac{1}{2}, 0, 1)$ und $A(v) = A\big((-1, -1, 0)\big) = (-1 + \frac{1}{2}, -1, 0)$. Die Determinante dieser drei Vektoren ist gleich -2. Also ist $(w \circ u) \circ v \neq w \circ (u \circ v) = w + u + v$.

Wir haben nun den folgenden Satz bewiesen:

(9.2) *Es gibt einen topologischen dreidimensionalen, kommutativen alternativen, aber nicht assoziativen R-Fastvektorraum. Dieser kann wegen* (8.17) *nicht moufangsch sein.*

Die Verknüpfung $(x, y) \to x \circ y$ ist auf $G \times G - \{(u, v);\ u \text{ und } v \text{ sind linear abhängig}\}$ stetig differenzierbar, und die Translationen $R_a = (x \to x \circ a = a \circ x)$ $(a \neq 0)$ sind auf $G - \{ra;\ r \in R\}$ und innerhalb jeder festen Untergruppe $\mathfrak{B}_{ab}$ überall stetig differenzierbar.

Daraus folgt der SATZ:

(9.3) *Für topologische Loops ist das fünfte Hilbertsche Problem negativ zu beantworten, und zwar schon für kommutative alternative Loops.*

Bei Gruppen ist jede lokaleuklidische topologische Gruppe eine Liegruppe; *es gibt aber eine dreidimensionale global euklidische kommutative alternative topologische Loop, in der die Verknüpfung $(x, y) \to x \circ y$ in keinem Koordinatensystem analytisch ist.*

BEWEIS. MALCEV hat bewiesen, daß jede in geeigneten Koordinaten analytische, alternative kommutative Loop assoziativ ist [8].

ANMERKUNGEN. Der anschauliche Gehalt des Beispiels (9.1) ist folgender: Man sucht eine „Verbiegung" A des Raums, die alle Geraden durch 0 wieder in Geraden überführt und stiftet zwischen den Bildern von Ebenen durch 0 und ihren Urbildern eine

eineindeutige Beziehung, die aber von Ebene zu Ebene verschieden ist (Orthogonalprojektion!). Mittels dieses Zusammenhangs werden die Ebenenbilder zu Untergruppen, die einer Ebenengruppe isomorph sind; da zwei nicht linear abhängige Punkte in genau einem Ebenenbild liegen, bestimmen sie immer eine zweidimensionale Untergruppe; so ist für die Alternativität und Kommutativität gesorgt. Dadurch, daß die Beziehung zwischen Ebene und Ebenenbild von Ebene zu Ebene wechselt, ist die Assoziativität im im Ganzen gestört. Es wird dafür Sorge getragen, daß alle Vorgänge stetig und soweit möglich differenzierbar vor sich gehen. Da die Verknüpfung von x und y entscheidend durch das durch x und y gehende Ebenenbild festgelegt wird, und dieses Ebenenbild auch für sehr nahe beieinandergelegene x und y noch alle Lagen einnehmen kann, wird gerade für derartige Paare die Verknüpfung problematisch.

Zusatz bei der Korrektur. Nach Fertigstellung des Manuskripts erschien in R. H. Bruck: A survey of binary systems (Erg. Math. 20) auf S. 87 eine von der unseren etwas abweichende Bezeichnung für die schwache Assoziativität: Der Begriff „diassoziativ" dort ist mit unserem „alternativ" äquivalent.

Literatur

[1] Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie 65, Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114**, 414–431 (1937). — [2] Bourbaki, N.: Topologie générale, Eléments de Mathématique. Actual. sci. industr. **858** (1940); **1152** (1951). — [3] Bruck, R. H.: Contribution to the theory of loops. Trans. Amer. math. Soc. **60**, 245–354 (1946). — [4] Gleason, A. M.: Groups without small subgroups. Ann. of Math. **56**, 193–212 (1952). — [5] Hofmann, K. H.: Eine Bemerkung über die zentralen Untergruppen in zusammenhängenden topologischen Gruppen. Archiv der Math. IX, 33–38 (1958). — [6] Hurewicz, W., and H. Wallman: Dimension Theory. Princeton: University Press 1948. — [7] Jones, F. B.: Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y)=f(x+y)$. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 115–120 (1942). — [8] Malcev, A. I.: Analytische Loops. Mat. Sbornik, n. Ser. **36**, (77), 569–576 (1954). — [9] Montgomery, D.: Finite dimensional groups. Ann. of Math. **52**, 591–605 (1950). — [10] Montgomery, D., and L. Zippin: Topological Transformation Groups Interscience Tracts in pure and applied. Mathematics. 1956. — [11] Novošad, R. S.: Simply connected spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **79**, 216–228 (1955). — [12] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin: Springer 1955. — [13] Salzmann, H.: Topologische Ebenen. Math. Z. **67**, 436–466 (1957). — [14] Weil, A.: L'intégration dans les groupes topologiques Actual. sci. industr. **869** (1940); **1145** (1951).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. März 1958)

STOLT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 156–164 (1958)

Zur Axiomatik des Brandtschen Gruppoids

Von
BENGT STOLT

1. Im Jahre 1926 hat H. BRANDT in [*1*] eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes aufgestellt. Sie wird gewöhnlich als das Brandtsche Gruppoid bezeichnet. In [*2*] hat BRANDT eine axiomatische Untersuchung seines Gruppoids vorgenommen und dabei fünf Axiomensysteme aufgestellt, die nach BRANDT als Definition seines Gruppoids benutzt werden können.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist zu zeigen, wie man zwei von diesen Systemen abschwächen kann. Es wird ferner eine kritische Untersuchung der übrigen drei Systeme vorgenommen.

2. Zunächst wird das Brandtsche Gruppoid definiert; vgl. S. 360 in [*1*] oder S. 96 in [*2*].

Es sei eine Menge M von verschiedenen Elementen $a, b, \ldots$ gegeben, deren Anzahl endlich oder unendlich sein kann. In M ist ferner eine Verknüpfung erklärt, bei welcher jedem geordneten Paar a, b von Elementen einen Wertevorrat ab von Elementen aus M zugeordnet ist, der das Produkt von a mit b genannt wird. ab kann aus genau einem oder mehreren Elementen bestehen oder auch leer sein. $ab \supset c$ bedeutet, daß das Element c zum Wertevorrat ab gehört, und $ab = c$, daß ab genau das Element c enthält. Zwei Wertevorräte, die dieselben Elemente enthalten, werden als gleich bezeichnet. — BRANDT verwendet statt $\supset$ das Zeichen $=$.

„ab existiert" bedeutet nach BRANDT, daß ab mindestens ein Element enthält, sonst „existiert das Produkt ab nicht". BRANDT benutzt auch die Symbole $(ab)c$ und $a(bc)$, gibt aber keine Erklärung, wie sie bei mehrdeutiger Verknüpfung zu deuten sind. Es liegt nahe, $(ab)c$ als den gesamten Wertevorrat aller uc mit $u \subset ab$ zu deuten, und $a(bc)$ in analoger Weise.

BRANDT benutzt auch die Ausdrücke „$(ab)c$ existiert" und „$a(bc)$ existiert", ohne eine Erklärung zu geben. In Analogie mit „ab existiert" ist es naheliegend, diese so zu deuten, daß $(ab)c$ bzw. $a(bc)$ mindestens ein Element enthalten sollen. In vorliegender Arbeit werden diese Deutungen benutzt. Es ist jedoch hervorzuheben, daß BRANDT andere Deutungen benutzt hat. Die verschiedenen Deutungen werden im Abschnitt 4 näher studiert. Bei eindeutiger Verknüpfung fallen sie zusammen.

Nach BRANDT ist M ein Brandtsches Gruppoid, wenn folgende vier Axiome erfüllt sind; vgl. S. 360 in [*1*] oder S. 96 in [*2*]. Das Axiom II wird wörtlich wie bei BRANDT zitiert; die Elemente werden jedoch mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

I. *Wenn a, b und c die Beziehung $ab \supset c$ erfüllen, so ist jedes Element durch die beiden andern eindeutig bestimmt.*

II. *„Mit ab und bc existiert auch $(ab)c$ und $a(bc)$, mit ab und $(ab)c$ existiert auch bc und $a(bc)$, mit bc und $a(bc)$ existiert auch ab und $(ab)c$, und jedesmal ist $(ab)c = a(bc)$, so daß man die Klammern fortlassen und einfach abc schreiben kann."*

Wenn es zu einem a Elemente e bzw. e' gibt, die $ae \supset a$ bzw. $e'a \supset a$ erfüllen, wird e Rechtseinheit und e' Linkseinheit von a genannt. Ein e, das für gewisses a Rechts- oder Linkseinheit ist, wird als Einheit bezeichnet.

III. *Zu jedem a gibt es genau eine Rechtseinheit e und genau eine Linkseinheit e', und ferner gibt es genau ein inverses Element a', das $a'a \supset e$ erfüllt.*

Wegen I und II kommen dazu noch die weiteren $aa' \supset e'$, $ea' \supset a'$, $ee \supset e$ und $e'e' \supset e'$.

IV. *Zu zwei Einheiten e und e' gibt es mindestens ein Element a, von welchem e Rechtseinheit und e' Linkseinheit ist.*

3. Die oben aufgestellten Axiome werden bei der axiomatischen Untersuchung in weniger umfassende Axiome aufgeteilt. Dabei ist es zweckmäßig, jedes Axiom mit einem gewissen Symbol zu bezeichnen. BRANDT benutzt die römischen Ziffern I—IV nebst einem gewissen Index. Weil hier teilweise andere Axiome als bei BRANDT betrachtet werden, scheint es zweckmäßig, gewisse Axiome in anderer Weise als bei BRANDT zu bezeichnen. Die unten benutzten Symbole kommen schon in den Arbeiten von BAER-LEVI [3], LORENZEN [4] oder STOLT [5] bis [10] vor oder sind in Analogie mit dort auftretenden Symbolen bezeichnet. Wenn ein Axiom auch in [2] vorkommt, wird das in [2] benutzte Symbol eingeklammert.

Die in vorliegender Arbeit betrachteten Axiome sind wie folgt.

U **(I°°).** *Es gibt höchstens ein c, das $ab \supset c$ erfüllt.*

lU. *Es gibt höchstens ein a, das $ab \supset c$ erfüllt.*

rU. *Es gibt höchstens ein b, das $ab \supset c$ erfüllt.*

1°. *Zu b und c gibt es höchstens ein a, das $ab \supset c$ erfüllt, und zu a und c höchstens ein b, das $ab \supset c$ erfüllt.*

I° ist also die logische Summe von lU und rU.

***EA*$_{Br}$.** *Wenn zu a, b und c die Produkte ab und bc existieren, und wenn u ein Element aus ab und v ein Element aus bc ist, so existieren die Produkte av und uc, und außerdem gilt $(ab)c = a(bc)$.*

Die von BRANDT aufgestellte Formulierung II° werden wir später in Betracht ziehen.

***EA*$_{L}$.** *Wenn zu a, b und c die Produkte ab und $(ab)c$ existieren, so existieren auch bc und $a(bc)$; wenn bc und $a(bc)$ existieren, so existieren auch ab und $(ab)c$; und jedesmal gilt $(ab)c = a(bc)$.*

***li*$_{Br}$.** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ea \supset a$ erfüllt.*

***ri*$_{Br}$.** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ae \supset a$ erfüllt.*

***li*(*U*).** *Zu jedem a gibt es höchstens ein e, das $ea \supset a$ erfüllt.*

***ri*(*U*).** *Zu jedem a gibt es höchstens ein e, das $ae \supset a$ erfüllt.*

***lε.ri*$_{Br}$(III°).** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ae \supset a$ erfüllt, und zu jedem solchen e mindestens ein a', das $a'a \supset e$ erfüllt.*

***rε.li*$_{Br}$.** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ea \supset a$ erfüllt, und zu jedem solchen e mindestens ein a', das $aa' \supset e$ erfüllt.*

***lv.ri*$_{Br}$.** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ae \supset a$ erfüllt, und zu jedem solchen e höchstens ein a', das $a'a \supset e$ erfüllt.*

***rv.li*$_{Br}$.** *Zu jedem a gibt es ein e, das $ea \supset a$ erfüllt, und zu jedem solchen e höchstens ein a', das $aa' \supset e$ erfüllt.*

III*. *Wenn es zu a und b ein c gibt derart, daß die Produkte ac und bc existieren, so gibt es Elemente x und y, die $xa \supset b$ bzw. $yb \supset a$ erfüllen.*

III.** *Wenn es zu a und b ein c gibt derart, daß die Produkte ac und bc existieren, so gibt es Elemente x und y, die $xa \supset b$ bzw. $yb \supset a$ erfüllen; wenn es ein d gibt derart, daß die Produkte da und db existieren, so gibt es Elemente u und v, die $au \supset b$ bzw. $bv \supset a$ erfüllen.*

IV°. *Zu zwei Einheiten e und e' gibt es ein a, das $ae \supset a$ erfüllt, und ferner existiert das Produkt e'a.*

IV*. *Zu a und b gibt es ein c derart, daß die Produkte ac und cb existieren.*

N. *Die zugrunde liegende Menge ist endlich.*

4. Auf S. 98 in [2] schwächt BRANDT das Axiom II dadurch ab, daß er es durch die folgende Formulierung ersetzt, die auf Grund ihrer Symmetrie gewählt ist.

II°. *„Mit AB und BC existieren auch $(AB)C$ und $A(BC)$ und bestimmen denselben Wertevorrat, so daß man die Klammern fortlassen und einfach ABC schreiben kann."*

Wenn die Verknüpfung eindeutig ist, ist diese Formulierung mit der oben gegebenen Formulierung EA_{Br} identisch. Sonst ist es nicht klar, wie man II° deuten soll. Mit der in dieser Arbeit benutzten Deutung von „$(ab)c$ existiert" ist II° schwächer als EA_{Br}. Wenn die Existenz eines besonderen Elements u_1 bzw. v_1 der Produkte $ab \supset u_1$ bzw. $bc \supset v_1$ bekannt ist, folgt nämlich aus EA_{Br} die Existenz der Produkte u_1c bzw. av_1. Aus II° folgt dagegen nur die Existenz gewisser Elemente folgender Produkte, nämlich $ab \supset u_2$, $u_2c \supset t$, $bc \supset v_2$, $av_2 \supset t$, wo die Elemente u_2 und v_2 von u_1 bzw. v_1 verschieden sein können. In den meisten Fällen meint BRANDT mit „$(ab)c$ existiert", daß uc für *jedes* $u \subset ab$ nicht leer sein soll, und entsprechend für „$a(bc)$ existiert". Durch diese Deutung wird II° mit EA_{Br} identisch. Diese Deutung, die eine stärkere Existenzforderung enthält, scheint nicht ebenso naheliegend zu sein. Die Schreibweise abc kann für beide Deutungen angewandt werden.

Bei dem Beweis des später aufgestellten Axiomsystems *Br* 4 hat BRANDT, wie später gezeigt wird, sein Axiom II° so angewandt, als ob es die Existenzbedingungen von EA_{Br} und außerdem eine besondere Unitätsbedingung

enthielte. Diese Deutung ist in der Formulierung von II° bestimmt nicht enthalten. Es scheint folglich, als ob sich BRANDT den genauen Inhalt seiner Formulierung II° nicht klar gemacht hätte. Weil er in den meisten Fällen die Deutung EA_{Br} benutzt, wird in vorliegender Arbeit sein Assoziativaxiom II° mit EA_{Br} bezeichnet, wenn seine Axiomensysteme wiedergegeben werden.

Die Formulierung EA_L kommt als selbständiges Axiom bei BRANDT nicht vor. Sie wird von LORENZEN in [4] und vom Verfasser in [5] und [6] benutzt. Sie scheint „schwächer" als EA_{Br} zu sein, was das folgende Beispiel andeutet. Wenn EA_L und das gruppentheoretische Einsaxiom e bestehen, folgt daraus nicht die unbeschränkte Komposition, wie die Multiplikationstafel $\begin{smallmatrix}1&2\\2&-\end{smallmatrix}$ zeigt. Aus EA_{Br} und e folgt dagegen leicht die unbeschränkte Komposition. Wenn a und b beliebige Elemente sind, folgt nämlich aus $(ae)b \supset ab$, $a(eb) \supset ab$ wegen EA_{Br} die Existenz des Produktes ab. Aber es steht offen, ob man Beispiele geben kann, wo man mit EA_L, aber nicht mit EA_{Br} durchkommt. Später werden Axiomensysteme gebildet, in welchen man entweder EA_{Br} oder EA_L benutzen kann.

Auf S. 99, Z. 3 hat sich BRANDT ein wenig unklar ausgedrückt. Er schreibt: „Aus III°($l\varepsilon.ri_{Br}$) in Verbindung mit II°(EA_{Br}) folgen leicht die folgenden Sätze: Für eine Rechtseinheit E gilt $EE = E$. Wenn umgekehrt $EE = E$ und das Produkt AE existiert, so ist E Rechtseinheit von A. Wenn P mit A komponierbar ist und A die Rechtseinheit E hat, so ist E auch Rechtseinheit von PA."

Auf Z. 1 ist das Axiom I° erwähnt. Es muß gemeint sein, daß I° auch hier gelten soll. Denn sonst folgen die drei Sätze nicht, was aus den folgenden Beispielen hervorgeht. Zwei Systeme von je drei Elementen 1, 2, 3 werden durch ihre Multiplikationstafeln erklärt. In dem ersten System besteht nicht der erste und der letzte Satz, in dem zweiten nicht der mittlere Satz, und doch bestehen EA_{Br} und $l\varepsilon.ri_{Br}$, was man leicht nachprüfen kann:

	1	2	3
1	2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
2	1, 2, 3	1, 3	1, 2, 3
3	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2

	1	2	3
1	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
2	1, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
3	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3

5. Ein Axiomsystem wird als *vollständig* bezeichnet, wenn daraus die Axiome I—IV hergeleitet werden können.

Mit Hilfe einiger der Axiome von **3** hat BRANDT versucht, die überflüssigen Bestandteile des Systems I—IV auszumerzen. Dabei stellt er folgende fünf Systeme auf, die nach ihm vollständig sind.

Br 1. EA_{Br}, $I°$, $l\varepsilon.ri_{Br}$, $IV°$.
Br 2. EA_{Br}, N, $I°$, ri_{Br}, li_{Br}, IV.
Br 3. EA_{Br}, N, $I°$, IV^*.
Br 4. EA_{Br}, $I°$, III^*, IV^*.
Br 5. EA_{Br}, U, III^{**}, IV^*.

In vorliegender Arbeit wird gezeigt, daß man $Br\,1$ und $Br\,5$ abschwächen kann und daß die Vollständigkeit von $Br\,2$ bis $Br\,4$ nicht bewiesen ist.

6. Zunächst wird das System $Br\,1$ abgeschwächt.

BRANDT meint gezeigt zu haben, daß dieses nicht möglich ist. Auf S. 97, Abschnitt 6 schreibt er folgendes: „Wir versuchen das Axiomensystem (I—IV) zunächst in der Weise abzuändern, daß wir überall die überflüssigen Bestandteile ausmerzen. Bei I könnte man versuchen, auf die Eindeutigkeit des einen Quotienten zu verzichten. Damit kommt man aber nicht weit, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Das System S bestehe aus den Elementen A und B, und es sollen die Verknüpfungsgesetze

$$AA = AB = A, \qquad BA = BB = B$$

gelten. Man überzeugt sich leicht, daß alle Axiome I bis IV bis auf die Eindeutigkeit des hinteren Quotienten erfüllt sind."

Diese Folgerung ist aber nicht richtig. Das Axiom $ri(U)$, d.h. die Eindeutigkeit der Rechtseinheit, ist nämlich in III ausgesprochen und ist also keine Folgerung von I. Sie besteht im betrachteten Beispiel nicht und folglich auch nicht das ganze Axiom III. Wenn BRANDT ein Beispiel gefunden hätte, in welchem $ri(U)$ aber nicht rU bestände, so wäre die Unvollständigkeit des Systems U, lU, II—IV und damit die Notwendigkeit des Axioms rU bewiesen. Weil BRANDT dieses nicht gezeigt hat, ist die Frage der Notwendigkeit seines Axioms I° noch nicht beantwortet. Im folgenden wird gezeigt, daß I° nicht notwendig ist und daß man es nicht nur durch lU, $ri(U)$ sondern auch in anderer Weise abschwächen kann.

Es wird nun bewiesen, daß folgende Systeme vollständig und schwächer als Br 1 sind.

1. $EA_{Br}, rU, l\varepsilon.ri_{Br}, lv.ri_{Br}, IV°$.
2. $EA_{Br}, rU, l\varepsilon.ri_{Br}, li(U), IV°$.
3. $EA_{L}, rU, l\varepsilon.ri_{Br}, lv.ri_{Br}, IV°$.
4. $EA_{L}, rU, l\varepsilon.ri_{Br}, li(U), IV°$.
5. $EA_{Br}, lU, l\varepsilon.ri_{Br}, ri(U), IV°$.
6. $EA_{L}, lU, l\varepsilon.ri_{Br}, ri(U), IV°$.

Man braucht einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Wenn EA_{Br}, $l\varepsilon.ri_{Br}$ und $ri(U)$ bestehen, so ist jede Rechtseinheit idempotent.*

Beweis. Der Annahme zufolge bestehen $ae \supset a$ und $a'a \supset e$ für beliebiges a. $(a'a)e \supset ee$, $a'(ae) \supset a'a \rightarrow ee \supset e_1$ wegen EA_{Br}; $(ae)e \supset ae \supset a$, $a(ee) \supset ae_1 \rightarrow ee \supset e_2$, $ae_2 \supset a$ wegen EA_{Br}. Daher ist $e_2 = e$ und ferner $ee \supset e$ wegen $ri(U)$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Aus EA_{Br}, rU und $l\varepsilon.ri_{Br}$ folgt li_{Br}.*

Beweis. Für beliebiges a existiert $ae \supset a$, $a'a \supset e$, $a'e' \supset a'$, $a_1a' \supset e'$ und wegen Hilfssatz 1 auch $e'e' \supset e'$. $(a_1a')a \supset e'a$, $a_1(a'a) \supset a_1e \rightarrow e'a \supset a_2$ wegen EA_{B_r}; $(e'e')a \supset e'a$, $e'(e'a) \supset e'a_2 \rightarrow e'a \supset a_3$, $e'a_2 \supset a_3$ wegen EA_{B_r}. Dann gilt $a_2 = a$ wegen rU und $e'a \supset a$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Wenn EA_{B_r}, rU, $l\varepsilon.ri_{B_r}$ und $li(U)$ oder $lv.ri_{B_r}$ bestehen, so folgt $ce \supset c$ aus $ab \supset c$ und $be \supset b$.*

Beweis. Es seien a und b zwei Elemente, deren Produkt existiert. Dann gilt $ab \supset c$ und ferner wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$ $be \supset b$, $ce' \supset c$ und $c'c \supset e'$. Hieraus folgt $ee \supset e$ und $e'e' \supset e'$ wegen Hilfssatz 1. $(ab)e \supset ce$, $a(be) \supset ab \rightarrow ce \supset c_1$ wegen EA_{B_r}; $(c'c)e \supset e'e$, $c'(ce) \supset c'c_1 \rightarrow e'e \supset e_1$ wegen EA_{B_r}; $(e'e')e \supset e'e \supset e_1$, $e'(e'e) \supset e'e_1 \rightarrow e'e \supset e_2$, $e'e_2 \supset e_1$ wegen EA_{B_r}. Daher ist $e_2 = e$ wegen rU und $e'e \supset e$ und $e' = e$ wegen $li(U)$ oder $lv.ri_{B_r}$. Dann gilt auch $ce \supset c$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Aus EA_{B_r}, rU, $l\varepsilon.ri_{B_r}$ und $li(U)$ oder $lv.ri_{B_r}$ folgt $r\varepsilon.li_{B_r}$ und EA_L.*

Beweis. Der Annahme zufolge ergibt sich für beliebiges a $ae \supset a$, $a'a \supset e$, $a'e' \supset a'$, $a_1a' \supset e'$, $a_1e_1 \supset a_1$ und ferner wegen Hilfssatz 1 und 2 $e_1a' \supset a'$ und $e_1e_1 \supset e_1$. $(e_1a')a \supset a'a$, $e_1(a'a) \supset e_1e \rightarrow e_1e \supset e_2$ wegen EA_{B_r}; $(e_1e_1)e \supset e_1e$, $e_1(e_1e) \supset e_1e_2 \rightarrow e_1e \supset e_3$, e_4; $e_1e_4 \supset e_3$ wegen EA_{B_r}. Daher ist $e_4 = e$ wegen rU. Hieraus folgt $e_1e \supset e$. Dann gilt $e_1 = e$ wegen $li(U)$ oder $lv.ri_{B_r}$ und schließlich $ea' \supset a'$.

Zunächst wird gezeigt, daß das halbe Axiom EA_L besteht, d.h. daß $bc \supset v$ aus $ab \supset u$ und $uc \supset t$ folgt. Wir nehmen an, daß $ab \supset u$ und $uc \supset t$ bestehen. Aus $be \supset b$ folgt $ue \supset u$ wegen Hilfssatz 3, woraus $u'u \supset e$ wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$. $(u'u)c \supset ec$, $u'(uc) \supset u't \rightarrow ec \supset c_1$ wegen EA_{B_r}; $(be)c \supset bc$, $b(ec) \supset bc_1 \rightarrow bc \supset v$ wegen EA_{B_r}.

Es sei a beliebig. $ae \supset a$, $a'a \supset e$, $a'e' \supset a' \rightarrow ea' \supset a'$; $(a'a)a' \supset ea' \supset a' \rightarrow aa' \supset e'$ wegen rU und die soeben bewiesene Hälfte des Axioms EA_L. Weil $e'a \supset a$ im Hilfssatz 2 bewiesen ist, besteht folglich $r\varepsilon.li_{B_r}$.

Es bleibt übrig, die andere Hälfte des Axioms EA_L zu beweisen. Um die Existenz von $ab \supset u$ herzuleiten, nimmt man an, daß $bc \supset v$ und $av \supset w$ bestehen. Der Annahme zufolge ergibt sich $eb \supset b$, $e'v \supset v$, $vv' \supset e'$ und ferner $(eb)c \supset bc \supset v$, $e(bc) \supset ev \rightarrow ev \supset v_1$ wegen EA_{B_r}; $(ev)v' \supset v_1v'$, $e(vv') \supset ee' \rightarrow ee' \supset e_1$ wegen EA_{B_r}; $(ee)e' \supset ee'e' \supset e_1$, $e(ee') \supset ee_1 \rightarrow ee' \supset e_2$, $ee_2 \supset e_1$ wegen EA_{B_r}. Daher ist $e_2 = e'$ wegen rU und ferner $ee' \supset e'$. Dann gilt $e' = e$ wegen $li(U)$ oder $lv.ri_{B_r}$. $ev \supset v$, $vv' \supset e$; $(av)v' \supset wv'$, $a(vv') \supset ae \rightarrow ae \supset a_1$ wegen EA_{B_r}; $(ae)b \supset a_1b$, $a(eb) \supset ab \rightarrow ab \supset u$ wegen EA_{B_r}, w. z. b. w.

Hilfssatz 5. *Aus EA_{B_r}, rU, $l\varepsilon.ri_{B_r}$ und $li(U)$ folgt $lv.ri_{B_r}$.*

Beweis. Sonst beständen für gewisses a die Verknüpfungen $ae \supset a$, $a'a \supset e$, $a''a \supset e$. Dann gilt $e'a \supset a$ wegen Hilfssatz 2, $aa' \supset e'$, $aa'' \supset e'$ wegen Hilfssatz 4 und $a'' = a'$ wegen rU, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Wenn EA_L, ri_{B_r} und $ri(U)$ bestehen, so ist jede Rechtseinheit idempotent.*

Beweis. Auf Grund der Annahme besteht $ae \supset a$ für beliebiges a. $(ae)e \supset ae \supset a \rightarrow ee \supset e$ wegen EA_L und $ri(U)$.

Hilfssatz 7. *Aus* EA_L, rU *und* $l\varepsilon.ri_{B_r}$ *folgt* EA_{B_r}.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $uc \supset t$ aus $ab \supset u$ und $bc \supset v$ folgt. Man hat $be \supset b$, $ue' \supset u$, $u'u \supset e'$ wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$ und $ee \supset e$ wegen Hilfssatz 6. $a(be) \supset ab \supset u \to ab \supset u_1$, $u_1 e \supset u$ wegen EA_L; $(u_1 e)e' \supset ue' \supset u \to ee' \supset e$ wegen rU und EA_L. Daher ist $e' = e$ wegen rU. $(be)c \supset bc \supset v \to ec \supset c_1$ wegen EA_L; $(u'u)c \supset ec \supset c_1 \to uc \supset t$ wegen EA_L, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Aus* EA_L, lU, $l\varepsilon.ri_{B_r}$ *und* $ri(U)$ *folgt* EA_{B_r}.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Existenz von $(ab)c$ aus $ab \supset u$, $bc \supset v$ folgt. Der Annahme zufolge hat man $be \supset b$. Dann gilt $ee \supset e$ wegen Hilfssatz 6; $a(be) \supset ab \supset u \to ab \supset u_1$, $u_1 e \supset u$ wegen EA_L; $u_1(ee) \supset u_1 e \supset u \to u_1 e \supset u_2$, $u_2 e \supset u$ wegen EA_L. Hieraus folgt $u_2 = u_1$ wegen lU und $u_1 e \supset u_1$; daher ist $u'u_1 \supset e$ wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$. $(be)c \supset bc \supset u \to ec \supset c_1$ wegen EA_L, und schließlich $(u'u_1)c \supset ec \supset c_1 \to u_1 c \supset t$ wegen EA_L, womit die Existenz von $(ab)c$ gezeigt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 1.

Wenn lU nicht bestände, gäbe es zwei Verknüpfungen der Form $ab \supset c$, $db \supset c$. Dann gilt $be \supset b$, $b'b \supset e$ wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$. Daher ist $ce \supset c$ wegen Hilfssatz 3 und $c'c \supset e$ wegen $l\varepsilon.ri_{B_r}$. Wegen Hilfssatz 4 besteht EA_L. Dann gilt $c'(ab) \supset c'c \supset e$, woraus $c'a \supset b'$ wegen $lv.ri_{B_r}$ und EA_L, und $c'(db) \supset c'c \supset e$, woraus $c'd \supset b'$ wegen $lv.ri_{B_r}$ und EA_L. Daher ist $d = a$ wegen rU. Also besteht lU, womit 1 auf das System Br 1 zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 2, 3 und 4.

Auf Grund des Hilfssatzes 5 wird 2 auf 1, auf Grund des Hilfssatzes 7 wird 3 auf 1 und 4 auf 2 zurückgeführt.

Vollständigkeitsbeweis von 5.

Für beliebiges b besteht der Annahme zufolge $be \supset b$, $b'b \supset e$, $b'e' \supset b'$ und $b_1 b' \supset e'$. Hieraus folgt $ee \supset e$ und $e'e' \supset e'$ wegen Hilfssatz 1.

Wir zeigen zunächst, daß $ce \supset c$ aus $ab \supset c$, $be \supset b$ folgt. Denn $(ab)e \supset ce$, $a(be) \supset ab \to ce \supset c_1$ wegen EA_{B_r}; $(ce)e \supset c_1 e$, $c(ee) \supset ce \supset c_1 \to ce \supset c_2$, $c_2 e \supset c_1$ wegen EA_{B_r}. Daher ist $c_2 = c$ wegen lU und ferner $ce \supset c$, w. z. b. w.

Nun ist es möglich, die Gültigkeit des halben Axioms EA_L zu zeigen, d. h. $ab \supset u$, $uc \supset t \to bc \supset v$. Denn $be \supset b \to ue \supset u$ und $u'u \supset e$. Ferner $(u'u)c \supset ec$, $u'(uc) \supset u't \to ec \supset c_1$ wegen EA_{B_r}; $(be)c \supset bc$, $b(ec) \supset bc_1 \to bc \supset v$ wegen EA_{B_r}.

Schließlich wird gezeigt, daß $r\varepsilon.li_{B_r}$ gilt. Es sei b beliebig. $(b_1 b')b \supset e'b$, $b_1(b'b) \supset b_1 e \to b_1 e \supset b_2$ wegen EA_{B_r}; $(b_1 e)e \supset b_2 e$, $b_1(ee) \supset b_1 e \supset b_2 \to b_1 e \supset b_3$, $b_3 e \supset b_2$ wegen EA_{B_r}; daher ist $b_3 = b_1$ wegen lU und $b_1 e \supset b_1$; $(b_1 e)b' \supset b_1 b' \supset e' \to eb' \supset b_1'$ wegen EA_L; $(eb')b \supset b_1' b$, $e(b'b) \supset ee \supset e \to eb' \supset b_2'$, $b_2' b \supset e$ wegen EA_{B_r}. Dann gilt $b_2' = b'$ wegen lU und $eb' \supset b'$; $(b'b)b' \supset eb' \supset b' \to bb' \supset e'$ wegen EA_L und $ri(U)$; $(bb')b \supset e'b$, $b(b'b) \supset be \subset b \to e'b \supset b_4$ wegen EA_{B_r}; $(e'b)b' \supset b_4 b'$, $e'(bb') \supset e'e' \supset e' \to e'b \supset b_5$, $b_5 b' \supset e'$ wegen EA_{B_r}. Daher ist $b_5 = b$ wegen lU und $e'b \supset b$. Hiermit ist das vorliegende System auf 2 zurückgeführt.

Vollständigkeitsbeweis von 6.

Wegen Hilfssatz 8 gilt EA_{Br}, womit 6 auf 5 zurückgeführt ist.

7. Man kann das System *Br* 5 dadurch abschwächen, daß man die Vollständigkeit der folgenden Systeme zeigt. Das dabei benutzte Axiom $r\varepsilon.li_{Br}$ ist durch Spiegelung des Brandtschen Axioms $l\varepsilon.ri_{Br}$(III°) gebildet.

7. EA_{Br}, U, $r\varepsilon.li_{Br}$, III^*, IV^*.

8. EA_L, U, $r\varepsilon.li_{Br}$, III^*, IV^*.

Vollständigkeitsbeweis von 7 und 8.

Es sei b beliebig. Dann gilt $eb=b$ und $bb_1'=e$ wegen $r\varepsilon.li_{Br}$. $(eb)b_1'=bb_1'=e$, $e(bb_1')=ee\to ee=e$ wegen U und EA_{Br} oder EA_L.

Um $ae=a$ aus $eb=b$ herzuleiten, nimmt man an, daß das Produkt $ab=c$ existiert. Entweder $(ab)b_1'=cb_1'$, $a(bb_1')=ae\to ae=a_1$ wegen EA_{Br}, oder $a(eb)=ab=c\to ae=a_1$ wegen EA_L; ferner $ee=e$, $ae=a_1\to a_2e=a$ wegen III*; $(a_2e)e=ae$, $a_2(ee)=a_2e=a\to ae=a$ wegen U und EA_{Br} oder EA_L.

Wenn auch $db=c$ bestände, so bestände genau wie oben $de=d$. $(ab)b_1'=cb_1'$, $a(bb_1')=ae=a\to cb_1'=a$ wegen U und EA_{Br} oder EA_L, und $(db)b_1'=cb_1'=a$, $d(bb_1')=de=d\to d=a$ wegen U. Also gilt lU, und hieraus folgt EA_{Br} auf Grund des Hilfssatzes 7.

Es sei b beliebig. $eb=b$, $bb_1'=e$, $e'b_1'=b_1'$, $be'=b$, $e'e'=e'\to b'b=e'$ wegen III*, daher ist $b'e=b'$. $(b'b)b_1'=e'b_1'=b_1'$, $b'(bb_1')=b'e=b'\to b_1'=b'$ wegen U und EA_{Br}. Also gilt $rv.li_{Br}$, denn b' ist wegen lU eindeutig bestimmt. Hiermit sind die Systeme 7 und 8 auf System 1 zurückgeführt.

Man fragt sich nun, ob es möglich ist, die Systeme 7 und 8 in analoger Weise dadurch abzuschwächen, daß man III* durch $l\varepsilon.ri_{Br}$ ersetzt. Aus dem Beispiel $aa=ab=a$, $ba=bb=b$ geht hervor, daß dieses nicht möglich ist.

8. Schließlich werden die Systeme *Br* 2, *Br* 3 und *Br* 4 betrachtet.

Zunächst wird der Beweis von *Br* 4 auf S. 102—103 in [2] untersucht, wo Brandt in folgender Weise argumentiert. Sei A ein beliebiges Element, so gibt es wegen IV* ein Element V, für das AV existiert. Dann folgt $E'A\supset A$ wegen III*, d.h. das Axiom li_{Br} gilt. Ferner ergibt sich $EV\supset V$ wegen li_{Br} und $A'E\supset A$ wegen III*. Dann schreibt Brandt folgendes: „Mit $A'E$ und BV existiert nach II°(EA_{Br}) $A'EV=AV=A'V$, daher ist nach I° $A'=A$ und E Rechtseinheit von A."

Diese Folgerung wäre richtig, wenn das Axiom U bestände und wenn also das etwaige Produkt zweier Elemente eindeutig vorausgesetzt wäre. Dieses ist bei vorliegendem Beweis nicht der Fall. Wenn die Verknüpfungen $(A'E)V\supset AV$, $A'(EV)\supset A'V$ gegeben sind, folgt hieraus wegen EA_{Br} die Existenz der Produkte AV und $A'V$. Bei mehrdeutiger Verknüpfung folgt aber *nicht* $AV=A'V$, sondern nur $AV\supset T$, $EV\supset V_1$, $A'V_1\supset T$ und $A'V\supset W$, $A'E\supset A_1$, $A_1V\supset W$. Aus lU folgt zwar $A_1=A'$ aber nicht $A'=A$, was von Brandt behauptet wurde. Der Beweis von *Br* 4 ist also nicht richtig.

Man kann diesen Trugschluß vermeiden, indem man das assoziative Gesetz in solcher Weise formuliert, daß es eine Unitätsbedingung enthält. Folgende

Formulierung ist von HUNTINGTON aufgestellt, kommt bei LORENZEN in [4] und STOLT in [5] vor und wird da mit UA bezeichnet.

UA. *Wenn zu drei Elementen a, b und c die Produkte ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$ existieren, und wenn t ein Element aus $(ab)c$ und w ein Element aus $a(bc)$ ist, so gilt $t=w$.*

In [6] wird ein Assoziativaxiom EUA_L aufgestellt, das sowohl Existenz- als auch Unitätsbedingungen enthält und die logische Summe von EA_L und UA ist. Wenn man in Br 4 statt EA_{Br} ein Axiom verwendet, das die logische Summe von EA_{Br} und UA ist, wird die von BRANDT behauptete Folgerung richtig.

Der Beweis von Br 2 scheint auch einen Fehler zu enthalten. Auf S. 102, Z. 3 wird nämlich behauptet, daß eine Rechtseinheit $\dot{E}$ mit sich selbst komponierbar ist. Diese Behauptung ist aber nicht bewiesen.

Der Beweis von Br 3 wird auf den Beweis von Br 2 zurückgeführt; Br 3 ist folglich auch nicht bewiesen.

Literatur

[1] BRANDT, H.: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Math. Ann. **96**, 360–366 (1926). — [2] BRANDT, H.: Über die Axiome des Gruppoids. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, 95–104 (1940). — [3] BAER, R., u. F. LEVI: Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxiomen. S.B. heidelberg. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl., 2. Abh., 3–12 (1932). — [4] LORENZEN, P.: Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. **49**, 313–327 (1943/44). — [5] STOLT, B.: Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala 1953. — [6] STOLT, B.: Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik. Ark. Mat. **3**, 89–101 (1954). — [7] STOLT, B.: Über irreduzible Axiomensysteme, die eine endliche abstrakte Gruppe bestimmen. Ark. Mat. **3**, 113–115 (1954). — [8] STOLT, B.: Zur Axiomatik endlicher Gruppen I–II. Ark. Mat. **3**, 171–180 (1954); **3**, 229–238 (1955). — [9] STOLT, B.: Über gewisse Axiomensysteme, die abstrakte Gruppen bestimmen. Ark. Mat. **3**, 187–191 (1954). — [10] STOLT, B.: Über eine besondere Halbgruppe. Ark. Mat. **3**, 275–286 (1956).

Uppsala, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 5. April 1958)

Itô, N.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 165–173 (1958)

Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen

Von

NOBORU ITÔ*

Übersicht. Man verdankt C. JORDAN [2, S. 69] den folgenden bekannten Satz: Ein Normalteiler ($\neq 1$) einer k-fach transitiven Permutationsgruppe, die von der symmetrischen Gruppe verschieden ist, ist im allgemeinen $(k-1)$-fach transitiv. Ausnahmen gibt es nur, wenn der Grad eine Potenz von 2 und zugleich $k=3$ ist.

Neuerdings hat WIELANDT den Begriff der mehrfachen Primitivität sowie den der halbzahligen Transitivität eingeführt [4, § 10]. Eine k-fach transitive Gruppe heißt k-fach primitiv, wenn ihre Untergruppen, die $k-1$ Ziffern festlassen, auf den restlichen Ziffern noch primitiv sind. Eine Gruppe heißt $(k+\frac{1}{2})$-fach transitiv, wenn sie k-fach transitiv ist und wenn ihre Untergruppen, die k Ziffern fest lassen, auf den restlichen Ziffern lauter Transitivitätsgebiete gleicher Länge >1 besitzen. WIELANDT und HUPPERT haben die folgenden Verfeinerungen des Satzes von JORDAN bewiesen [5, Sätze 3.4–3.6]:

I. Ein nicht regulärer Normalteiler einer k-fach transitiven Permutationsgruppe, die von der symmetrischen verschieden ist, ist $(k-\frac{1}{2})$-fach transitiv.

II. Ein nicht regulärer Normalteiler einer $(k+\frac{1}{2})$-fach transitiven Permutationsgruppe, die von der symmetrischen verschieden ist, ist im allgemeinen k-fach transitiv. Ausnahmen gibt es nur für $k=1$ und $k=2$.

III. Ein nicht regulärer Normalteiler einer k-fach primitiven Permutationsgruppe, die von der symmetrischen verschieden ist, ist k-fach transitiv.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis einer entsprechenden Aussage über mehrfache Primitivität der Normalteiler von mehrfach transitiven Permutationsgruppen.

BEZEICHNUNGEN. Es sei Ω die Menge der Ziffern $0, 1, \ldots, n$. Es bezeichne $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe der Ordnung $(n+1)!$ auf Ω. Für jede Untergruppe $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{S}$ bezeichne $\mathfrak{X}_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}$ $(0 \leqq \alpha < \beta < \cdots < \delta \leqq n)$ die größte Untergruppe von $\mathfrak{X}$, die die Ziffern $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ einzeln fest läßt. Ferner bezeichne $|\mathfrak{X}|$ die Ordnung und $|\mathfrak{S}:\mathfrak{X}|$ den Index von $\mathfrak{X}$.

Unser Ziel ist

SATZ 1. *Ein nicht regulärer Normalteiler einer k-fach transitiven Permutationsgruppe, die von der symmetrischen verschieden ist, ist $(k-1)$-fach primitiv, falls $k \geqq 3$ ist*[1]).

* Alexander von Humboldt-Stipendiat, Tübingen Nov. 1956 bis Februar 1958.

[1]) Für $k=2$ gilt, wie leicht zu sehen ist, diese Behauptung im allgemeinen nicht.

Der Beweis beruht auf

SATZ 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine von $\mathfrak{S}$ verschiedene dreifach transitive Untergruppe von $\mathfrak{S}$. Es sei $\mathfrak{N}$ ein einfacher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, derart daß $\mathfrak{N}_0$ auf den Ziffern $1, 2, \ldots, n$ eine Frobenius-Gruppe*[2]) *der Ordnung $n(n-1)/t$ ist. Dann ist $t \leqq 2$.*

Beweis von Satz 2. a) Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{N}$ nicht regulär. Daher ist $\mathfrak{N}$ nach I zweifach transitiv. $\mathfrak{N}$ ist aber nicht scharf zweifach transitiv, d.h. es ist $\mathfrak{N}_{0,1} \neq 1$. Denn sonst wäre $\mathfrak{N}$ eine Frobenius-Gruppe, also wäre $\mathfrak{N}$ nach dem bekannten Satz von FROBENIUS [3, S. 202] nicht einfach, entgegen unserer Voraussetzung. Wir haben also $|\mathfrak{N}_{0,1}| = (n-1)/t > 1$.

b) Es sei $\mathfrak{F}$ der Frobenius-Kern von $\mathfrak{N}_0$. Nun ist $\mathfrak{N}_0$ in $\mathfrak{G}_0$ invariant und $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{N}_0$ charakteristisch. Also ist $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}_0$ invariant. Da $\mathfrak{G}_0$ zweifach transitiv ist, sind alle Elemente $(\neq 1)$ von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}_0$ miteinander konjugiert. Folglich ist $\mathfrak{F}$ eine elementar abelsche p-Gruppe und $n = p^m$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl m.

c) Wegen der Einfachheit von $\mathfrak{N}$ gibt es keine ungerade Permutation in $\mathfrak{N}$. Wenn der Grad einer Involution von $\mathfrak{N}$ gleich l ist, muß also $l/2$ gerade sein. Anderseits ist nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe. Daher ist l entweder $n-1$ oder n oder $n+1$. Deshalb haben alle Involutionen von $\mathfrak{N}$ den gleichen Grad, welcher entweder $n-1$ oder n oder $n+1$ ist.

d) *Der Grad der Involutionen von $\mathfrak{N}$ sei $n-1$.* Da $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe ist, gibt es kein Element $(\neq 1)$ in $\mathfrak{F}$, welches mit einem Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{N}_{0,1}$ vertauschbar ist. Wir betrachten $\mathfrak{N}_{0,1}$ als eine Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$. Dann führt jede Involution von $\mathfrak{N}_{0,1}$ jedes Element von $\mathfrak{F}$ in sein Reziprokes über. Also umfaßt $\mathfrak{N}_{0,1}$ genau eine Involution. Folglich gibt es in $\mathfrak{N}$ genau $\binom{n+1}{2}$ Involutionen.

Es sei I eine Involution in $\mathfrak{N}$, welche 0 und 1 vertauscht. Da $\mathfrak{N}$ zweifach transitiv ist, gilt die Gleichung $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_0 I \mathfrak{N}_0$. Es sei XIY $(X, Y \in \mathfrak{N}_0)$ eine Involution. Dann gilt $XIY\,XIY = 1$; daraus folgt $IYXI = (YX)^{-1}$, und weiter $IYXI \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}_0^I = \mathfrak{N}_{0,1}$, also $YX \in \mathfrak{N}_{0,1}$. Also ist die Anzahl der Involutionen in der Restklasse $\mathfrak{N}_0 IY$ von Y unabhängig und höchstens $(n-1)/t$. Folglich umfaßt $\mathfrak{N}$ höchstens $n + n\frac{(n-1)}{t}$ Involutionen.

Nun haben wir die Ungleichung $\binom{n+1}{2} \leqq n + \frac{n(n-1)}{t}$. Daraus folgt leicht unsere Behauptung $t \leqq 2$.

e) *Der Grad der Involutionen von $\mathfrak{N}$ sei n.* Da nun n gerade und nach b) $n = p^m$ ist, haben wir $p = 2$. Es gibt $n-1$ Involutionen in $\mathfrak{F}$. Also gibt es in $\mathfrak{N}$ $(n+1)(n-1)$ Involutionen.

Es sei I wie vorher. I läßt genau eine Ziffer, etwa 2, fest. Wir betrachten den Normalisator $\mathsf{N}(\mathfrak{N}_{0,1}) = \mathfrak{N}_{0,1}\{I\}$ von $\mathfrak{N}_{0,1}$ in $\mathfrak{N}$. Es sei $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ der Zentralisator von I in $\mathfrak{N}_{0,1}$. Dann muß $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ die Ziffer 2 festlassen. Aber

[2]) Eine transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ heißt nach WIELANDT [4] eine Frobenius-Gruppe, wenn jede Permutation $(\neq 1)$ von $\mathfrak{G}$ höchstens eine Ziffer festläßt und $\mathfrak{G}$ nicht regulär ist.

da $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe ist, ist $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}) = 1$. Also geht jedes Element von $\mathfrak{N}_{0,1}$ durch Transformation mit I in sein Reziprokes über. Folglich gibt es in $\mathfrak{N}$ genau $(n-1)/t$ Involutionen, welche 0 und 1 vertauschen. Deshalb gibt es in $\mathfrak{N}$ insgesamt $(n+1)(n-1)/t$ Involutionen.

Nun haben wir die Gleichung $(n+1)(n-1) = (n+1)(n-1)/t$, aus der $t = 1$ folgt.

f) *Der Grad der Involutionen von* $\mathfrak{N}$ *sei* $n+1$. Es sei I wie vorher. Wir betrachten wieder $\mathsf{N}(\mathfrak{N}_{0,1}) = \mathfrak{N}_{0,1}\{I\}$. Da $(n-1)/t$ ungerade ist, ist $\mathfrak{N}_{0,1}$ bekanntlich auflösbar ([2], Satz 3.2). Es sei $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ der Zentralisator von I in $\mathfrak{N}_{0,1}$. $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ ist eine Hall-Gruppe von $\mathfrak{N}_{0,1}$ [3]). Denn es sei q ein beliebiger Primteiler von $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})|$ und $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q$ eine q-Sylow-Gruppe von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$, ferner $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q)$ der Zentralisator von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q$ in $\mathsf{N}(\mathfrak{N}_{0,1})$. Da die q-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}_{0,1}$ zyklisch ist ([3], Satz 3.2), umfaßt $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q)$ eine q-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}_{0,1}$. Anderseits umfaßt $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q)$ die Involution I. Also gibt es eine q-Sylow-Gruppe $(\mathfrak{N}_{0,1})_q$ von $\mathfrak{N}_{0,1}$, die bei I invariant und in $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q)$ enthalten ist. $(\mathfrak{N}_{0,1})_q$ umfaßt $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q$. Daraus folgt leicht $(\mathfrak{N}_{0,1})_q \subseteq \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ und $(\mathfrak{N}_{0,1})_q = \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_q$. Es sei $\mathfrak{D}$ ein Komplement von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$ in $\mathfrak{N}_{0,1}$, welches bei I invariant ist. Da $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}) \cap \mathfrak{D} = 1$ ist, führt I jedes Element von $\mathfrak{D}$ in sein Reziprokes über. Es gilt $IK^{-1}DKI = K^{-1}D^{-1}K = (K^{-1}DK)^{-1}$ $(K \in \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}), D \in \mathfrak{D})$. Anderseits folgt aus $INI = N^{-1}$, $N \in \mathfrak{N}_{0,1}$ auch $N \in \mathfrak{D}$. Denn wir setzen $N = KD$, $K \in \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$, $D \in \mathfrak{N}$. Dann haben wir $INI = IKDI = KD^{-1} = N^{-1} = D^{-1}K^{-1}$. Daraus ergibt sich $DKD^{-1} = K^{-1}$ und $D^2KD^{-2} = K$. Da die Ordnung von D ungerade ist, folgt weiter $DKD^{-1} = K$ und $K = K^{-1}$. Weil auch die Ordnung von K ungerade ist, ist $K = 1$. Also ist $\mathfrak{D}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}_{0,1}$. Nun nehmen wir an, daß $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}) > 1$ ist. Es sei r der kleinste Primteiler von $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})|$ und $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ eine r-Sylow-Gruppe von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})$. Ferner seien $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$ und $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$ der Normalisator bzw. der Zentralisator von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ in $\mathfrak{N}$. Wir behaupten $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r) = \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Dazu betrachten wir die Faktorgruppe $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)/\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Da $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe ist, läßt jedes Element $(\neq 1)$ von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ genau zwei Ziffern 0 und 1 fest. Deshalb muß jedes Element von $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$ die Menge $\{0, 1\}$ festlassen. Daraus folgt $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r) \subseteq \mathsf{N}(\mathfrak{N}_{0,1})$. Offensichtlich gehört I zu $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Es sei s ein Primteiler von $|\mathfrak{D}|$ und $\mathfrak{S}$ eine s-Sylow-Gruppe von $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{S}\,\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$. Da $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{N}_{0,1}$ invariant ist, ist $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{D}$ enthalten. Also haben wir $\mathfrak{S}\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}$ ist in $\mathfrak{S}\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ invariant. Es gilt also $\mathfrak{S}\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r = \mathfrak{S} \times \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ und $\mathfrak{S} \subseteq \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Nun nehmen wir an, daß $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r) > \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$ ist, und es sei t_1 ein Primteiler von $|\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)/\mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)|$. Dann ist t_1 ein Primteiler von $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})|$. Nach unserer Wahl von r ist t_1 größer als r. Es sei $\mathfrak{T}_1$ eine t_1-Sylow-Gruppe von $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{T}_1\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ sind zyklisch und $t_1 > r$. Also ist bekanntlich $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{T}_1\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ invariant. Es ist also $\mathfrak{T}_1\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r = \mathfrak{T}_1 \times \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ und

[3]) Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt eine Hall-Gruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $|\mathfrak{H}|$ und $|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|$ teilerfremd sind.

$\mathfrak{T}_1 \subseteqq \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Das widerspricht unserer Annahme $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r) > \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Also haben wir $\mathsf{N}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r) = \mathsf{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r)$. Nach einem Satz von BURNSIDE zerfällt dann $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ in $\mathfrak{N}$. Wegen der Einfachheit von $\mathfrak{N}$ ist $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1})_r$ gleich 1. Das widerspricht unserer Annahme $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}) > 1$. Es ist also $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{N}_{0,1}) = 1$ und $\mathfrak{N}_{0,1} = \mathfrak{D}$. Da jede Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}_{0,1}$ zyklisch ist ([3], Satz 3.2), folgt daraus, daß $\mathsf{N}(\mathfrak{N}_{0,1})$ eine Diedergruppe ist. Insbesondere gibt es in $\mathfrak{N}$ genau $(n-1)/t$ Involutionen, welche 0 und 1 vertauschen. Deshalb gibt es in $\mathfrak{N}$ insgesamt $n(n-1)/t$ Involutionen.

g) Nach f) ist I mit keinem Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{N}_0$ vertauschbar. Da die Ordnung von $\mathfrak{N}_0$ gleich $n(n-1)/t$ ist, sind alle Involutionen von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ miteinander konjugiert. Es seien $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G})$ und $\mathfrak{Z} = \mathsf{Z}(I, \mathfrak{N})$ die Zentralisatoren von I in $\mathfrak{G}$ und in $\mathfrak{N}$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}$ eine regulär transitive Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Weiter gilt offensichtlich $\mathfrak{G} = \mathsf{Z}(I, \mathfrak{G})\mathfrak{N}_0$, $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{N}_0 = 1$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}\mathfrak{N}_0$. Daraus folgt $\mathfrak{G}_0 = (\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_0)\mathfrak{N}_0 = (\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1})\mathfrak{N}_0$. Also haben wir die folgende scharfe Faktorisierung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{Z}(\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1})\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{0,1}$.

h) Es sei $c+1$ die Anzahl der Involutionen in $\mathfrak{Z}$, ferner J eine von I verschiedene Involution in $\mathfrak{Z}$ und $J = (02)\ldots$ die Zyklendarstellung von J. Wir betrachten die Menge der Involutionen, die durch Elemente von $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1}$ mit J konjugiert sind. Da $\mathfrak{Z}$ in $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G})$ invariant ist, ist diese Menge in $\mathfrak{Z}$ enthalten. Die Anzahl der Elemente dieser Menge ist gleich $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1} : \mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1,2}|$. Da $\mathfrak{G}_{0,1}$ transitiv ist, haben wir $|\mathfrak{G}_{0,1} : \mathfrak{G}_{0,1,2}| = n-1$. Wir setzen $|\mathfrak{G}_{0,1}| = (n-1)u$. Dann bekommen wir $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1}| = tu$ und $|\mathfrak{G}_{0,1,2}| = u$ [nach g)]. Daraus folgt $|\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1} : \mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1,2}| \equiv 0 \pmod t$. Natürlich ist die Menge der Involutionen in $\mathfrak{Z}$ in die Klassen der $\mathsf{Z}(I, \mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{G}_{0,1}$-konjugierten Elemente verteilt worden. I bildet alleine eine Klasse. Deshalb haben wir die Kongruenz $c \equiv 0 \pmod t$.

i) Es sei $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})$ der Normalisator von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$. Nun behaupten wir $\mathsf{N}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$. Angenommen, es sei $\mathsf{N}(\mathfrak{Z}) > \mathfrak{Z}$. Dann umfaßt $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})$ nach g) ein Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{N}_0$. Es sei Y ein solches Element von Primzahlordnung. Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{Z}\{Y\}$. Da $\mathfrak{Z}$ eine regulär transitive Untergruppe von $\mathfrak{N}$ und Y ein Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{N}_0$ ist, gibt es kein Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{Z}$, welches mit Y vertauschbar ist. Daher ist $\mathfrak{Z}\{Y\}$ eine Frobenius-Gruppe des Grades $n+1$. Daraus folgt $n \equiv 0 \pmod{|Y|}$. Da $n = p^m$ ist, ist $|Y| = p$. Also ist $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})/\mathfrak{Z}$ eine p-Gruppe. Da $p > 2$ ist, ist $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})/\mathfrak{Z}$ zyklisch ([2], Satz 3.2). Anderseits ist $\mathfrak{F}$ als eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ elementar abelsch. Folglich ist $|\mathsf{N}(\mathfrak{Z})/\mathfrak{Z}| = p$. Es sei J ein beliebiges involutives Zentrumselement von $\mathfrak{Z}$. Nach g) gibt es ein Element X in $\mathfrak{N}_0$ mit $I^X = J$. Daraus folgt $\mathfrak{Z}^X \subseteqq \mathfrak{Z}$, und da die Ordnungen von $\mathfrak{Z}^X$ und $\mathfrak{Z}$ gleich sind, haben wir $\mathfrak{Z}^X = \mathfrak{Z}$. X ist also ein Element von $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})$. Da $\mathsf{N}(\mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{N}_0 = \{Y\}$ und X ein Element von $\mathfrak{N}_0$ ist, erhalten wir $X \in \{Y\}$. Es sei $\mathfrak{J}$ die größte elementar abelsche Untergruppe der 2-Sylow-Gruppe des Zentrums von $\mathfrak{Z}$ und 2^r die Ordnung von $\mathfrak{J}$. Da alle Elemente $(\neq 1)$ von $\mathfrak{J}$ durch Elemente von $\{Y\}$ miteinander konjugiert sind und $\mathfrak{Z}\{Y\}$ eine Frobenius-Gruppe ist, haben wir dann $2^r - 1 = p$. Wir setzen $n+1 = 2^r \cdot s$. Dann ist $s = \frac{n+1}{2^r} = \frac{p^m+1}{p+1} = p^{m-1} - p^{m-2} + \cdots + 1$

ungerade, weil wegen $n+1\equiv 0 \pmod 4$ m ungerade ist. Deshalb ist $\mathfrak{J}$ die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{Z}$ und von $\mathfrak{N}$. Nach einem Satz von BURNSIDE zerfällt $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{Z}$ und wir haben $\mathfrak{Z}=\mathfrak{J}\times\mathfrak{T}$, wobei $\mathfrak{T}$ das 2-Sylow-Komplement von $\mathfrak{Z}$ ist. Also gibt es in $\mathfrak{Z}$ genau p Involutionen. Daher ist $c=p-1$.

Es seien K und L $(K\neq L)$ Involutionen in $\mathfrak{N}$. Der Grad von KL sei $n+1$. Wir behaupten nun, daß KL wieder eine Involution ist. Angenommen, die Ordnung von KL sei größer als 2. Da die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ elementar abelsch ist, gibt es kein Element der Ordnung 4 in N. Also ist die Ordnung von KL entweder u oder $2u$, wobei u eine ungerade Zahl >1 ist. Da der Grad von KL $n+1$ ist, ist die Ordnung von KL ein Teiler von $n+1$. Denn sonst umfaßt $\{KL\}$ ein Element $X(\neq 1)$, welches mindestens eine Ziffer, etwa 0, festläßt. Es sei $KL=(01\ldots)\ldots$ die Zyklendarstellung von KL. Dann läßt X auch die Ziffer 1 fest. Da $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe ist, muß $KL=(01)\ldots$ sein und es müssen alle andere Zyklen der Zyklendarstellung von KL den gleichen Grad $x>2$ haben. Weil $\mathfrak{N}$ einfach ist, gibt es keine ungerade Permutation in $\mathfrak{N}$. Daraus folgt $x\equiv 0 \pmod 2$. Wir setzen $x=2x_1$. Dann ist x_1 eine ungerade Zahl >1. Es sei $y+1$ die Anzahl der Zyklen in der Zyklendarstellung von KL. Dann haben wir $2+xy=n+1$ und daraus $n-1\equiv 0 \pmod{x_1}$. Anderseits ist $(KL)^{x_1}$ eine Involution und $(KL)^2\neq 1$ ein Element von $\mathfrak{N}_{0,1}$. Da alle Involutionen von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ miteinander konjugiert sind, ist die Ordnung des Zentralisators von $(KL)^{x_1}$ in $\mathfrak{N}$ auch $n+1$. Dieser Zentralisator umfaßt $(KL)^2$, das die Ordnung x_1 besitzt. Daraus folgt $n+1\equiv 0 \pmod{x_1}$. Also haben wir $2\equiv 0 \pmod{x_1}$. Da x_1 eine ungerade Zahl >1 ist, ist das ein Widerspruch. Nun sei q ein Primteiler von u. Dann ist q ein Teiler von $n+1$. Es sei M ein Element der Ordnung q von $\{KL\}$. Dann haben wir $KMK=M^{-1}$. Da nach dem Satz von SYLOW M zu einer Konjugierten von $\mathfrak{Z}$ gehört, umfaßt der Zentralisator $\mathfrak{Z}(M)$ von M in $\mathfrak{N}$ eine 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$. Es sei $\mathfrak{Z}^*(M)$ die Menge der Elemente X von $\mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft $X^{-1}MX=M^{\pm 1}$. $\mathfrak{Z}^*(M)$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{N}$ und $2\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}^*(M):\mathfrak{Z}(M)}$. Aber wegen $KMK=M^{-1}$ haben wir $\mathfrak{Z}^*(M):\mathfrak{Z}(M)=2$. Da $\mathfrak{Z}(M)$ eine 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ umfaßt, ist das ein Widerspruch. Also ist KL eine Involution und insbesondere $KL=LK$. Nun betrachten wir die Anzahl der geordneten Paare (K, L), wobei K und L wie bisher gewählt sind. Diese Anzahl ist einerseits gleich $\frac{n(n-1)}{t}\left(\frac{n(n-1)}{t}-1\right)$. Anderseits ordnen wir dem Paare (K, L) das Produkt KL seiner Komponenten zu. KL ist entweder eine Involution oder besitzt den Grad $n-1$. Die Anzahl der Paare (K, L), für welche das Produkt KL eine Involution ist, ist gleich $\frac{n(n-1)}{t}c$. Nun sei der Grad von KL gleich $n-1$. Es sei $M(\neq 1)$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{N}_{0,1}$. Dann gibt es nach f) $(n-1)/t$ Paare (K, L) mit $KL=M$. Also ist die Anzahl der Paare (K, L), für welche das Produkt KL den Grad $n-1$ besitzt, gleich $\frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{n-1}{t}-1\right)\left(\frac{n-1}{t}\right)$. Nun haben wir die folgende Gleichung:

$$\frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{n-1}{t}-1\right)\left(\frac{n-1}{t}\right)+\frac{n(n-1)}{t}c=\frac{n(n-1)}{t}\left(\frac{n(n-1)}{t}-1\right).$$

Daraus folgt $c=\frac{n-1}{2}\frac{n-1+t}{t}$. Da $n=p^m$ und $c=p-1$ ist, erhalten wir dann $p-1=\frac{p^m-1}{2}\frac{p^m-1+t}{t}$. Daraus folgt leicht $m=1$ und $t=p-1$. Dann ist $\mathfrak{N}$ scharf zweifach transitiv. Das ist ein Widerspruch [4, § 12]. Also ist $\mathsf{N}(\mathfrak{Z})=\mathfrak{Z}$.

j) Nun behaupten wir, daß $c>0$ ist. Angenommen es sei $c=0$. Dann ist die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ entweder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe oder eine zyklische Gruppe. Aber da $\mathfrak{N}$ einfach ist, kommt die letztere nicht vor. Es sei $\mathfrak{Z}^X=\mathsf{Z}(I^X,\mathfrak{N})$ eine von $\mathfrak{Z}$ verschiedene Konjugierte von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$. Dann haben wir $\mathfrak{Z}\wedge\mathfrak{Z}^X=1$. Denn es sei $\mathfrak{Z}\wedge\mathfrak{Z}^X>1$ und $Y(\neq 1)$ ein Element von $\mathfrak{Z}\wedge\mathfrak{Z}^X$. Dann ist Y mit I und I^X vertauschbar. Es ist also Y mit jedem Element von $\{I\cdot I^X\}$ vertauschbar. Nach f) ist der Grad von Y gleich $n+1$. Anderseits, da die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, ist die Ordnung von $I\cdot I^X$ keine 2-Potenz. Denn angenommen, es sei $|I\cdot I^X|$ eine 2-Potenz. $\{I\cdot I^X\}$ umfaßt mindestens eine der beiden Involutionen I und I^X nicht. Denn sonst haben wir $I=I^X$ und $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}^X$, gegen unsere Voraussetzung $\mathfrak{Z}\neq\mathfrak{Z}^X$. Wir nehmen an $I\notin\{I\cdot I^X\}$. Dann umfaßt die 2-Gruppe $\{I\}\{I\cdot I^X\}$ mindestens 3 Involutionen. Offensichtlich ist das ein Widerspruch. Es sei also W ein Element aus $\{I\cdot I^X\}$ von ungerader Primzahlordnung. Da W mit dem Element Y des Grades $n+1$ vertauschbar ist, ist der Grad von W nach f) gleich $n+1$. Es sei $\mathsf{Z}(W)$ der Zentralisator von W in $\mathfrak{N}$. Da W nach dem Satz von SYLOW zu einer Konjugierten von $\mathfrak{Z}$ gehört, umfaßt $\mathsf{Z}(W)$ eine Involution. Anderseits haben wir $IWI=W^{-1}$ wegen $I(I\cdot I^X)I=(I\cdot I^X)^{-1}$. Es sei $\mathsf{Z}^*(W)$ die Menge der Elemente Z von $\mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft $Z^{-1}WZ=W^{\pm 1}$. $\mathsf{Z}^*(W)$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{N}$ und $\mathsf{Z}^*(W)=\{I\}\mathsf{Z}(W)$. Dann umfaßt jede 2-Sylow-Gruppe von $\mathsf{Z}^*(W)$ mindestens zwei Involutionen. Aber da die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, ist das bekanntlich ein Widerspruch. Also haben wir $\mathfrak{Z}\wedge\mathfrak{Z}^X=1$. Ferner ist $\mathfrak{Z}$ nach i) eigener Normalisator in $\mathfrak{N}$. Folglich enthält $\mathfrak{N}$ nach dem bekannten Satz von FROBENIUS einen zu $\mathfrak{Z}$ komplementären Normalteiler. Das widerspricht der Einfachheit von $\mathfrak{N}$. Also ist $c>0$.

k) Wir behaupten die Existenz einer Involution von $\mathsf{Z}(I,\mathfrak{G})\wedge\mathfrak{G}_{0,1}$, welche nur die Ziffern 0 und 1 festläßt. Es sei $\mathsf{Z}(\mathfrak{N}_{0,1})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}_{0,1}$ in $\mathfrak{G}_{0,1}$. Da die Faktorisierung $\mathfrak{G}_{0,1}=(\mathsf{Z}(I,\mathfrak{G})\wedge\mathfrak{G}_{0,1})\mathfrak{N}_{0,1}$ nach g) scharf und $\mathfrak{N}_{0,1}$ zyklisch ist, haben wir $\mathsf{Z}(\mathfrak{N}_{0,1})=\mathfrak{N}_{0,1}\times\mathfrak{C}_{0,1}$, wobei $\mathfrak{C}_{0,1}$ eine Untergruppe von $\mathsf{Z}(I,\mathfrak{G})\wedge\mathfrak{G}_{0,1}$ ist. Nun behaupten wir, daß $\mathfrak{C}_{0,1,2}=1$ ist. Angenommen, es sei $\mathfrak{C}_{0,1,2}>1$. $\mathfrak{C}_{0,1,2}$ lasse die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, l-1$ fest. Es sei $\mathsf{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2})$ der Zentralisator von $\mathfrak{C}_{0,1,2}$ in $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2})=\mathsf{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2})\wedge\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}_{0,1,2})=\mathsf{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2})\wedge\mathfrak{F}$. Wir betrachten $\mathfrak{C}_{0,1,2}$ als Automorphismengruppen von $\mathfrak{Z}$ und von $\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{F}$ regulär transitive Permutationsgruppen des Grades $n+1$ und n sind, ist leicht zu sehen, daß die Ordnungen von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2})$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}_{0,1,2})$ gleich l und $l-1$ sind. Da $\mathfrak{F}$ eine elementar abelsche p-Gruppe ist, ist weiter $l-1=p^r$. Wenn $\mathfrak{C}_{0,1,2}$ und $\mathfrak{C}_{0,1,i}$ verschieden sind, haben w

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,2}) \wedge \mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,i}) = \{I\}$. Denn sonst läßt jedes Element von $\mathfrak{C}_{0,1,2} \cup \mathfrak{C}_{0,1,i}$ eine weitere Ziffer, etwa 3, außer 0 und 1 fest. Daraus folgt $\mathfrak{C}_{0,1,2} \cup \mathfrak{C}_{0,1,i} \subseteq \mathfrak{C}_{0,1,3}$. Da $\mathfrak{G}_{0,1}$ transitiv und $\mathfrak{C}_{0,1}$ in $\mathfrak{G}_{0,1}$ invariant ist, sind $\mathfrak{C}_{0,1,2}$, $\mathfrak{C}_{0,1,i}$ und $\mathfrak{C}_{0,1,3}$ alle miteinander konjugiert. Daraus folgt $\mathfrak{C}_{0,1,2} = \mathfrak{C}_{0,1,3} = \mathfrak{C}_{0,1,i}$. Das widerspricht unsere Annahme $\mathfrak{C}_{0,1,2} \neq \mathfrak{C}_{0,1,i}$. Die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{C}_{0,1,i}$ ist gleich $\frac{p^m-1}{p^r-1}$. Denn $\mathfrak{G}_{0,1}$ ist transitiv, $\mathfrak{C}_{0,1}$ ist in $\mathfrak{G}_{0,1}$ invariant und jedes $\mathfrak{C}_{0,1,i}$ läßt außer 0 und 1 genau p^r-1 Ziffern fest. Nun zählen wir die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{Z}$, die mindestens in einer $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,i})$ liegen. Da $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,i}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,j}) = \{I\}$ $(i \neq j)$ ist, ist diese Anzahl gleich $\left(\frac{p^m-1}{p^r-1}\right)(p^r-1)+2 = p^m+1$. Also liegt jedes Element von $\mathfrak{Z}$ in einer $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,i})$. Es sei $m>1$. Dann gibt es wegen $p>2$ nach einem Satz von ZSIGMONDY [5] eine Primzahl q, für welche p die Ordnung $2m$ hat. Nun haben wir $p^r+1 \not\equiv 0 \pmod q$, und es liegt jedes Element der Ordnung q von $\mathfrak{Z}$ in keinem $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}_{0,1,i})$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $m=1$ und $r=0$. Das ist offensichtlich ein Widerspruch. Also haben wir $\mathfrak{C}_{0,1,2}=1$. Da $\mathfrak{G}_{0,1}$ transitiv und $\mathfrak{C}_{0,1}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_{0,1}$ ist, erhalten wir dann $\mathfrak{C}_{0,1,3} = \cdots = \mathfrak{C}_{0,1,n+1} = 1$. Also ist $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_{0,1}$ eine Frobenius-Gruppe des Grades n. Es sei die Ordnung von $\mathfrak{C}_{0,1}$ gerade und J eine Involution von $\mathfrak{C}_{0,1}$. Dann ist J mit keinem Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{F}$ vertauschbar. Also läßt J keine Ziffer außer 0 und 1 fest. Deshalb dürfen wir annehmen, daß die Ordnung von $\mathfrak{C}_{0,1}$ ungerade ist. Dann ist $\mathfrak{C}_{0,1}$ auflösbar [5, Satz 3.2]. Da offensichtlich $\mathfrak{G}_{0,1}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_{0,1})$ als Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{N}_{0,1}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{G}_{0,1}$ und also $\mathfrak{G}_0$ auflösbar. Da $\mathfrak{G}_0$ zweifach transitiv und m ungerade ist, haben wir nach einem Satz von HUPPERT [1] $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{S}(p^m)$, wobei $\mathfrak{S}(p^m)$ die Gruppe aller semilinearen Abbildungen $x \to a x^{p^k} + c$ über dem Galois-Feld $GF(p^m)$ ist. Die Ordnung von $\mathfrak{S}(p^m)$ ist gleich $p^m(p^m-1)m$. Offensichtlich ist $p^m(p^m-1)m \equiv 0 \pmod 2$ und $\not\equiv 0 \pmod 4$. Anderseits ist $|\mathfrak{G}_0|$ gerade. Nun umfaßt $\mathfrak{S}(p^m)$ eine Involution $J: x \to -x$. J ist vertauschbar mit jeder Abbildung der Gestalt $x \to a x^{p^k}$. Daraus folgt nach einem bekannten Satz von P. HALL, daß $\mathfrak{G}_{0,1}$ eine zentrale Involution umfaßt. Dann muß die Ordnung von $\mathfrak{C}_{0,1}$ gerade sein. Daher ist die Voraussetzung, daß die Ordnung von $\mathfrak{C}_{0,1}$ ungerade ist, falsch. Also erlaubt $\mathfrak{Z}$ einen involutiven Automorphism σ, welcher nur das Einselement und I festläßt.

l) Nach einem Satz von ZASSENHAUS ([6], Satz 8) ist entweder [I] die Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}$ nach seinem Zentrum $\mathfrak{C}$ isomorph zur Tetraedergruppe $\mathfrak{A}_4$, oder [II] $\mathfrak{Z}$ umfaßt einen σ-zulässigen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ vom Index 2, für welchen $\sigma(A) = A^{-1}$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$ gilt. Zuerst behandeln wir den Fall [I]. Nach i) ist I die einzige zentrale Involution in $\mathfrak{Z}$. Deshalb ist die 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{C}$ zyklisch. Nach j) gibt es in $\mathfrak{Z}$ noch eine von I verschiedene Involution J. In $\{J\} \times \mathfrak{C}$ gibt es dann 3 Involutionen. Wenn alle Involutionen von $\mathfrak{Z}$ in $\{J\} \times \mathfrak{C}$ liegen, haben wir $c=2$. Nach h) ist dann $t=2$. Also dürfen wir annehmen, daß es in $\mathfrak{Z}$ noch eine Involution K gibt. $\mathfrak{C}\{J\}\{K\}$ ist dann ein Normalteiler von $\mathfrak{Z}$ mit dem Index 3. Es gibt verschiedene Fälle. (i) Es sei $JK = KJ$. Dann gibt es in $\mathfrak{Z}$ 7 Involutionen und wir erhalten $c=6$.

Daher ist nach h) entweder $t=2$ oder $t=6$. Wir nehmen an, daß $t=6$ ist. Da $|\mathfrak{A}_4| \equiv 0 \pmod 3$ ist, ist $n+1 \equiv 0 \pmod 3$ und $n-1 \not\equiv 0 \pmod 3$. Anderseits ist $n-1 \equiv 0 \pmod t$, also $n-1 \equiv 0 \pmod 3$. Das ist ein Widerspruch. Deshalb muß $t=2$ sein. (ii) Es sei $JK \neq KJ$. Die Involutionen in den Restklassen $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}J$ und $\mathfrak{C}K$ sind I; J, IJ; K und IK. Nun sei LJK $(L \in \mathfrak{C})$ eine Involution in der Restklasse $\mathfrak{C}JK$. Dann gilt $LJKLJK = 1 = L^2(JK)^2$. Daraus folgt $L^2 = (JK)^2$. Anderseits, da $(JK)^2$ zu $\mathfrak{C}$ gehört und $J(JK)^2J = (JK)^{-2} = (JK)^2$ ist, ist die Ordnung von JK gleich 4. Wenn also die Ordnung der 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{C}$ gleich 2 ist, gibt es in $\mathfrak{Z}$ 5 Involutionen. Dann ist $c=4$. Nach h) ist t entweder 4 oder 2. Aber da $n-1 \equiv 0 \pmod t$ und $n-1 \not\equiv 0 \pmod 4$ ist, haben wir $t=2$. Wenn die Ordnung der 2-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{C}$ gleich 4 oder größer als 4 ist, gibt es in $\mathfrak{Z}$ 7 Involutionen, und wir haben $c=6$. Wie oben gilt dann $t=2$. Nun behandeln wir den Fall [II]. Die 2-Sylow-Gruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$ ist zyklisch. Nach j) umfaßt $\mathfrak{Z}$ noch eine Involution $J \neq I$. Dann haben wir $\mathfrak{Z} = \{J\}\mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}^X (X \in \mathfrak{N})$, und $\mathfrak{Z} \wedge \mathfrak{Z}^X$ umfasse ein Element $Y(\neq 1)$ von einer ungeraden Ordnung. Es sei $\mathfrak{Z}(Y)$ der Zentralisator von Y in $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{Z}(Y)$ umfaßt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^X$. Anderseits gilt nach i) $I \neq I^X$ und $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^X$. Da Y mit I vertauschbar ist, ist der Grad von Y gleich $n+1$. Da also Y mit keinem Element $(\neq 1)$ von $\mathfrak{N}_0$ vertauschbar ist, ist $n+1 \geqq |\mathfrak{Z}(Y)|$. Mithin haben wir $|\mathfrak{Z}(Y)| = n+1$. Daraus folgt $\mathfrak{Z}(Y) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^X$ und $(\mathfrak{Z}(Y) : \mathfrak{A}) = (\mathfrak{Z}(Y) : \mathfrak{A}^X) = 2$. Daher sind I und I^X Zentrumselemente von $\mathfrak{Z}(Y)$ und es folgt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^X = \mathfrak{Z}(Y)$. Das widerspricht der Annahme $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}^X$. Deshalb umfaßt $\mathfrak{Z} \wedge \mathfrak{Z}^X$ kein Element $(\neq 1)$ von einer ungeraden Ordnung. Also ist nach j) und i) I das einzige Zentrumselement $(\neq 1)$ von $\mathfrak{Z}$. Es sei $\mathfrak{T}$ das 2-Sylow-Komplement von $\mathfrak{A}$. Nun gilt $JTJ \neq T$ für jedes $T(\neq 1)$ von $\mathfrak{T}$. Also ist bekanntlich $JTJT = 1$ für jedes T von $\mathfrak{T}$. Es sei S ein Element von $\mathfrak{S}$. Dann haben wir $JSTJST = JSJS$. Es sei $\mathfrak{S}^*$ die Menge der Elemente S von $\mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft $JSJS = 1$. Dann ist $\mathfrak{S}^*$ eine Untergruppe, weil $\mathfrak{S}$ eine zyklische Gruppe ist. Wir setzen $n+1 = 2^q \cdot r$, $(2, r) = 1$. Dann ist die Ordnung 2^s von $\mathfrak{S}^*$ ein Teiler von 2^q. Es gibt daher in $\mathfrak{Z}$ $1 + 2^s \cdot r$ Involutionen. Also ist $c = 2^s \cdot r$ ein Teiler von $n+1$. Deshalb ist nach h) t ein Teiler von $n+1$. Anderseits ist t ein Teiler von $n-1$. Daraus folgt $t=2$.

Damit ist der Beweis des Satzes 2 beendet.

BEMERKUNG. Nach ZASSENHAUS [6] kann man weiter schließen, daß $\mathfrak{N} = PSL(2, p^m)$ ist, wobei $PSL(2, p^m)$ die 2-dimensionale projektive spezielle lineare Gruppe über dem Galois-Feld $GF(p^m)$ ist. Dem Verfasser scheint die Frage interessant, ob es noch eine andere einfache, zweifach transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{N}$ mit Frobeniusschem $\mathfrak{N}_0$ gibt.

Beweis von Satz 1. Wir haben folgendes zu zeigen: Ein nicht regulärer Normalteiler $\mathfrak{N}^*$ einer k-fach transitiven, nicht symmetrischen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $(k-1)$-fach primitiv.

Nach der Definition der mehrfachen Primitivität genügt es, den Satz für $k=3$ zu beweisen. Nach WIELANDT und HUPPERT [5, Satz 3.4] ist $\mathfrak{N}^*$ $\frac{5}{2}$-fach transitiv und daher $\mathfrak{N}_0^*$ $\frac{3}{2}$-fach transitiv. Wenn also $\mathfrak{N}_0^*$ keine Frobenius-

Gruppe (des Grades n) ist, ist $\mathfrak{N}_0^*$ primitiv [5, Satz 1.4]. Also können wir annehmen, daß $\mathfrak{N}_0^*$ eine Frobenius-Gruppe des Grades n ist. Es sei $\mathfrak{F}^*$ der Frobenius-Kern von $\mathfrak{N}_0^*$. Da $\mathfrak{G}_0$ zweifach transitiv ist, sind alle Elemente $(\neq 1)$ von $\mathfrak{F}^*$ in $\mathfrak{G}_0$ miteinander konjugiert. Also ist $\mathfrak{F}^*$ eine elementar abelsche p-Gruppe und $n = p^m$ für eine Primzahl p. $\mathfrak{G}$ umfasse einen regulären Normalteiler. Dann gilt bekanntlich entweder die Gleichung $n+1=2^l$ oder $n+1=3$ ([3], Satz 2.1). Aber aus $p^m+1=2^l$ oder $p^m+1=3$ folgt $m=1$. Dann ist $\mathfrak{N}_0^*$ primitiv. Also können wir annehmen, daß $\mathfrak{G}$ keinen regulären Normalteiler umfaßt. Es sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}^*$. Dann ist $\mathfrak{N}$ bekanntlich einfach [BURNSIDE, Theory of groups, p. 202]. Nach unserer Voraussetzung über $\mathfrak{N}^*$ ist auch $\mathfrak{N}_0$ eine Frobenius-Gruppe des Grades n. Also ist $\mathfrak{N}$ nach Satz 2 zweifach primitiv; daher ist auch $\mathfrak{N}^*$ zweifach primitiv.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

Literatur

[1] HUPPERT, B.: Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen. Math. Z. **68**, 126–150 (1957). — [2] JORDAN, C.: Sur la limite de transitité des groupes non alternés. Bull. Soc. math. France **1**, 40–71 (1873). — [3] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [4] WIELANDT, H.: Vorlesung über Permutationsgruppen. (Ausarbeitung von J. ANDRÉ.) Tübingen 1955. — [5] WIELANDT, H., u. B. HUPPERT: Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen. Archiv d. Math. **9**, 18–26 (1958). — [6] ZASSENHAUS, H.: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 17–40 (1935). — [7] ZSIGMONDY, K.: Zur Theorie der Potenzreste. Monatsh. f. Math. u. Phys. **3**, 265–284 (1892).

Dept. of Math., Hokkaido University, Sapporo (Japan)

(Eingegangen am 1. Mai 1958)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 174–189 (1958)

Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen vom Abel-Liouvilleschen Typus

Von

ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Es sei $f(x, y)$ eine im Rechteck

$$R: 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| \leqq b \quad (0 < a, b < +\infty) \tag{1.1}$$

eindeutige reelle stetige Funktion von x und y, und es bezeichne C die Gesamtheit aller eindeutigen, reellen, stetigen Funktionen $g(x)$, $|g(x)| \leqq b$, die im Intervall $J: 0 \leqq x \leqq a$ definiert sind und im Nullpunkt verschwinden. Ist dann μ eine reelle Zahl aus dem Intervall $(0, 1]$, so liefert die Transformation

$$T_\mu(g) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f\left(t, g(t)\right) dt \; ^1) \tag{1.2}$$

eine Abbildung von C. Die Frage nach der Existenz eines Fixpunktes, d.h. einer Funktion $y(x)$, $y(x) \in C$ mit der Eigenschaft

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f\left(t, y(t)\right) dt \tag{1.3}$$

für alle $x \in J_1 (J_1 = [0, a_1])$ mit einem geeigneten a_1, $0 < a_1 \leqq a$ ist bekanntlich äquivalent mit der Auffindung einer (stetigen) Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^x (x-t)^{-\mu} y(t)\, dt \right\} = f(x, y) \tag{1.4}$$

mit $y(0) = 0$. Ist $0 < \mu < 1$, so kann man diese Tatsache durch Multiplikation von (1.3) mit $(\tau - x)^{-\mu}$ und Integration von $x = 0$ bis $x = \tau$ unter Heranziehung einer einfachen Transformationsformel, die in 2. ausführlich bewiesen wird, leicht nachweisen. Ebenso leicht kann gezeigt werden, daß aus (1.4) ohne weiteres (1.3) folgt. Läßt man in (1.2) $\mu \to 1$ konvergieren, so konvergiert $T_\mu(g)$ gegen $\int_0^x f(t, g)\, dt$. Man kann entsprechend zeigen, daß (bei festem g)

---

[1]) Sowohl in diesem, als auch in den nachfolgenden Integralen soll der Wert der Integrale für $x = 0$ durch Stetigkeit definiert werden. Es gilt dann

$$\Gamma(\mu + 1) \lim_{x \to 0} \{T_\mu(g(x))/x^\mu\} = f(0, 0),$$

und somit ist $T_\mu(g(x)) = O(x^\mu)$.

der Ausdruck

$$\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^x (x-t)^{-\mu} g(t)\,dt$$

für $\mu \to 1$ gegen $g(x)$ konvergiert. Man setze in der Tat

$$D_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^x (x-t)^{-\mu} g(t)\,dt - \frac{g(x)}{\Gamma(2-\mu)}. \tag{1.5}$$

Dann ist

$$D_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^x (x-t)^{-\mu}\{g(t)-g(x)\}\,dt.$$

Man wähle bei vorgegebenem $\varepsilon>0$ und einem $x>0$ $x_1 (0<x_1<x)$ so, daß im Intervall $x_1 \leqq t \leqq x$ die Ungleichung

$$|g(t)-g(x)| \leqq \varepsilon$$

gilt. Dann wird

$$|D_\mu(x)| \leqq \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^{x_1} (x-t)^{-\mu}|g(t)-g(x)|\,dt + \frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\mu)},$$

und somit

$$\overline{\lim_{\mu\to 1}}|D_\mu(x)| \leqq \varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung.

Diese Zusammenhänge würden zweifellos keine selbständige Abhandlung rechtfertigen, wenn nicht zugleich zwei weitere Gründe hinzukämen, die mich veranlaßt haben, diese Note zu publizieren. Erstens die Tatsache, daß hier dem Weierstraßschen Approximationssatz sowohl beim Beweis der Eindeutigkeit der Lösung als auch beim Konvergenzbeweis der Approximationsfolge eine wesentliche Rolle zukommt und zweitens, daß die hier gegebenen Bedingungen nicht ohne weiteres gelockert werden können. Es herrschen also sowohl in dem Fall von 3. und 4., als auch in demjenigen von 6. und 7. dieselben Verhältnisse, wie in den Fällen $\mu=1$ von ROSENBLATT-NAGUMO-PERRON-HAVILAND und KRASNOSELSKI-KREIN-LUXENBURG, für welche man weiß, daß die zugehörigen Lipschitz-Bedingungen nicht abgeschwächt werden können, ohne daß man die Eindeutigkeit der Lösung und die Konvergenz der Iterationsfolge einbüßt.

2. Vorbereitende Tatsachen. Der in 1. durchgeführte Übergang von (1.3) zu der äquivalenten Gl. (1.4) beruht auf nachfolgendem Satz:

HILFSSATZ 1. *Für* $0<\mu<1$ *gilt*

$$J = \int_t^x (x-\tau)^{\mu-1}(\tau-t)^{-\mu}\,d\tau = \Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu). \tag{2.1}$$

Beweis. Man setze $\tau=(x-t)\sigma+t$. Dann wird

$$J = \int_0^1 (1-\sigma)^{\mu-1}\sigma^{-\mu}\,d\sigma = B(\mu, 1-\mu) = \Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu).$$

HILFSSATZ 2. *Die Funktion $u(x)$ sei im Intervall J stetig und habe dort die Eigenschaften:*

1) $$u(x) \geqq 0.$$

2) $$\lim_{x \to 0} u(x)\, x^{-\alpha} = 0 \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \mu,\ 0 < \mu \leqq 1).$$

Gilt dann

$$u(x) \leqq \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\alpha} u(t)\, dt, \tag{2.2}$$

so verschwindet $u(x)$ identisch in J.

Beweis. Man setze $v(x) = u(x)\, x^{-\alpha}$ und beachte, daß wegen 2) $v(x)$ als eine in J stetige Funktion definiert werden kann mit $v(0) = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es nach dem klassischen Weierstraßschen Approximationssatz ein Polynom

$$P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (n = n(\varepsilon))$$

mit der Eigenschaft

$$|v(x) - P(x)| \leqq \varepsilon. \tag{2.3}$$

In der Tat gibt es zunächst ein Polynom

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

derart, daß

$$|v(x) - Q(x)| \leqq \varepsilon/2 \qquad (x \in J)$$

gilt[2]) und somit wird auch

$$|v(0) - Q(0)| = |a_0| \leqq \varepsilon/2.$$

Das beweist (2.3). Man schreibe

$$v(x) = P(x) + \varepsilon(x). \tag{2.4}$$

Dann ist $\varepsilon(x)$ stetig in J und es gilt $|\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon$. Führt man in (2.2) die Funktion $v(x)$ ein, so wird

$$v(x)\, x^{\alpha} \leqq \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} v(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Man nehme zunächst $\alpha = \mu$. Dann wird

$$0 \leqq v(x) \leqq \sum_1^n \lambda_k a_k x^k + \varepsilon_1(x)$$

mit

$$\lambda_k = \prod_1^k \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right)^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$\varepsilon_1(x) = \mu\, x^{-\mu} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \varepsilon(t)\, dt.$$

Man stellt leicht fest, daß $|\varepsilon_1(x)| \leqq \varepsilon$ ist.

[2]) Man vgl. z.B. RUDIN, W.: Principles of Mathematical Analysis, S. 131. New York u. London: McGraw-Hill Book Co, Inc. 1953.

Wiederholt man dieses Verfahren m-mal, so erhält man

$$0 \leqq v(x) \leqq \sum_1^n \lambda_k^m a_k x^k + \varepsilon_m(x)$$

mit

$$\varepsilon_m(x) = \mu x^{-\mu} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \varepsilon_{m-1}(t)\, dt.$$

Läßt man $m \to \infty$ konvergieren, so konvergieren die λ_k^m wegen $0 < \lambda_k < 1$ gegen Null und somit muß [da jedes $\varepsilon_k(x)$ absolut genommen kleiner als ε ausfällt] $v(x) \leqq \varepsilon$ gelten. Das beweist den Hilfssatz 2 für $\alpha = \mu$. Ist $\alpha < \mu$, so genügt die (unwesentliche) Annahme $a \leqq 1$, um die Abschätzungen genau wie im Falle $\alpha = \mu$ zu gestalten[3]). Im folgenden soll Hilfssatz 2 nur für $\alpha = \mu$ verwendet werden.

3. Einzigkeit des Fixpunktes. Wir beweisen nun folgenden Einzigkeitssatz:

SATZ 1. *Genügt $f(x, y)$ in R der Lipschitz-Bedingung*

$$x^\mu |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq \Gamma(\mu+1)\, |y_1 - y_2|, \tag{3.1}$$

so kann es höchstens einen Fixpunkt von (1.2) geben. Der Faktor $\Gamma(\mu+1)$ ist der bestmögliche.

Beweis. Hat (1.2) zwei Fixpunkte, etwa y_1 und y_2, so wird

$$y_1(x) - y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \{f(t, y_1) - f(t, y_2)\}\, dt,$$

und mithin

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqq \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt.$$

Setzt man $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$, so ist wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{y_1(x)}{x^\mu} = \lim_{x \to 0} \frac{y_2(x)}{x^\mu} = f(0, 0)/\Gamma(\mu+1),$$

$\lim\limits_{x \to 0} u(x) x^{-\mu} = 0$, und somit muß $u(x)$ nach dem Hilfssatz 2 in identisch verschwinden. Natürlich bleibt der Einzigkeitssatz auch dann richtig, wenn man in (3.1) links x^μ durch x^α mit einem α, $0 \leqq \alpha < \mu$ ersetzt.

Der Nachweis, daß $\Gamma(\mu+1)$ die bestmögliche Konstante, für die der Einzigkeitssatz gilt, wird nach einem Vorbild von PERRON[4]) erbracht.

---

[3]) Herr Tamaschke, der durch Herrn Kamke vor der Drucklegung meiner Arbeit Kenntnis des Hilfssatzes 2 erhielt, hat gezeigt, daß man dessen Beweis auch ohne Heranziehung des Weierstrass'schen Approximationssatzes durchführen kann. Er bedient sich dabei eines Verfahrens, das Herr Tietz für den einfachen Fall $\mu = 1$ $\alpha = 0$ erdacht hat.

[4]) PERRON, O.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **28**, 216–219 (1927).

[5]) Man vgl. z. B. DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'Analyse T. II, p. 79. Paris: Gauthier Villars 1922.

Es sei $\alpha > 0$. Dann gilt zunächst

$$\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{1-x}\,dx\,^5).$$

Man betrachte jetzt die Funktion

$$y = y(x) = \frac{\Gamma(\mu+x)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(x)} \qquad (x \geqq 1)$$

und bilde $y'(1)$. Dann findet man

$$y'(1) = \frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)},$$

und somit ist $y'(1) > 0$. Da jetzt noch $y(1) = 1$ ist, so hat die Gleichung

$$\frac{\Gamma(\mu+x+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(x+1)} = 1+\varepsilon \tag{3.2}$$

bei vorgegebenem hinreichend kleinem positiven ε eine positive Lösung $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, die mit ε gegen Null konvergiert.

Jetzt definiere man die Funktion $f_0(x, y)$ folgendermaßen:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \Gamma(\mu+1)\,(1+\varepsilon)\,\dfrac{y}{x^\mu} & |\,0 < y \leqq x^{\mu+\alpha} \\ \Gamma(\mu+1)\,(1+\varepsilon)\,x^\alpha & |\,y \geqq x^{\mu+\alpha} \\ 0 & |\,y \leqq 0 \end{cases}$$

mit $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Dann hat die Gleichung

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_0(t, y)\,dt$$

unendlich viele Lösungen durch den Nullpunkt, nämlich die Lösungen

$$y(x) = C\,x^{\mu+\alpha}$$

mit einem willkürlichen C, $0 < C \leqq 1$. Das zeigt, daß die Konstante $\Gamma(\mu+1)$ in (3.1) nicht vergrößert werden kann.

4. Konstruktion eines Fixpunktes durch Iteration. Es bedeute R_1 das Rechteck

$$0 \leqq x \leqq a_1, \quad 0 \leqq |y| \leqq b \tag{4.1}$$

mit

$$a_1 = \operatorname{Min}\left\{a, \left(\Gamma(\mu+1)\,\frac{b}{M}\right)^{1/\mu}\right\}$$

und

$$M = \operatorname{Max}\{|f(x,y)|\,|\,0 \leqq x \leqq a,\ |y| \leqq b\}.$$

Dann soll mit Hilfe des klassischen Iterationsverfahrens eine Lösung von (1.3) konstruiert werden, die durch den Nullpunkt geht und in R_1 verläuft.

Es bezeichne $y_0 = y_0(x)$ eine stetige Funktion in R, die durch den Nullpunkt geht. Man definiere die Funktionenfolge

$$(4.2) \qquad y_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t, y_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und nehme an, daß keine dieser Funktionen einschließlich y_0 ein Fixpunkt der Abbildung (1.2) ist.

Zunächst beweist man, wie im klassischen Fall: Für jedes x aus dem Intervall $J_1: 0 \leqq x \leqq a_1$ gilt $|y_n(x)| \leqq b$.

Die Behauptung ist für $n = 0$ voraussetzungsgemäß richtig. Gilt nun $|y_n(x)| \leqq b$ für $x \in J_1$, so folgt aus

$$|y_{n+1}(x)| \leqq \frac{M}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1}\, dt = \frac{M x^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \leqq \frac{M a_1^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \leqq b$$

ohne weiteres die Behauptung.

Jetzt bilde man die Größe

$$(4.3) \qquad d_n(x) = \left| y_n(x) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t, y_n)\, dt \right|.$$

Dann ist

$$d_n(x) = |y_n(x) - y_{n+1}(x)|$$

und für $n = 2, 3, \ldots$

$$(4.4) \qquad d_n(x) \leqq \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} d_{n-1}(t)\, dt.$$

Man setze nun $x^{-\mu} d_1(x) = v_1(x)$ und beachte, daß $\lim\limits_{x \to 0} v_1(x) = 0$ ist. Schreibt man dann wieder, ähnlich wie in 2.

$$v_1(x) = P_1(x) + \varepsilon(x)$$

mit

$$P_1(x) = b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad |\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon,$$

so erhält man aus

$$0 \leqq d_2(x) \leqq \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} v_1(t)\, dt$$

durch Einsetzen

$$0 \leqq x^{-\mu} d_2(x) \leqq \sum_1^m \lambda_k b_k x^k + \varepsilon_1(x)$$

mit

$$\varepsilon_1(x) = \mu x^{-\mu} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \varepsilon(t)\, dt,$$

also $|\varepsilon_1(x)| \leqq \varepsilon$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man dann mit Hilfe von (4.4)

$$0 \leqq x^{-\mu} d_n(x) \leqq \sum_1^m \lambda_k^{n-1} b_k x^k + \varepsilon_{n-1}(x)$$

mit $|\varepsilon_n(x)| \leqq \varepsilon$, und somit durch Grenzübergang $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = 0.$$

Da bei festem m die Konvergenz der Folge $(y_n(x))$ gleichmäßig ist, so gilt:

SATZ 2. *Es sei*

$$\Delta_n = \sup\{d_n(x) \mid x \in J_1\}. \tag{4.5}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0. \tag{4.6}$$

Nachfolgender Satz sichert die Existenz eines Fixpunktes $y(x)$.

SATZ 3. *Die Folge* (y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ *ist in* J_1 *gleichgradig stetig.*

Beweis. Man bilde für zwei Punkte x, x' $(0 \leqq x' \leqq x)$ von J_1 die Differenz

$$y_n(x) - y_n(x').$$

Dann wird

$$|y_n(x) - y_n(x')| \leqq A_1 + A_2$$

mit

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x'} |(x-t)^{\mu-1} - (x'-t)^{\mu-1}|\, |f(t, y_{n-1})|\, dt$$

und

$$A_2 = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{x'}^{x} |(x-t)^{\mu-1} f(t, y_{n-1})|\, dt.$$

Nun ist

$$A_2 \leqq \frac{M}{\Gamma(\mu+1)} |x - x'|^{\mu}$$

und

$$A_1 \leqq \frac{M}{\Gamma(\mu+1)} \{|x - x'|^{\mu} + |x^{\mu} - x'^{\mu}|\}.$$

Dieselben Ungleichungen erhält man, wenn man $0 \leqq x \leqq x'$ nimmt. Wegen $|x-x'|^{\mu} \leqq |x^{\mu} - x'^{\mu}|$ [6]) wird nun

$$|y_n(x) - y_n(x')| \leqq \frac{4M}{\Gamma(\mu+1)} |x^{\mu} - x'^{\mu}|.$$

Das beweist die Behauptung.

Ist nun die (gleichmäßig beschränkte) Folge (y_n) in J_1 gleichgradig stetig, so enthält sie eine Teilfolge, etwa die Teilfolge (y_{n_k}) $(k = 1, 2, \ldots)$, die

---

[6]) Setzt man

$$g(x) = \frac{(1-x)^{\mu}}{1 - x^{\mu}} \qquad (0 \leqq x < 1,\ 0 < \mu \leqq 1)$$

so ist im Intervall $0 \leqq x < 1$

$$g'(x) = -\frac{\mu(1-x)^{\mu-1} x^{\mu-1}(1 - x^{\mu-1})}{(1-x^{\mu})^2} < 0,$$

Da $g(0) = 1$ ist, so gilt $g(x) \leqq 1$.

gleichmäßig gegen eine in J_1 stetige Funktion $y(x)$ konvergiert[7]). Da nun

$$d(x) = \lim_{k\to\infty} \left| y_{n_k}(x) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t, y_{n_k})\, dt \right| = 0$$

ist, so gilt

$$y(x) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t,y)\, dt = 0, \tag{4.6}$$

und mithin ist $y(x)$ ein Fixpunkt von (12). Diese Tatsache sichert aber auch die Konvergenz von (y_n). Denn wäre dies nicht der Fall, so würde die Folge (y_n) mindestens zwei Teilfolgen enthalten, die gegen zwei verschiedene Lösungen von (4.6) konvergieren würden, was nach dem Einzigkeitssatz 1 unmöglich ist. Es muß also

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

sein, und somit die Iteration zu einer konvergenten Folge führen.

Vorherige Entwicklungen arten selbstverständlich im Falle $\mu = 1$ zu den (klassischen) Überlegungen aus, wodurch man den Existenzsatz für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x,y) \tag{4.7}$$

mit einer im Rechteck R

$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b \tag{4.8}$$

stetigen Funktion $f(x, y)$ unter Zugrundelegung der Lipschitz-Rosenblatt-Nagumo-Perronschen Bedingung

$$|x|\,|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqq |y_1 - y_2| \tag{4.9}$$

im Rechteck R_1

$$|x| \leqq a_1, \quad |y| \leqq b \tag{4.10}$$

mit

$$a_1 = \operatorname{Min}\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

nachweist.

Hilfssatz 2 kann in diesem Falle am einfachsten direkt bewiesen werden, indem man $u(x)/x = v(x)$ $\left(\lim_{x\to 0} v(x) = 0\right)$ setzt und (2.2) in der Form

$$x\,J'(x) \leqq J(x) \qquad \left(J(x) = \int_0^x v(t)\, dt\right) \tag{4.11}$$

schreibt. Daraus ergibt sich durch Integration

$$0 \leqq \frac{J(x)}{x} \leqq \frac{J(x_0)}{x_0} \quad (0 < x_0 \leqq x),$$

[7]) Rudin: loc. cit. Fußnote 2) S. 129.

und somit

$$\frac{J(x)}{x} \leqq \lim_{t \to 0} \frac{J(t)}{t} = \lim_{t \to 0} J'(t) = \lim_{t \to 0} v(t) = 0.$$

Es ist also $J(x) = 0$ und mithin auch $v(x)$ bzw. $u(x) = 0$.

Bildet man nun die Folge

$$y_n(x) = \int_0^x f(t, y_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.11}$$

bei beliebigem stetigem $y_0(x)$ mit $y_0(0) = 0$, so scheint es, daß die Heranziehung des Weierstraßschen Approximationssatzes, wie dies eingangs dieser Nummer exerziert wurde, einfacher zum Ziele führt, als das entsprechende (allerdings allgemeiner gehaltene) Verfahren von LASALLE[8]). Man braucht etwa für $x > 0$

$$\frac{1}{x} \left| y_1(x) - \int_0^x f(t, y_1)\, dt \right| = v_1(x)$$

zu setzen und bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ an Stelle $v_1(x)$ die Approximation $P(x) + \varepsilon(x)$ $(|\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon)$ zu verwenden. Das Konvergenzverfahren läuft genau wie beim allgemeinen Fall.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, hat HAVILAND[9]) gezeigt, daß das Iterationsverfahren unter Zugrundelegung der Lipschitz-Bedingung

$$|x|\,|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq (1 + \varepsilon)\,|y_1 - y_2|$$

nicht mehr zu konvergieren braucht. In der nächsten Nummer soll nun gezeigt werden, daß derselbe Sachverhalt für (1.3) unter Zugrundelegung der Lipschitz-Bedingung

$$x^\mu\,|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq \Gamma(\mu + 1)\,(1 + \varepsilon)\,|y_1 - y_2| \tag{4.12}$$

gilt.

5. Konvergenz des Iterationsverfahrens. Wir zeigen nun im Anschluß an HAVILAND, daß die Bedingung (4.12) nicht ausreicht, um die Konvergenz des Iterationsverfahrens für alle stetigen Funktionen $f(x, y)$ zu sichern.

Man definiere in der Tat die Funktion $f_1(x, y)$ durch die Gleichung

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \Gamma(\mu + 1)\, x^\alpha & | -\infty < y \leqq 0 \\ \Gamma(\mu + 1)\left(x^\alpha - (1 + \varepsilon)\,\frac{y}{x^\mu}\right) & | 0 < y \leqq x^{\mu+\alpha} \\ -\varepsilon\,\Gamma(\mu + 1)\, x^\alpha & | x^{\mu+\alpha} < y < +\infty, \end{cases}$$

wobei x im Intervall J_1 variieren soll, und α (bei gegebenem hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$) durch die Bedingung (3.2) bestimmt wird.

---

[8]) LASALLE, I.: Uniqueness Theorems and successive Approximations. Annals of Math. **50**, 722–730 (1942). Den hier in Frage kommenden Fall (4.9) hat zuerst v. KAMPEN (Notes on systems of ordinary differential equations, Amer. J. Math. **63**, 371–376 (1941)) erledigt.

[9]) HAVILAND, E. K.: A note on the convergence of the successive approximations to the solution of an ordinary differential equation. Amer. J. Math. **54**, 632–634 (1932).

Betrachtet man dann die Gleichung

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_1(t, y)\, dt \tag{5.1}$$

und beginnt man mit der Anfangsfunktion $y_0(x) \equiv 0$, so erhält man

$$y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_1(t, 0)\, dt = \frac{x^{\mu+\alpha}}{1+\varepsilon}$$

und

$$y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_1(t, y_1)\, dt = 0.$$

Somit wird allgemein

$$y_{2n-1}(x) = \frac{x^{\mu+\alpha}}{1+\varepsilon}$$

und

$$y_{2n}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

und die Folge (y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ kann nicht konvergieren. Es ist also gezeigt worden, daß der Faktor $\Gamma(\mu+1)$ in (3.1) auch für die Konvergenz des Iterationsverfahrens die äußerste zulässige Grenze darstellt.

Die hier gegebene Erweiterung des klassischen Verfahrens von PICARD und LINDELÖF kann leicht auch auf die Bestimmung der Fixpunkte eines Systems von der Form

$$y_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_k(t, y_1, \ldots, y_n)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unter Zugrundelegung der Lipschitz-Bedingungen

$$x^\mu |f_k(x, y_1, \ldots, y_n) - f_k(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)| \leqq \Gamma(\mu+1) \cdot \mathrm{Max} |y_k - \eta_k|$$

ausgedehnt werden, sofern wieder μ im Intervall $0 < x \leqq 1$ liegt. Der Leser wird keine Schwierigkeit haben, die entsprechenden Rechnungen selbst durchzuführen.

Vorherige Entwicklungen finden natürlich auch auf (entsprechend verallgemeinerte) Volterrasche Integralgleichungen Anwendung. Hat man in der Tat die Integralgleichung

$$y(x) = g(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f\big(x, t, y(t)\big)\, dt \tag{5.2}$$

mit einem in J stetigen $g(x)$ und einer Funktion $f\big(x, t, y(t)\big)$, die in R der Lipschitz-Bedingung

$$t^\mu |f(x, t, y_1) - f(x, t, y_2)| \leqq \frac{\Gamma(\mu+1)}{|\lambda|} |y_2 - y_1| \tag{5.3}$$

bei festen $x, t, 0 \leqq t \in x$, $(x \in J)$ genügt, so liefern die Überlegungen von 3. bis 5. ohne weiteres die Existenz einer (einzigen) Lösung in J_1, die in R_1 verläuft. Insbesondere folgt daraus, daß die Volterrasche Integralgleichung

$$y(x) = g(x) - \lambda \int_0^x f(x, t, y(t))\, dt \tag{5.4}$$

unter der Bedingung

$$|t|\,|f(x, t, y_1) - f(x, t, y_2)| \leqq \frac{1}{|\lambda|}\,|y_1 - y_2| \tag{5.5}$$

für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ $(t \leqq x)$ eine Lösung in (4.10) hat. Der Beweis erfordert lediglich eine Wiederholung des vorher Gesagten und wird hier deshalb nicht ausführlich gegeben werden.

6. Weitere Verallgemeinerungen. Der Einzigkeitsfall von Krasnoselskii und Krein. Wie in 3., im Anschluß an PERRON, gezeigt wurde, kann die Konstante $\Gamma(\mu+1)$ in (3.1) nicht vergrößert werden. Wird jedoch der Funktion $f(x, y)$ eine zweite Lipschitz-Bedingung auferlegt, so kann unter Umständen die Einzigkeit des Fixpunktes auch dann erzwungen werden, wenn $\Gamma(\mu+1)$ durch eine größere Konstante ersetzt wird. Im folgenden soll ein solcher interessanter Fall behandelt werden.

HILFSSATZ 3. *Die Funktion $u(x)$ möge im Intervall J folgende Eigenschaften aufweisen:*

1) $u(x) \geqq 0$, $x \in J$.

2) *$u(x)$ ist stetig in J.*

3) *$u(x)$ genügt den Ungleichungen*

$$u(x) \leqq A\,\mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} u(t)^{\alpha}\, dt \tag{I}$$

und

$$B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1-\alpha} + 1\right) u(x) \leqq (1-\varepsilon) \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} u(t)\, dt \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{II}$$

mit einem α $0 \leqq \alpha < 1$ und einem endlichen, sonst beliebigen A.

Behauptung. Die Funktion $u(x)$ verschwindet identisch in J.

Beweis. Es sei

$$M = \operatorname{Max}\{u(x) \mid x \in J\}$$

gesetzt. Dann folgt aus (I)

$$u(x) \leqq A\,M^{\alpha}\,\mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1}\, dt = A\,M^{\alpha}\,x^{\mu}$$

und durch nochmaliges Einsetzen

$$u(x) \leqq A^{1+\alpha} M^{\alpha^2} x^{\mu(1+\alpha)}.$$

Durch Wiederholung des Verfahrens wird

$$u(x) \leqq A^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-1}} M^{\alpha^m} x^{\mu(1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-1})} \quad (m = 2, 3, \ldots)$$

und somit

$$u(x) \leqq A^{\frac{1}{1-\alpha}} x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}. \tag{6.1}$$

Man setze nun

$$C = \sup\left\{\frac{u(x)^{1-\alpha}}{x^{\mu}} \,\middle|\, x \in J_1 - 0\right\}. \tag{6.2}$$

Dann gilt $C \leqq A$ und mithin ist C endlich. Ferner folgt aus (6.2) die Ungleichung

$$u(x) \leqq C^{\frac{1}{1-\alpha}} x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}. \tag{6.3}$$

Mit Hilfe von (6.3) wird nun

$$J = \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} u(t)\, dt \leqq C^{\frac{1}{1-\alpha}} B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1-\alpha} + 1\right) x^{\frac{\mu}{1-\alpha}},$$

und somit mit Rücksicht auf (II)

$$u(x) \leqq (1-\varepsilon)\, C^{\frac{1}{1-\alpha}} x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}. \tag{6.4}$$

Das ist aber, sofern $C > 0$ ist, unmöglich, da J abgeschlossen ist und $u(x)$ stetig in J.

Setzt man in (II) $\alpha = 0$ voraus, so geht diese in die Ungleichung

$$u(x) \leqq (1-\varepsilon)\, \mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} u(t)\, dt \tag{6.5}$$

über. Andererseits muß nach (I)

$$u(x) \leqq A\, x^{\mu} \tag{6.6}$$

gelten, also

$$\lim_{x \to 0} u(x)\, x^{-\mu} = q \qquad (q \geqq 0). \tag{6.7}$$

Das zeigt, daß Hilfssatz 3 im Vergleich zu dem Hilfssatz 2 nicht allzu schwach ist, denn das, was in (6.5) (durch den Verzicht auf das Gleichheitszeichen) verlorengeht, wird durch die schwächere Voraussetzung über q ($q \geqq 0$!) ausgeglichen.

Hilfssatz 3 hat folgenden Eindeutigkeitssatz zur Folge:

Satz 4. *Genügt $f(x, y)$ in R den beiden Lipschitz-Bedingungen*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq A\, \Gamma(\mu+1)\, |y_1 - y_2|^{\alpha} \qquad (0 \leqq \alpha < 1) \tag{6.8}$$

und

$$x^{\mu} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq (1-\varepsilon) \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{1-\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu\alpha}{1-\alpha} + 1\right)} |y_1 - y_2|, \tag{6.9}$$

so kann es höchstens einen Fixpunkt von (1.2) *geben.*

Vorerst sei bemerkt, daß der Faktor

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{1-\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right)} \qquad (0 \leqq \alpha < 1) \tag{6.10}$$

größer als $\Gamma(\mu+1)$ ist. In der Tat ist

$$\frac{\Gamma(\mu)}{k} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{1-\alpha}+1\right)} = B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right),$$

und somit wird wegen

$$B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right) = \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}}\,dt < \int_0^1 (1-t)^{\mu-1}\,dt = \frac{1}{\mu}, \qquad \frac{\Gamma(\mu)}{k} < \frac{1}{\mu}.$$

Das beweist die Behauptung.

Nun zum Beweis des Satzes 4! Hat (1.2) zwei Fixpunkte, etwa y_1 und y_2, so wird

$$y_1(x) - y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1}\{f(t, y_1) - f(t, y_2)\}\,dt,$$

und mithin wird mit Rücksicht auf (6.8) und (6.9)

$$u(x) \leqq A\,\mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} u(t)^{\alpha}\,dt$$

und

$$u(x) \leqq (1-\varepsilon)\,B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right)^{-1} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} t^{-\mu} u(t)\,dt$$

mit $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$. Das beweist den Satz.

Für $\mu = 1$, d.h. für den Fall der gewöhnlichen Differentialgleichung (7.4) im Rechteck (4.8) haben KRASNOSELSKII und KREIN[10]) den Satz 4 bewiesen. In diesem Falle arten die Bedingungen (6.8) und (6.9) in die einfachen Ungleichungen

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq A\,|y_1 - y_2|^{\alpha} \tag{6.11}$$

und

$$|x|\,|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq \frac{1-\varepsilon}{1-\alpha}\,|y_1 - y_2| \tag{6.12}$$

aus.

7. Konstruktion der Lösung. Gegenbeispiele. LUXENBURG[11]) hat in einer vor kurzem erschienenen Note gezeigt, daß die Differentialgleichung (4.7)

[10]) KRASNOSELSKII, M. A., u. G. KREIN: Über eine Klasse von Eindeutigkeitssätzen für die Gleichung $y' = f(x, y)$. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **11**, No. 1, 209–213 (1956) [Russisch].

[11]) LUXENBURG, W. A. J.: On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. Canad. Math. Bull. **1**, 9–20 (1958).

unter der Annahme der beiden Lipschitz-Bedingungen (6.11) und (6.12), letztere in der Form

$$|x|\,|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqq k|y_1-y_2|, \tag{7.1}$$

mit $k(1-\alpha)<1$ durch Iteration integriert werden kann. Ich zeige kurz, daß ein ähnliches Verhältnis bei der Bestimmung der Fixpunkte von (1.2) unter Zugrundelegung der Bedingung (6.11) sowie der Bedingung

$$x^{\mu}\,|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqq (1-\varepsilon)\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{1-\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu\,\alpha}{1-\alpha}+1\right)}\,|y_1-y_2| \tag{7.2}$$

mit einem $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<1$ besteht. Ich tue es nicht, um nur die diesbezüglichen Resultate zu verallgemeinern, sondern um auch die Schlußweise so zu gestalten, daß das Eigentümliche an den Voraussetzungen von KRASNOSELSKII und KREIN stärker zur Erscheinung tritt.

Man konstruiere wieder, wie in 4., die Folge (y_n) $(n=0,1,\ldots)$ und nehme an, daß keiner der Ausdrücke

$$d_n(x)=\left|y_n(x)-\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1}f\big(t,y_n(t)\big)\,dt\right|$$

in J_1 identisch verschwindet. Es sei

$$\sup\{d_0(x)\,|\,x\in J_1\}=d_0$$

gesetzt. Dann wird zunächst wegen

$$\begin{cases} d_n(x)\leqq A\,\mu\int_0^x (x-t)^{\mu-1}\,d_{n-1}(t)^{\alpha}\,dt, \\ d_n(x)\leqq A^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}}\,d_0^{\alpha^n}\,x^{\mu(1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1})}, \end{cases} \tag{7.3}$$

und somit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,d_n(x)\leqq A^{\frac{1}{1-\alpha}}\,x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}. \tag{7.4}$$

Daraus folgt das Ergebnis: Wird

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{d_n(x)}{x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}}=M(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}\qquad\big(x\in J_1-0,\ M(0)=0\big) \tag{7.5}$$

und

$$M=\sup\{M(x)\,|\,x\in J_1\} \tag{7.6}$$

gesetzt, so gilt $M\leqq A$.

Es sei nun $M>0$. Dann folgt aus (4.2) mit Rücksicht auf die Lipschitz-Bedingung (7.2)

$$d_n(x)\leqq(1-\varepsilon)\,\frac{k}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1}t^{-\mu}\,d_{n-1}(t)\,dt.$$

Es sei nun $\eta > 0$. Dann gilt von einem n an

$$d_n(x) \leqq (1+\eta)\, M^{\frac{1}{1-\alpha}}\, x^{\frac{\mu}{1-\alpha}},$$

und somit wird für große n

$$d_n(x) \leqq (1-\varepsilon)(1+\eta)\,\frac{k M^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\Gamma(\mu)}\, x^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}}\, dt.$$

Wegen

$$\int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}}\, dt = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{1-\alpha}+1\right)}$$

muß

$$M(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_n(x)}{x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}} \leqq (1-\varepsilon)(1+\eta)\, M^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

gelten, und zwar für jedes $\eta > 0$. Läßt man $\eta \to 0$ konvergieren, so erhält man

$$M^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sup_{x\in J_1} M(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqq (1-\varepsilon)\, M^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

und diese Ungleichung ist offenbar falsch. Es muß also $M = 0$ sein und somit auch [mit Rücksicht darauf, daß für jedes n $d_n(0) = 0$ ist]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} d_n(x) = 0 \qquad (x \in J_1).$$

Hat man nun dieses Ergebnis, so führen die Überlegungen von 4. ohne weiteres zu der Bildung der Folge (y_{n_k}) $(k = 1, 2, \ldots)$, welche gleichmäßig zu der (stetigen) Lösung $y(x)$ von (1.3) konvergiert. Da nun (1.2) nach den Entwicklungen von 6. höchstens einen Fixpunkt haben kann, so ist hiermit bewiesen worden, daß $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ gilt. Ist $\mu = 1$, so kann an Stelle des Rechtecks (1.1) das Rechteck (4.8) genommen werden. Die Rechnungen für Differentialgleichungssystem laufen analog.

Die Grenzen des Einzigkeitssatzes 4 sowie der Konvergenzmöglichkeit der Iterationsfolge (y_n) werden durch den Faktor (6.10) genau erfaßt, ähnlich wie im (klassischen) Fall $\mu = 1$. Man zeigt in der Tat, daß für die Funktion

$$f_0(x,y) = \begin{cases} k^{1-\mu}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}} & \Big| \; y > \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \\ \frac{k}{x^\mu}\, y & \Big| \; 0 \leqq y \leqq \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \\ 0 & \Big| \; y < 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

für die (6.8) und (6.9) mit $\leqq$ statt $<$ gilt, die Gleichung

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f_0(t, y)\, dt \tag{7.9}$$

unendlich viele Fixpunkte, nämlich die Funktionen

$$y = C\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \qquad (0 < C \leqq 1) \tag{7.11}$$

hat. Analog zeigt man, daß die Gl. (7.9) mit

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,x^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}} & | -\infty < y < 0, \\ k\,x^{\frac{\mu\alpha}{1-\alpha}} - k\,\frac{y}{x^{\mu}} & | 0 \leqq y \leqq x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}, \\ 0 & | x^{\frac{\mu}{1-\alpha}} < y < +\infty, \end{cases}$$

wobei hier x im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ liegt und k wieder durch (6.10) gegeben ist, nicht für jede Anfangsfunktion $y_0(x)$ konvergente Folgen liefert. Das sieht man am einfachsten, wenn man $y_0(x) \equiv 0$ wählt und die Approximationsfunktionen y_n sukzessiv berechnet. Man findet dann leicht

$$y_1(x) = x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}, \quad y_2(x) = 0,$$

und somit allgemein

$$y_{2n-1}(x) = x^{\frac{\mu}{1-\alpha}}, \quad y_{2n}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die zuletzt angeführten Beispiele dafür, daß die Bedingungen (6.9) bzw. (7.2) das Äußerste in der Richtung Eindeutigkeit bzw. Konvergenz darstellen, gehen für $\mu = 1$ (also $k = 1/1-\alpha$) auf KRASNOSELSKII und KREIN und auf LUXENBURG zurück und sind nach dem Perronschen bzw. nach dem Havilandschen Muster gebildet. Der Leser kann selbst bestätigen, daß sowohl für $f_0(x,y)$, wie auch für die zuletzt gebildete Funktion $f(x,y)$ beide Lipschitz-Bedingungen erfüllt werden.

Berlin-Dahlem, Hüttenweg 9–11

(Eingegangen am 25. April 1958)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 190–192 (1958)

Kritische Zahlen und bestimmt divergente transfinite Funktionen

Von
WALTER NEUMER

Von ALEXANDROFF und URYSOHN ([1], Anhang) wurde ein Satz über transfinite Ordnungszahlen bewiesen, der später von verschiedenen Mathematikern verallgemeinert wurde ([2] bis [6], [8], [9]). Die letzte und umfassendste Verallgemeinerung geschah durch G. FODOR [6] und lautet so:

Sei Λ eine Ordnungszahl zweiter Art, die nicht zu ω konfinal ist. M sei eine Teilmenge von $W(\Lambda)=\{\xi:\xi<\Lambda\}$ mit der Eigenschaft, daß $W(\Lambda)-M$ keine in $W(\Lambda)$ abgeschlossene und mit $W(\Lambda)$ konfinale Teilmenge enthält. In M sei eine transfinite Funktion $f(\alpha)$ mit $f(\alpha)<\alpha$ für $\alpha\in M$, $\alpha>0$ (und $f(0)=0$ für $0\in M$) definiert. Dann existiert eine Zahl $\pi<\Lambda$ und eine mit $W(\Lambda)$ konfinale Teilmenge $N\subseteq M$ derart, daß $f(\alpha)\leqq\pi$ für $\alpha\in N$ gilt.

G. FODOR hat einen direkten Beweis dieses Satzes gegeben, der eine Fallunterscheidung erfordert.

Man nennt transfinite Funktionen mit der Eigenschaft $f(\alpha)<\alpha$ *regressiv* [3] und Teilmengen M von $W(\Lambda)$ mit der im obigen Satz genannten Eigenschaft *stationär* [3]. Nennt man eine mit $W(\Lambda)$ konfinale und in $W(\Lambda)$ abgeschlossene Teilmenge von $W(\Lambda)$ ein *Band* aus $W(\Lambda)$ ([8] und [2]), so ist also eine stationäre Teilmenge eine solche, deren Komplement bezüglich $W(\Lambda)$ kein Band enthält.

Die regressiven Funktionen stehen im Zusammenhang mit den *bestimmt divergenten* transfiniten Funktionen [7]. Eine in einer mit $W(\Lambda)$ konfinalen Teilmenge $M\subseteq W(\Lambda)$ definierte Funktion $f(\xi)$ mit Werten $\in W(\Lambda)$ heißt *bestimmt divergent*, wenn es zu jedem $\beta<\Lambda$ ein $\alpha\in M$ gibt, so daß $f(\xi)>\beta$ für $\xi\geqq\alpha$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit folgender Eigenschaft von f: Ist $N\subseteq M$ und N mit $W(\Lambda)$ konfinal, so ist $f(\xi)$ in N nicht beschränkt, d.h. es gibt kein $\pi\in W(\Lambda)$ mit $f(\xi)\leqq\pi$ für alle $\xi\in N$.

Offenbar ist die Bildmenge $f(M)$ einer bestimmt divergenten Funktion f mit $W(\Lambda)$ konfinal. Man sieht unmittelbar, daß der Satz von G. FODOR mit dem folgenden gleichwertig ist:

SATZ 1. *Sei M eine stationäre Teilmenge von $W(\Lambda)$ und sei in M eine bestimmt divergente transfinite Funktion $f(\xi)$ definiert. Dann gibt es Werte $\alpha\in M$ mit $\alpha\leqq f(\alpha)$, und deren Menge ist zu $W(\Lambda)$ konfinal.*

Dieser Satz wurde in [8] (etwas anders formuliert) für ein reguläres Λ ($>\omega$) bewiesen, und zwar unter Verwendung der *kritischen Zahlen* einer gewissen

Normalfunktion. Nachstehend soll gezeigt werden, daß auch der obige allgemeinere Satz 1 auf ähnliche Art bewiesen werden kann, und zwar mittels des folgenden Hilfssatzes:

LEMMA. *Sei Λ eine nicht mit ω konfinale Limeszahl und M ein Band von $W(\Lambda)$. In M sei eine bestimmt divergente halbnormale Funktion $f(\xi)$ mit Werten aus $W(\Lambda)$ definiert. Dann gibt es ein Band $K \subseteq M$, so daß $\varkappa = f(\varkappa)$ für $\varkappa \in K$ gilt.* (Das heißt die halbnormale Funktion f besitzt kritische Zahlen, deren Menge ein Band ist.)

Eine in M definierte transfinite Funktion $f(\xi) < \Lambda$ heißt dabei *halbnormal* [2], wenn $f(\alpha) \leqq f(\beta)$ für $\alpha < \beta$, $\alpha \in M \ni \beta$, gilt und wenn $f(\xi)$ stetig ist, d. h. wenn $f(\xi) \to f(\lambda)$ für $\xi \to \lambda$, $\xi \in M \ni \lambda$, λ Limeszahl, zutrifft. Dann ist die Bildmenge $f(M)$ in $W(\mu) = \{\xi : \xi < \mu\}$, $\mu = \sup f(M)$, abgeschlossen. (Umgekehrt folgt aus dieser Abgeschlossenheit in $W(\mu)$ und der Monotonie $f(\alpha) \leqq f(\beta)$ *nicht* die Stetigkeit von f!)

BEWEIS DES LEMMAS. Sei $\alpha_1 \in M$ und $\beta_1 = f(\alpha_1)$. Es gibt ein kleinstes $\alpha_2 \in M$ mit $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > \beta_1$ und $f(\alpha_2) = \beta_2 > \beta_1$, $\beta_2 > \alpha_1$. Ebenso gibt es ein kleinstes $\alpha_3 \in M$ mit $\alpha_3 > \alpha_2$, $\alpha_3 > \beta_2$ und $f(\alpha_3) = \beta_3 > \beta_2$, $\beta_3 > \alpha_2$. So fortfahrend erhält man zwei Folgen $\alpha_n \in M$, $\beta_n \in f(M)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit

$$\beta_n = f(\alpha_n), \quad \alpha_n < \alpha_{n+1}, \beta_n < \alpha_{n+1},$$
$$\alpha_n < \beta_{n+1}, \quad \beta_n < \beta_{n+1}.$$

Es ist daher $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \varkappa < \Lambda$ (da Λ nicht mit ω konfinal). Wegen der Abgeschlossenheit von M und $f(M)$ in $W(\Lambda)$ ist $\varkappa \in M \cap f(M)$. Daraus folgt sofort $\varkappa = f(\varkappa)$. — Somit gibt es oberhalb jedes $\alpha \in M$ noch kritische Zahlen $\varkappa = f(\varkappa)$. Deren Menge K ist also mit $W(\Lambda)$ konfinal; sie ist ferner in $W(\Lambda)$ abgeschlossen. — Natürlich ist $K \subseteq M \cap f(M)$.

BEWEIS DES SATZES 1. Auf Grund der bestimmten Divergenz von f gibt es zu jedem $\alpha \in M$ ein kleinstes $\varphi(\alpha) \in M$ mit $\varphi(\alpha) > \alpha$, so daß $f(\xi) > f(\alpha)$, $f(\xi) > \alpha$ für $\xi \geqq \varphi(\alpha)$ gilt. Durch transfinite Induktion bestimmen wir, beginnend mit irgendeinem $\alpha = \alpha_0 \in M$, eine mit $W(\Lambda)$ konfinale Fundamentalfolge $\alpha_\eta \in M$ wie folgt. Wenn alle $\alpha_\eta \in M$ mit $\eta < \tau$ gefunden sind, so sei, falls $\tau - 1$ existiert, $\alpha_\tau = \varphi(\alpha_{\tau-1})$; ist aber τ eine Limeszahl λ und die Menge $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\lambda}$ nicht zu $W(\Lambda)$ konfinal, so sei α_λ die kleinste Zahl $\in M$ mit $\alpha_\lambda > \alpha_\eta$ für $\eta < \lambda$. (Wenn $\tilde{\alpha}_\lambda = \lim_{\eta<\lambda} \alpha_\eta \in M$ liegt, so hat man also $\alpha_\lambda = \tilde{\alpha}_\lambda$ zu setzen.) Durch diesen Prozeß ergibt sich eine Fundamentalfolge $A = \{\alpha_\eta\}_{\eta<\sigma} \subseteq M$, die mit M, also auch mit $W(\Lambda)$, konfinal ist; σ ist eine Limeszahl. Die Menge B der Funktionswerte $\beta_\eta = f(\alpha_\eta)$ bildet ebenfalls eine — mit $W(\Lambda)$ konfinale — Fundamentalfolge, wovon man sich leicht überzeugt.

Wir ergänzen A zu einem Band $\tilde{A}$ [aus $W(\Lambda)$], indem wir alle eventuell fehlenden Limites $\tilde{\alpha}_\lambda = \lim_{\eta<\lambda} \alpha_\eta$ $(\lambda < \sigma$, λ Limeszahl) hinzunehmen. Dabei ist $\tilde{\alpha}_\lambda \leqq \alpha_\lambda$. Auf $\tilde{A}$ erklären wir die Funktion $\tilde{f}(\xi)$ wie folgt. Sei $\tilde{f}(\alpha_n) = f(\alpha_n)$ für $n < \omega$. Für eine Limeszahl $\lambda < \sigma$ sei $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_\lambda) = \lim_{\eta<\lambda} f(\alpha_\eta)$. Dann ist stets

$\bar{f}(\tilde{\alpha}_\lambda) \leqq f(\alpha_\lambda)$. Wenn $\alpha_\lambda = \tilde{\alpha}_\lambda$ ist (also im Fall $\tilde{\alpha}_\lambda \in M$), sei $\bar{f}(\alpha_{\lambda+n}) = f(\alpha_{\lambda+n-1})$ für $1 \leqq n < \omega$. Ist aber $\alpha_\lambda > \tilde{\alpha}_\lambda$ (d. h. $\tilde{\alpha}_\lambda \notin M$), so sei $\bar{f}(\alpha_{\lambda+n}) = f(\alpha_{\lambda+n})$ für $0 \leqq n < \omega$. Man hat dann stets $\bar{f}(\tilde{\alpha}_\lambda) \leqq \bar{f}(\alpha_\lambda)$, $\bar{f}(\alpha_\eta) \leqq f(\alpha_\eta) \leqq \bar{f}(\alpha_{\eta+1})$ für $\lambda < \sigma$, $\eta < \sigma$ und somit $\bar{f}(\tilde{\alpha}_\lambda) = \lim\limits_{\eta<\lambda} \bar{f}(\alpha_\eta)$. Demnach ist $\bar{f}(\xi)$ eine bestimmt divergente halbnormale Funktion für $\xi \in \tilde{A}$. Insbesondere gilt $\bar{f}(\xi) \leqq f(\xi)$ für $\xi \in A$. Ferner wird $\tilde{A} \cap M = A$. — Sei nun K die Menge der kritischen Zahlen von $\bar{f}(\xi)$ ($\xi \in \tilde{A}$). Nach dem Lemma ist K ein Band aus $W(\Lambda)$. Da M stationär ist, muß die Menge

$$K \cap M = K \cap (\tilde{A} \cap M) = K \cap A$$

mit $W(\Lambda)$ konfinal sein. Sei $\varkappa \in K \cap A$. Dann ist $\bar{f}(\varkappa) = \varkappa$, mithin $f(\varkappa) \geqq \varkappa$. — Die Menge aller $\alpha \in M$ mit $f(\alpha) \geqq \alpha$ ist natürlich erst recht zu $W(\Lambda)$ konfinal.

Wir haben aber noch etwas mehr bewiesen. Es ergibt sich nämlich sofort, daß die zuletzt genannte Menge $K \cap A$ *stationär* ist. Enthielte nämlich $W(\Lambda) - (K \cap A)$ ein Band H, so wäre auch $H \cap K$ ein Band ([2], § 7, Satz 2). Weil M stationär ist, müßte dann $(H \cap K) \cap M = H \cap (K \cap A)$ mit $W(\Lambda)$ konfinal sein, im Widerspruch zur Tatsache, daß H mit $K \cap A$ einen leeren Durchschnitt bildet. — Demnach läßt sich Satz 1 verschärfen zu dem

SATZ 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist die Menge der α mit $f(\alpha) \geqq \alpha$ sogar stationär.*

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P. S., u. URYSOHN, P.: Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Nederl. Akad. Wetensch., Sect. I **14**, Nr. 1, 1–96 (1929). — [2] BACHMANN, H.: Transfinite Zahlen. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, H. 1. Berlin-Heidelberg-Göttingen 1955. — [3] BLOCH, G.: Sur les ensembles stationnaires des nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions régressives. C. r. Acad. Sci. Paris **236**, 265–268 (1953). — [4] DUSHNIK, B.: A note on transfinite ordinals. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 860–862 (1931). — [5] ERDÖS, P.: Some remarks on set theory. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 127–141 (1950). — [6] FODOR, G.: Generalisation of a theorem of Alexandroff and Urysohn. Acta Sci. math. **16**, 204–206 (1955). — [7] KALUZA jr., TH.: Zu einer Wachstumsfrage bei Zuordnungen zwischen Ordnungszahlen. Math. Ann. **122**, 323–325 (1950). — [8] NEUMER, W.: Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn. Math. Z. **54**, 254–261 (1951). — [9] NOVÁK, J.: A paradoxical theorem. Fund. Math. **37**, 77–83 (1950).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 17. März 1958)

VOGEL, W. O.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 193–212 (1958)

Regelflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Von
WALTER O. VOGEL

Einleitung

Den Gegenstand der Liniengeometrie des euklidischen Raumes R_n bilden bekanntlich die Mannigfaltigkeiten von geraden Linien der R_n. In Verallgemeinerung des Begriffes Liniengeometrie wollen wir jene Geometrie, deren Elemente die *geodätischen Linien* einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit* V_n sind, als *Liniengeometrie der* V_n bezeichnen. Gegenstand dieser Liniengeometrie sind z.B. die *geodätischen Kongruenzen der* V_n[1]).

In der vorliegenden Arbeit sollen die *einparametrigen* Mannigfaltigkeiten von Geodätischen einer V_n bzw. die von diesen gebildeten Flächen, die sog. *Regelflächen der* V_n, untersucht werden[2]). Als *Erzeugende* der Regelfläche bezeichnen wir dabei die auf der Regelfläche gelegenen Geodätischen der einparametrigen Mannigfaltigkeit. Im Mittelpunkt unserer Betrachtung stehen die *Kehllinien* der Regelflächen der V_n, insbesondere die Übertragung einiger *Kehlliniensätze* von Regelflächen der R_3 auf Regelflächen der V_n, sowie die Herleitung der *Ableitungsgleichungen* für Regelflächen der V_n. Ich habe mich damit begnügt, von den erweiterungsfähigen Sätzen die nach BONNET[3]), BELTRAMI[4]), PIRONDINI[5]) und DARBOUX[6]) benannten „klassischen" Sätze herauszugreifen und ihre Verallgemeinerung anzugeben. Es sind dies die Sätze:

1. *Besitzt eine Kurve auf einer (windschiefen) Regelfläche zwei der folgenden drei Eigenschaften* a) *geodätische Linie*, b) *Isogonaltrajektorie der Erzeugenden*, c) *Striktionslinie zu sein, so besitzt sie auch die dritte Eigenschaft.*

2. *Die Striktionslinie einer Regelfläche ist der Ort jener Punkte, in denen die geodätische Krümmung einer Isogonalschar (mit beliebigem aber konstantem Winkel* $\neq 0$*) zur Schar der Erzeugenden verschwindet.*

3. *Dreht man jede Erzeugende einer Regelfläche in ihrer Zentralebene um einen beliebigen festen Winkel, so bilden die neuen Lagen die Erzeugenden einer*

[1]) Siehe etwa T. LEVI-CIVITA: Der absolute Differentialkalkül (1928) Kap. 7 und J. A. SCHOUTEN: Ricci-Calculus (1954) V. § 5.

[2]) Über die Grundgedanken dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Dresden 1957 berichtet.

[3]) BONNET, O.: J. éc. pol. 32e cah., 70 (1848).

[4]) BELTRAMI, E.: Giorn. di mat. **3**, 231 (1865).

[5]) PIRONDINI, G.: Giorn. di mat. **23**, 296 (1885).

[6]) DARBOUX, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV. S. 343–345. Paris 1894.

Regelfläche, die die ursprüngliche längs der Striktionslinie berührt und diese Kurve gleichfalls zur Striktionslinie hat.

4. *Die Striktionslinie einer Regelfläche ist dadurch charakterisiert, daß die Erzeugenden längs ihr parallel im Sinne von Levi-Civita sind.*

Im dritten Abschnitt dieser Arbeit wird der Nachweis erbracht, daß die genannten Sätze ihre Gültigkeit behalten, wenn man die Regelfläche der R_3 durch eine Regelfläche der V_n ersetzt, ferner die Erzeugenden der Regelfläche der R_3 durch die der Regelfläche der V_n, die Striktionslinie durch eine (noch näher zu erklärende) Kehllinie, usw. Die Sätze sind daher bezüglich ihres Gültigkeitsbereiches keine *euklidischen* oder *nichteuklidischen*[7]), sondern *Riemannsche* Aussagen.

In ähnlicher Weise wie hier die Theorie der Regelflächen der V_n läßt sich übrigens auch die Theorie der Regelflächen des *isotropen Raumes* J_3, d. h. eines (dreidimensionalen) Raumes[8]), dessen Bogenelementquadrat durch eine quadratische Form des Ranges *zwei* definiert ist, entwickeln. Im Gegensatz zur V_n verlieren allerdings die Kehlliniensätze von BONNET, BELTRAMI, PIRONDINI und DARBOUX in der oben angegebenen Form ihre Gültigkeit für den J_3. An deren Stelle treten andere Sätze wie z. B. der folgende: *Die Kehllinie einer Regelfläche des J_3 ist jene Flächenkurve, längs welcher die Tangentenebenen der Fläche isotrope Ebenen sind.* Ich werde in einer späteren Mitteilung ausführlicher über diesen Gegenstand berichten.

Nach einer kurzen Einführung in die metrischen und jene Krümmungsverhältnisse der Riemannschen Mannigfaltigkeit, die sich auf den 1. Fundamentaltensor der V_n stützen, beschäftigt sich der erste Abschnitt unserer Untersuchungen mit der analytischen Darstellung der Regelflächen der V_n und ihrer Kehllinien. Im zweiten Abschnitt werden die metrischen und Krümmungsverhältnisse der von der Regelfläche „aufgespannten" V_2, die sich auf den 1. Fundamentaltensor der V_2 in V_n stützen, erörtert. Da die Geodätischen der V_n auch Geodätische der V_2 sind, kann jede Regelfläche der V_n (trivialerweise) als Regelfläche der zugehörigen V_2 aufgefaßt werden. Es ergeben sich weitere für später nützliche Formeln für die Regelfläche und ihre Kehllinien.

Der dritte Abschnitt ist der Kehllinie der Regelfläche gewidmet, wobei 3 Haupttypen von Kehllinien herausgestellt werden: 1) die punktförmige (ausgeartete) Kehllinie, 2) die Enveloppe der Erzeugenden als Kehllinie (die keine Geodätische der V_n ist) und 3) die (allgemeine) Kehllinie, deren Tangente nicht mit der Richtung der Erzeugenden übereinstimmt. Die Verallgemeinerungen der Sätze von BONNET, BELTRAMI, PIRONDINI und DARBOUX gelten

---

[7]) Zur Verallgemeinerung der Sätze für den elliptischen Raum s. H. R. MÜLLER: Über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen im elliptischen Raum. Mh. Math. Phys. **52**, 138–161 (1948).

[8]) Zur Geometrie des isotropen J_3 vgl. K. STRUBECKER, z. B. a) Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. J. f. reine u. angew. Math. **178**, 135–179 (1938). b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 236 bis 257 (1938). c) Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie. Math. Z. **48**, 369–427 (1942).

für Regelflächen mit Kehllinien, die nicht vom Typus I oder II sind. Im vierten Abschnitt werden die Ableitungsgleichungen für jene Regelflächen aufgestellt, welche Kehllinien von einem der drei Haupttypen besitzen. Der fünfte Abschnitt bringt zwei Beispiele, nämlich $V_n = R_3$ (einparametrige Scharen von Geraden der R_3: Strahlbüschel, Torse, windschiefe Regelfläche) und $V_n = V_2$ in R_3 (einparametrige Scharen von Geodätischen einer Fläche in R_3).

§ 1. Die analytische Darstellung der Regelflächen der V_n und ihrer Kehllinien

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n, die wir der Liniengeometrie zugrunde legen, sei von der Dimension n. ξ^α; $\alpha = 1, \ldots, n$ seien die Koordinaten der V_n. Das *Bogenelementquadrat* habe die Gestalt[9])

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \tag{1}$$

wobei $g_{\alpha\beta}$ die *Koordinaten des ersten Fundamentaltensors* der V_n bedeuten. Für ein in der V_n gelegenes Vektorfeld p^α kann in bekannter Weise der *kovariante Differentialquotient* nach ξ^α gebildet werden:

$$\nabla_\beta p^\alpha = \partial_\beta p^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\gamma, \tag{2}$$

wo

$$\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}$$

und $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffel-Symbole der V_n bedeuten, ebenso die kovariante Richtungsableitung[10]):

$$\delta_v p^\alpha = \nabla_\beta p^\alpha\, d_v \xi^\beta \tag{3}$$

in Richtung $d_v \xi^\alpha = \frac{d}{dv}\xi^\alpha$, falls $\xi^\alpha = \xi^\alpha(v)$. Für den Krümmungstensor der V gelten, was der Vollständigkeit wegen noch notiert sei, die Formeln[11])

$$\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} p^\gamma = \tfrac{1}{2} K_{\alpha\beta\cdot\cdot\varepsilon}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} p^\varepsilon \tag{4}$$

und

$$K_{\alpha\beta\cdot\cdot\varepsilon}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = 2\,\partial_{[\alpha}\Gamma^\gamma_{\beta]\varepsilon} + 2\,\Gamma^\gamma_{[\alpha|\delta|}\Gamma^\delta_{\beta]\varepsilon}. \tag{5}$$

Die eindimensionale Linienmannigfaltigkeit, welche die *Regelfläche* der V_n darstellen soll, schreiben wir in der Form

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(u, v). \tag{6}$$

---

[9]) Über griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wird, wenn nichts anderes gesagt ist, von 1 bis n summiert. Die Angabe $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n$ wird daher hier und im folgenden zumeist weggelassen.

[10]) Von den im folgenden auftretenden Funktionen eines oder mehrerer Parameter werde stets vorausgesetzt, daß sie bis zu der jeweils benötigten Ordnung stetig differenzierbar seien.

[11]) Die hier verwendete Schreibweise ist der J. A. SCHOUTENS in [1]) angelehnt. Man vgl. daher wegen dieser und ähnlicher Formeln J. A. SCHOUTEN[1]) III. §§ 3, 4.

Das Bogenelementquadrat der Fläche $\xi^\alpha(u, v)$ in V_n laute

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{7}$$

Nennt man i^α, j^α die Tangentenvektoren an die u- bzw. v-Linien, d.h.

$$i^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u}, \quad j^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v}, \tag{8}$$

so nehmen die Größen E, F, G in (7) wegen (1) die Bedeutungen

$$E = g_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta, \quad F = g_{\alpha\beta} i^\alpha j^\beta, \quad G = g_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta \tag{9}$$

an. In der Darstellung (6) der Regelfläche mögen die u-Linien $v = \text{const}$ die *Erzeugenden*, also *geodätische Linien* der V_n, sein; v sei der Scharparameter, etwa die Bogenlänge längs der (willkürlichen) *Leitkurve* $u = 0$. Wählt man noch u als Bogenlänge der Geodätischen $v = \text{const}$, so gelten die Identitäten:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_u i^\alpha = i^\beta V_\beta i^\alpha \equiv 0 \quad \{u, v\} \qquad (10)\\ E = g_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta \equiv 1 \quad \{u, v\} \qquad (11) \end{aligned}}.$$

Die Punkte, in denen die Linien der Schar $v = \text{const}$ am (relativ) *dichtesten* liegen, heißen *Kehlpunkte*. Ist P ein Punkt der Linie $v = \text{const}$, so findet man für das Quadrat des Bogenelementes PQ, wenn Q der dem Punkte P am nächsten gelegene Punkt auf der *Nachbarerzeugenden* $v + dv = \text{const}$ ist, den Ausdruck

$$ds^2 = \left(G - \frac{F^2}{E}\right) dv^2, \tag{12}$$

oder mit

$$S = \frac{ds}{dv},$$

$$S^2 = G - \frac{F^2}{E}. \tag{13}$$

Für die Kehlpunkte der Erzeugenden $v = \text{const}$ gilt

$$\frac{\partial (S^2)}{\partial u} = 0. \tag{14}$$

Wegen (13) bedeutet dies[12])

$$E^2 G_u - 2EF F_u + F^2 E_u = 0. \tag{15}$$

Da nach (10) und (11) die Ableitungen E_u und F_u verschwinden, reduziert sich (15) auf

$$\boxed{G_u = 2 g_{\alpha\beta} j^\alpha \delta_v i^\beta = 0}. \tag{16}$$

$G_u = 0$ liefert zunächst jene Punkte, in denen die Erzeugenden einen (relativ) *extremen* Abstand haben. Ein *echter* Kehlpunkt, ein sog. *Einschnürungspunkt*[13]),

[12]) Wegen dieser Formel vgl. auch W. BLASCHKE: Einführung in die Differentialgeometrie, S. 59, Formel (8). 1950.

[13]) Gegensatz: *Stauungspunkt*, z.B. für $G_u = 0$, $G_{uu} < 0$. Siehe auch H. R. MÜLLER: Über Striktionslinien von Kurvenscharen. Mh. Math. Phys. 50, 101–110 (1941).

liegt vor, falls außer $G_u = 0$ noch z.B.

$$G_{uu} = 2g_{\alpha\beta}\delta_v i^\alpha \delta_r i^\beta + 2g_{\alpha\beta} j^\alpha \delta_u \delta_v i^\beta > 0 \tag{17}$$

ist, oder genauer: Ein Punkt auf der Erzeugenden $v = \text{const}$ ist dann und nur dann ein echter Kehlpunkt, falls in ihm die Größe G als Funktion von u ($v = \text{const}$) ein relatives Minimum aufweist.

Als *Kehllinien* einer Regelfläche bezeichnen wir alle Flächenkurven, die der Gleichung $G_u = 0$ (bei variablem v) genügen. Mit einer entsprechenden Zusatzbedingung, z.B. $G_{uu} > 0$, erhält man hieraus die *echten Kehllinien* der Fläche.

§ 2. Die zur Regelfläche gehörende V_2 in V_n

Ist die Regelfläche eine *reguläre* V_2, so kann man jeder der bisher abgeleiteten Formeln eine neue Gestalt geben, indem man statt der Koordinaten ξ^α der V_n *flächeninterne* Koordinaten x^a; $a = 1, 2$ der V_2 verwendet. Wir setzen x^a als *reguläre* Parameter voraus und geben der V_2 in V_n die Darstellung

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^a). \tag{1}$$

Eine *reguläre* V_2 liegt z.B. vor, falls die Vektoren i^α, j^α linear unabhängig (und keine Nullvektoren) sind[14]). Das *Bogenelementquadrat* der V_2 sei[15])

$$ds^2 = {}'g_{ab}\, dx^a\, dx^b. \tag{2}$$

${}'g_{ab}$ sind die *Koordinaten des 1. Fundamentaltensors der V_2 in V_n* und werden aus den $g_{\alpha\beta}$ der V_n mittels *Verbindungsgrößen* in bekannter Weise gewonnen[16]). Für ein in der V_2 gelegenes Vektorfeld p^a ist infolge der Einbettung der V_2 in die V_n der *kovariante Differentialquotient* nach x^a erklärt:

$${}'V_b p^a = \partial_b p^a + {}'\Gamma^a_{bc} p^c, \tag{3}$$

wobei

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a},$$

sowie die *kovariante Richtungsableitung*

$${}'\delta_v p^a = {}'V_b p^a\, d_v x^b \tag{4}$$

in Richtung $d_v x^a = \dfrac{d}{dv} x^a$, falls $x^a = x^a(v)$.

Für die auf der V_2 gelegene Linienmannigfaltigkeit schreiben wir

$$x^a = x^a(u, v). \tag{5}$$

Die hier auftretende Funktionaldeterminante darf von Null verschieden vorausgesetzt werden, falls die Vektoren i^α, j^α linear unabhängig sind. Für die

[14]) Es könnte dann z.B. $x^1 = u$, $x^2 = v$ gesetzt werden.

[15]) Über lateinische Indizes $a, b, c, \ldots$ wird, falls nichts anderes gesagt ist, von *1* bis *2* summiert.

[16]) Siehe etwa J. A. Schouten[1]) V. § 9. Vgl. auch J. A. Schouten-D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. 2. III. § 10. 1938.

Tangentenvektoren an die u- bzw. v-Linien setzen wir

$$i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u}, \quad j^a = \frac{\partial x^a}{\partial v}. \tag{6}$$

Die Identitäten (1.10) und (1.11) lauten dann bei Verwendung *flächeninterner* Koordinaten

$$\boxed{\begin{aligned} {}'\delta_u i^a = i^b\, {}'\nabla_b i^a \equiv 0 \quad \{u, v\} \\ E = {}'g_{ab} i^a i^b \equiv 1 \quad \{u, v\} \end{aligned}} \tag{7}$$

(8)

Die Identitäten (7) besagen, daß die u-Linien geodätische Linien der V_2 sind (sie sind Geodätische der V_n, daher auch Geodätische der V_2 *in* V_n), die Identität (8) besagt, daß u die Bogenlänge der Geodätischen ist. Die Gl. (1.16) der Kehllinie lautet in Größen der V_2

$$\boxed{G_u = 2\, {}'g_{ab} j^a\, {}'\delta_v i^b = 0}. \tag{9}$$

Mit den Koordinaten ${}'K_{abcd}$ des *Krümmungstensors der* V_2 *in* V_n[17]) kann man ein *skalares Krümmungsmaß* $'K$ definieren:

$$'K = -\tfrac{1}{2}\, {}'K_{abcd}\, {}'g^{ad}\, {}'g^{bc}, \tag{10}$$

welches für $V_n = R_3$ bekanntlich die Bedeutung der Gaußschen Krümmung hat. Es gilt dann, falls $W^2 = EG - F^2 \neq 0$ ist,

$${}'g_{ab} j^a\, {}'\delta_u\, {}'\delta_v i^b = -\tfrac{1}{2}\, {}'K W^2, \tag{11}$$

wie man leicht nachweist, indem man sich des Koordinatensystems (u, v) bedient. Da

$$G_{uu} = 2\, {}'g_{ab}\, {}'\delta_v i^a\, {}'\delta_v i^b + 2\, {}'g_{ab} j^a\, {}'\delta_u\, {}'\delta_v i^b, \tag{12}$$

wie aus (9) folgt, erhält man für G_{uu} den Ausdruck

$$G_{uu} = 2\left|{}'\delta_v i^a\right|^2 - {}'K W^2, \tag{13}$$

der im nächsten Abschnitt bei der Diskussion der Kehllinien von Bedeutung sein wird.

§ 3. Die Kehllinien der Regelfläche

In einem Kehlpunkt P muß außer

$$G_u = 2 g_{\alpha\beta} j^\alpha \delta_v i^\beta = 0 \tag{1.16}$$

noch die aus $E \equiv 1$ folgende Beziehung

$$E_v = 2 g_{\alpha\beta} i^\alpha \delta_v i^\beta \equiv 0 \tag{1}$$

gelten. Wir betrachten zunächst nur solche Kehlpunkte, in denen $G_u = 0$, $G_{uu} > 0$ ist.

[17]) Siehe J. A. SCHOUTEN[1]) V. § 10, Formel (10.18).

Falls $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$, $j^\alpha \neq 0$, müssen, da die Regelfläche in P dann regulär ist, in diesem Punkt noch außerdem die Beziehungen

$$G_u = 2\,'g_{ab} j^a\,'\delta_v i^b = 0, \tag{2.9}$$

$$E_v = 2\,'g_{ab} i^a\,'\delta_v i^b \equiv 0 \tag{2}$$

erfüllt sein. Für G_{uu} gilt dann

$$G_{uu} = 2\,|\,'\delta_v i^a|^2 - {}'K W^2. \tag{2.13}$$

$G_u = 0$ ist z.B. für $j^\alpha = 0$ erfüllt, $G_{uu} > 0$ für $j^\alpha = 0$ und $\delta_v i^\alpha \neq 0$. Die Gleichungen $i^\alpha = \lambda j^\alpha$, $j^\alpha = 0$ können nicht zugleich bestehen, da $i^\alpha \neq 0$ wegen $E \equiv 1$. Halten wir als Bedingungen I für den Kehlpunkt fest:

$$\boxed{\text{I:}\quad j^\alpha = 0, \quad i^\alpha \neq \lambda j^\alpha, \quad \delta_v i^\alpha \neq 0}. \tag{3}$$

$G_u = 0$ ist auch für $i^\alpha = \lambda j^\alpha$ erfüllt, $G_{uu} > 0$ für $i^\alpha = \lambda j^\alpha$ und $\delta_v i^\alpha \neq 0$. Als Bedingungen II notieren wir

$$\boxed{\text{II:}\quad j^\alpha \neq 0, \quad i^\alpha = \lambda j^\alpha, \quad \delta_v i^\alpha \neq 0}. \tag{4}$$

Ist $j^\alpha \neq 0$, $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$, also auch $j^a \neq 0$, $i^a \neq \lambda j^a$, so folgt aus (2.9) und (2): $'\delta_v i^a = 0$. Es ist $G_{uu} > 0$, falls $'\delta_v i^a = 0$, $'K < 0$ ($W^2 \neq 0$). Als Bedingungen III für einen Kehlpunkt schreiben wir

$$\boxed{\text{III:}\quad j^\alpha \neq 0, \quad i^\alpha \neq \lambda j^\alpha, \quad {}'\delta_v i^a = 0, \quad {}'K < 0}. \tag{5}$$

Da $G_{uu} \neq 0$ in P, gibt es stets eine gewisse Kehllinie $u = u(v)$ durch diesen Punkt. Gelten in P die Beziehungen $j^\alpha \neq 0$, $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$, so gelten sie auch in dem zu P benachbarten auf der Kehllinie gelegenen Punkt Q. Das heißt, sind in P die Bedingungen III erfüllt, so auch in Q. Wir bezeichnen *als* **Fall III** *der Kehllinie jenen, bei dem die Bedingungen* III *längs einer auf der Regelfläche gelegenen Kurve* $u = u(v)$ *erfüllt sind.*

Gelten in $P(u_0, v_0)$ und nur in diesem Punkt die Bedingungen I, so ist dieser, da in einem gewissen Bereich um P $G_{uu} > 0$ und $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$ angenommen werden darf, auf einer Kehllinie vom Typus III gelegen. Und dasselbe gilt, falls in P und nur in diesem Punkt die Bedingungen II erfüllt sind.

Als **Fall I** bzw. II der Kehllinie bezeichnen wir jenen, bei dem die Bedingungen I bzw. II längs einer auf der Regelfläche gelegenen Kurve $u = u(v)$, welche auch in einen Punkt ausgeartet sein kann, erfüllt sind. Dagegen sagen wir, es liege eine Kehllinie vom Typus I bzw. II vor, falls die Bedingungen I bzw. II längs $u(v)$ für „fast alle" v (in einem gewissen Intervall) gelten.

Um die Kehllinie des Falles I zu bestimmen, setzt man, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist, $u(v) = 0$, so daß $j^\alpha \equiv 0\,\{v\}$, $u = 0$, und entwickelt $\xi^\alpha(u, v)$ an der Stelle $u_0 = 0$, v_0 nach v. Man findet so

$$\xi^\alpha(0, v) = \xi^\alpha(0, v_0). \tag{6}$$

Im Falle I *ist die Kehllinie durch P in einen Punkt ausgeartet. Die Erzeugenden sind geodätische Linien der V_n, die durch einen festen Punkt gehen.*

Für die Kehllinien des Falles II gilt, wie man ebenso beweist, der Satz:

Im Falle II *besteht die Kehllinie durch P aus der Einhüllenden (Enveloppe) der geodätischen Linien. Sie ist selbst keine Geodätische der V_n.*

Sind im Punkte P die Bedingungen $j^\alpha \neq 0$, $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$, $'\delta_v i^\alpha = 0$, $'K \neq 0$ erfüllt, so ist die Kehllinie in einer gewissen Umgebung von P eine *Einschnürungslinie* (echte Kehllinie des Falles III) oder eine *Stauungslinie*, je nachdem in P $'K < 0$ oder $'K > 0$ ist.

Für die (nicht in eine Kurve ausgearteten) Regelflächen der V_n gelten als Verallgemeinerungen der in der Einleitung zitierten Sätze 4 und 2:

Satz 1. *Eine nicht zum Typus* I *oder* II *zählende Kehllinie einer Regelfläche der V_n ist dadurch charakterisiert, daß die Tangenten an die Erzeugenden längs der Kehllinie V_2-parallel im Sinne von Levi-Civita sind.*

Satz 2. *Eine nicht zum Typus* I *oder* II *zählende Kehllinie einer Regelfläche der V_n ist der Ort jener Punkte, in denen die geodätische Krümmung einer Isogonalschar (mit beliebigem aber konstantem Winkel $\neq 0$) zur Schar der Erzeugenden verschwindet.*

Ist die Regelfläche nicht in eine Kurve ausgeartet, so genügen ihre Kehllinien $u(v)$, die nicht vom Typus I oder II sind, (für fast alle v) den Bedingungen $j^\alpha \neq 0$, $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$, $'\delta_v i^\alpha = 0$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes 1. Zum Beweis des Satzes 2 wählen wir als Leitkurve der Regelfläche die Linie $u = 0$, welche nicht in einen Punkt oder in eine Enveloppe der Erzeugenden ausgeartet sein soll. Die Tangentenvektoren der Erzeugenden nennen wir i^a, die Tangentenvektoren an die Kurven der Isogonalschar t^a. u ist die Bogenlänge längs den Erzeugenden $v = \text{const}$, v sei die Bogenlänge längs $u = 0$ und w die Bogenlänge längs den Kurven der Isogonalschar. Die Vektoren i^a, t^a, j^a sind Einheitsvektoren. Für den Winkel α zwischen den Erzeugenden und den Kurven der Isogonalschar gilt

$$\cos\alpha = {}'g_{ab}\, i^a t^b \equiv \text{const}\,\{u, v\}. \tag{7}$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von $'\delta_u i^a \equiv 0$ und $i^a \neq \pm t^a$

$$'\delta_u t^a \equiv 0 \tag{8}$$

und

$$'\delta_v i^a = 0 \rightleftarrows {}'\delta_v t^a = 0. \tag{9}$$

Längs der Linie $u = 0$ kann man t^a zerlegen gemäß

$$t^a = \lambda i^a + \mu j^a, \tag{10}$$

ebenso die Richtungsableitung $'\delta_w t^a$ in der Form

$$'\delta_w t^a = \lambda\, {}'\delta_u t^a + \mu\, {}'\delta_v t^a, \tag{11}$$

wie leicht einzusehen ist. Aus (8), (9) und (11) folgt ($\mu \neq 0$)

$$'\delta_w t^a = 0 \rightleftarrows {}'\delta_v i^a = 0. \tag{12}$$

Verschwindet die geodätische Krümmung der Kurven der Isogonalschar in den Punkten der Linie $u=0$ (d.h. ist ${}'\delta_w t^a=0$), so ist diese Linie (für welche nach Voraussetzung $j^a \neq 0, i^a \neq \lambda j^a$) eine Kehllinie der Regelfläche (d.h. ${}'\delta_v i^a=0$). Ist umgekehrt die Linie $u=0$ eine Kehllinie (${}'\delta_v i^a=0$), so verschwindet die geodätische Krümmung der Kurven der Isogonalschar in den Kehlpunkten (${}'\delta_w t^a=0$).

Der Satz von BONNET lautet in der für die Regelflächen der V_n gültigen verallgemeinerten Form:

Satz 3. *Besitzt eine Kurve auf einer Regelfläche der V_n zwei der folgenden drei Eigenschaften* a) *geodätische Linie der Regelfläche*, b) *Isogonaltrajektorie der Erzeugenden*, c) *Kehllinie, welche nicht dem Typus* I *oder* II *angehört, zu sein, so besitzt sie auch die dritte Eigenschaft.*

Beweis. Es ist $j^a \neq 0$, $i^a \neq \lambda j^a$ nach Voraussetzung. Dann gilt, wie man leicht zeigt, die Identität

$$F_v \equiv \tfrac{1}{2} G_u + {}'g_{ab} i^a {}'\delta_v j^b. \tag{13}$$

Ist v die Bogenlänge der Linie $u=0$, so ist überdies

$${}'g_{ab} j^a {}'\delta_v j^b \equiv 0\,\{v\}, \quad u=0. \tag{14}$$

Aus den Eigenschaften a) und b), d.h. ${}'\delta_v j^a=0$ und $F_v=0$, folgt die Eigenschaft c), nämlich $G_u=0$. Aus a) und c), d.h. ${}'\delta_v j^a=0$ und $G_u=0$, resultiert b), nämlich $F_v=0$. Schließlich folgt aus b) und c), nämlich $F_v=0$ und $G_u=0$ unter Verwendung von (14) die Eigenschaft a), d.h. ${}'\delta_v j^a=0$.

DARBOUX[18]) hat bekanntlich gezeigt, daß die Aussage des Bonnetschen Satzes auch noch richtig ist, wenn man an Stelle einer Regelfläche eine allgemeine Fläche der R_3 betrachtet und die Erzeugenden der Regelfläche durch eine einparametrige Schar von Geodätischen der Fläche ersetzt. Diese Darbouxsche Verallgemeinerung ist in unserem Satz 3 für $V_n = V_2$ in R_3 enthalten. Den Bonnetschen Satz selbst erhält man aus Satz 3, wenn man $V_n = R_3$ wählt.

Der in der Einleitung zitierte Satz von PIRONDINI ist der folgenden Verallgemeinerung fähig:

Satz 4. *Dreht man auf einer Regelfläche der V_n in den Punkten einer nicht zum Typus* I *oder* II *zählenden Kehllinie die Tangenten an die Erzeugenden um einen beliebigen aber festen Winkel, so bilden die gedrehten Tangenten die Ausgangsrichtungen von Erzeugenden (Geodätischen der V_n) einer zweiten Regelfläche, die die erste Regelfläche längs ihrer Kehllinie berührt und diese Kurve gleichfalls zur Kehllinie hat.*

Beweis. $u=0$ sei die Kehllinie der ersten Regelfläche. Die Tangenteneinheitsvektoren der Erzeugenden der ersten Regelfläche längs $u=0$ nennen wir i^a, die gedrehten Vektoren, also die Tangenteneinheitsvektoren der Erzeugenden der zweiten Regelfläche längs $u=0$ nennen wir t^a. Daß sich beide Regelflächen längs der Kehllinie der ersten berühren, ist leicht einzusehen. Die Tangentenebenen der ersten Regelfläche längs $u=0$ werden von den

[18]) DARBOUX, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces. III. S. 311. Paris 1894.

Vektoren i^α, j^α, die der zweiten Regelfläche von den Vektoren t^α, j^α aufgespannt. Beide Ebenen stimmen, da t^α eine Linearkombination von i^α, j^α ist, überein.

Für den Winkel α zwischen den Tangentenvektoren i^α, t^α gilt

$$\cos\alpha = g_{\alpha\beta} i^\alpha t^\beta \equiv \text{const}\,\{v\}, \qquad u = 0, \tag{15}$$

für welche Beziehung man wegen der Berührung der Regelflächen längs $u = 0$ und wegen $j^\alpha \neq 0$, $i^\alpha \neq \lambda j^\alpha$ (Kehllinie nicht vom Typus I oder II) auch schreiben kann

$$'g_{ab} i^a t^b \equiv \text{const}\,\{v\}, \qquad u = 0. \tag{16}$$

Aus (16) und der Tatsache, daß $u = 0$ Kehllinie der ersten Regelfläche ist, folgt

$$'g_{ab} i^a {}'\delta_v t^b \equiv 0 \qquad \{v\}, \qquad u = 0. \tag{17}$$

Daneben gilt, da t^a Einheitsvektor ist,

$$'g_{ab} t^a {}'\delta_v t^b \equiv 0 \qquad \{v\}, \qquad u = 0. \tag{18}$$

(17) und (18) liefern, falls $t^a \neq \pm i^a$,

$$'\delta_v t^a \equiv 0 \qquad \{v\}, \qquad u = 0, \tag{19}$$

was besagt, daß die Linie $u = 0$ auch Kehllinie der zweiten Regelfläche ist.

Nach Satz 3 haben die Kehllinien, welche zugleich geodätische Linien der Regelfläche sind, die Eigenschaft, daß sie die Erzeugenden unter festem Winkel schneiden. Man könnte nun nach den Eigenschaften jener Kehllinien fragen, die zugleich *Asymptotenlinien* oder *Krümmungslinien* der Regelfläche sind. Überhaupt wäre es von Interesse zu erfahren, wie die Asymptotenlinien auf der Regelfläche verlaufen und ob entsprechende Sätze über Regelflächen der R_3 auch hier gelten. Ich möchte darüber nur die beiden Sätze beweisen:

Satz 5. *Eine erste Schar von Asymptotenlinien bilden die Erzeugenden der Regelfläche. Eine zweite Schar von Asymptotenrichtungen längs einer Kehllinie, die nicht vom Typus* I *oder* II *ist, ist dann und nur dann vorhanden, wenn längs der Kehllinie die Umgebung 2. Ordnung der Fläche für jeden Kehlpunkt in einer R_3 gelegen ist.*

Satz 6. *Die beiden nach Satz 5 möglichen Scharen von Asymptotenrichtungen längs einer Kehllinie, die nicht vom Typus* I *oder* II *ist, fallen dann und nur dann zusammen, wenn die Tangenten der Erzeugenden längs der Kehllinie (die dann zum Typus* III b *zählt) absolut-parallel (V_n-parallel) sind. Die zusammenfallenden Scharen von Asymptotenrichtungen sind mit der Schar der Tangenten an die Erzeugenden identisch.*

Beweis des Satzes 5. Die Tangenteneinheitsvektoren der Asymptotenlinien längs der Kehllinie $u = 0$ seien t^a. w sei die Bogenlänge längs den Asymptotenlinien. Die Schmiegebenen einer Asymptotenlinie werden von den Vektoren

t^α und $\delta_w t^\alpha$ aufgespannt und sind Tangentenebenen der Regelfläche. Ist

$$t^\alpha = \lambda i^\alpha + \mu j^\alpha, \tag{20}$$

so kann $\delta_w t^\alpha$ in der Form

$$\delta_w t^\alpha = \lambda \delta_u t^\alpha + \mu \delta_v t^\alpha \tag{21}$$

geschrieben werden. Unter Verwendung von (20) und (21) erhält man

$$2\lambda\mu \delta_v i^\alpha + \mu^2 \delta_v j^\alpha = A i^\alpha + B j^\alpha \tag{22}$$

als Bedingung für die Richtung $\lambda:\mu$ der Asymptotenlinie. Die Beziehung (22) gestattet dann und nur dann (neben $\mu = 0$) eine zweite Lösung, falls die Vektoren i^α, j^α, $\delta_v i^\alpha = \delta_u j^\alpha$, $\delta_v j^\alpha$, welche die Umgebung 2. Ordnung der Fläche bestimmen, in einer R_3 liegen. Liegen sie in einer R_4, so ist nur $\mu = 0$ möglich, in welchem Falle die Erzeugendenrichtung die einzige Asymptotenrichtung ist.

Um Satz 6 zu beweisen, überschieben wir (22) mit $g_{\alpha\beta} n^\alpha$, wo n^α der Einheitsvektor von $\delta_v i^\alpha$ ist, und erhalten

$$\mu(2\lambda g_{\alpha\beta} n^\alpha \delta_v i^\beta + \mu g_{\alpha\beta} n^\alpha \delta_v j^\beta) = 0. \tag{23}$$

Soll $\mu = 0$ doppeltzählende Lösung sein, so muß

$$\delta_v i^\alpha = 0 \tag{24}$$

gelten, was besagt, daß die Tangentenvektoren der Erzeugenden längs der Kehllinie absolut-parallel (V_n-parallel) sind.

Für die Regelfläche, die eine Kehllinie vom Typus II hat, besteht die eine Schar der Asymptotenlinien aus den Erzeugenden. Die (unter gewissen Bedingungen mögliche) zweite Schar von Asymptotenrichtungen längs der Kehllinie fällt, anders als in R_n, im allgemeinen *nicht* mit der ersten Schar zusammen, falls die V_n einen nicht verschwindenden Krümmungstensor hat.

Wir betrachten jetzt noch Kehlpunkte, in denen $G_u = 0$ *und* $G_{uu} = 0$ ist. In einem solchen Punkt gelten dann die Beziehungen

$$\textbf{IV:}\quad j^\alpha = 0, \quad i^\alpha \neq \lambda j^\alpha, \quad \delta_v i^\alpha = 0, \tag{25}$$

oder

$$\textbf{V:}\quad j^\alpha \neq 0, \quad i^\alpha = \lambda j^\alpha, \quad \delta_v i^\alpha = 0, \tag{26}$$

oder

$$\textbf{VI:}\quad j^\alpha \neq 0, \quad i^\alpha \neq \lambda j^\alpha, \quad {}'\delta_v i^\alpha = 0, \quad {}'K = 0. \tag{27}$$

P ist dann ein *singulärer* Punkt der Kehllinie. Das Verhalten der Kehllinie in P hängt davon ab, ob die Teilbedingungen von IV, V, VI nur im Punkte P oder längs einer Kurve durch P gültig sind. Wir diskutieren einige der möglichen Fälle:

a) Wir nehmen an, es seien die Bedingungen IV längs $u = u(v)$ erfüllt. Dann kann man zeigen, daß alle Erzeugenden miteinander identisch sind.

Die Regelfläche ist in eine Kurve ausgeartet; sie besteht nur aus einer einzigen Geodätischen.

b) Wir nehmen zweitens an, es seien die Bedingungen V längs $u = u(v)$ erfüllt. Man kann zeigen, daß in diesem Falle alle Erzeugenden durch Verschiebung einer einzigen Erzeugenden längs sich selbst entstehen. *Die Regelfläche ist wieder in eine Kurve ausgeartet.*

c) Es seien die Bedingungen I für $u = u(v)$ und IV für $u_0 = u(v_0)$ erfüllt. Es besteht dann die Schar der Erzeugenden für $v < v_0$ und $v > v_0$ aus je einem Strahlbüschel mit einer gemeinsamen Erzeugendenrichtung $i^\alpha(u_0, v_0)$, d. h. aus Stetigkeitsgründen aus einem einzigen Strahlbüschel mit einer wegen $\delta_v i^\alpha(u_0, v_0) = 0$ *stationären Erzeugenden.*

d) Es seien die Bedingungen II für $u = u(v)$ und V für $u_0 = u(v_0)$ erfüllt. Die Schar der Erzeugenden besteht dann für $v < v_0$ und $v > v_0$ aus den tangierenden Geodätischen je einer Hüllkurve mit einer gemeinsamen Erzeugendenrichtung $i^\alpha(u_0, v_0)$, d. h. aus Stetigkeitsgründen aus den tangierenden Geodätischen einer einzigen Kurve mit einer in $P(u_0, v_0)$ *stationären Erzeugendenrichtung.*

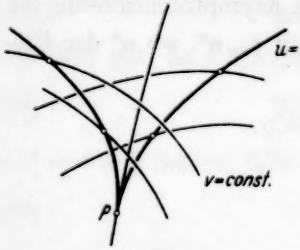

Fig. 1.

e) Wir nehmen an, es seien längs einer Kehllinie $u = u(v)$ die Bedingungen III erfüllt. In einem Punkt $P(u_0, v_0)$ dieser Kehllinie sollen die Beziehungen IV gelten. Da $G_u = G_{uu} = 0$, hat die Kehllinie im Punkte P im allgemeinen einen *Doppelpunkt*, unter den in e) angegebenen Bedingungen einen *Spitzenpunkt* (Fig. 1).

f) Wir nehmen an, es seien längs einer Kehllinie $u = u(v)$ die Bedingungen III erfüllt, während in einem Punkte $P(u_0, v_0)$ die Beziehungen V gelten. Wegen $G_u = G_{uu} = 0$ hat die Kehllinie in P im allgemeinen wieder einen *Doppelpunkt*, unter den in f) angegebenen Bedingungen einen Doppelpunkt mit *zusammenfallenden Doppelpunktstangenten* (Fig. 2).

g) Schließlich nehmen wir an, es seien längs $u(v)$ die Bedingungen III erfüllt, während in $P(u_0, v_0)$ die Beziehungen VI gelten. Dann ist P im allgemeinen ein *Doppelpunkt*, der unter den in g) angegebenen Bedingungen *zwei verschiedene Doppelpunktstangenten* hat (Fig. 3).

h) Wir wollen uns noch kurz mit dem Fall beschäftigen, daß

$$G_u \equiv 0 \{u, v\} \tag{28}$$

ist. Dabei soll

$$W^2 = EG - F^2 \neq 0 \tag{29}$$

vorausgesetzt werden. Weil nun $G_{uu} \equiv 0$, folgt aus (2.13) und (29)

$$'K \equiv 0 \{u, v\}. \tag{30}$$

Notwendige Bedingung dafür, daß jeder Punkt der Regelfläche ein Kehlpunkt ist, ist das Verschwinden des Krümmungsmaßes $'K$ der V_2 in V_n. Das

Bogenelementquadrat der V_2 kann auf die Form

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \tag{31}$$

gebracht werden, wenn man die u-Linien $v = \text{const}$ als die *Erzeugenden* der Regelfläche, die v-Linien $u = \text{const}$ als die *Orthogonaltrajektorien* der Erzeugenden und v als Bogenlänge dieser Trajektorien wählt. Da $G_u = 0$ zur Bestimmung einer Kehllinie nicht verwendet werden kann, wollen wir auf andere Weise geeignete Kurven als Kehllinien auszeichnen. Liegt P auf der Erzeugenden $v = \text{const}$ und ist Q der dem Punkt P am nächsten gelegene Punkt auf der *Nachbarerzeugenden* $v + dv = \text{const}$, so gilt für das Quadrat des Bogenelementes PQ gemäß (1.12)

$$ds^2 = dv^2. \tag{32}$$

Die Punkte P und Q liegen, wie ein Vergleich mit (31) zeigt, auf einer v-Linie. *Als*

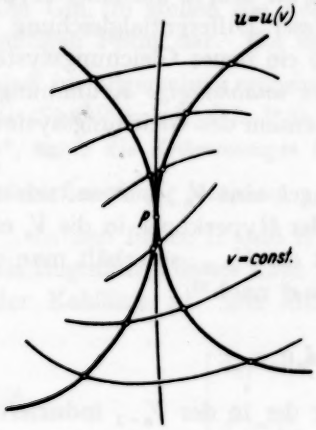

Fig. 2.

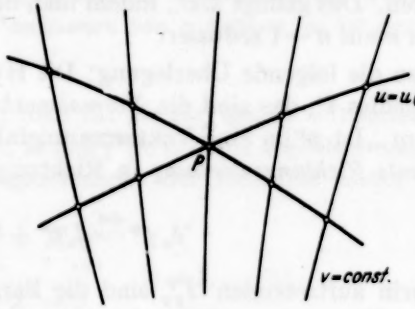

Fig. 3.

Kehllinien im Falle (28) *erklären wir die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden*. Diese Kehllinien sind im übrigen geodätische Linien der Regelfläche.

§ 4. Die Ableitungsgleichungen der Regelfläche

In diesem Abschnitt sollen die *Ableitungsgleichungen der Regelflächen* für die Fälle I, II, III aufgestellt werden.

Wenden wir uns zunächst dem Fall I zu, in dem die Erzeugenden durch einen festen Punkt P gehen. Die Endpunkte der Tangenteneinheitsvektoren an die von P ausgehenden Erzeugenden beschreiben eine *sphärische Kurve*, welche auf einer *Hyperkugel* der V_n liegt. Als Ableitungsgleichungen des Strahlbüschels verwenden wir die *Frenetschen Ableitungsgleichungen* dieser sphärischen Kurve. Tangentenvektoren an die Erzeugenden sind die Einheitsvektoren i^α; Tangentenvektoren an die sphärische Kurve sind, wenn man wie in 3. im Scheitel P $u = 0$ setzt, die Vektoren[19])

$$e^\alpha = e^\alpha(v) = d_v i^\alpha(0, v). \tag{1}$$

[19]) Wegen $i^\alpha = i^\alpha(v)$, $u = 0$ ist $\delta_v i^\alpha = d_v i^\alpha$

Den Parameter v wählen wir noch so, daß e^α ein *Einheitsvektor* wird, d.h. daß

$$g_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta = 1 \tag{2}$$

gilt. Die Frenetschen Ableitungsgleichungen der sphärischen Kurve können dann in der Gestalt[20]), [21])

$$\begin{cases} \delta_v \underset{\varepsilon}{e^\alpha} = -\underset{\varepsilon-1}{k^*}\,\underset{\varepsilon-1}{e^\alpha} + \underset{\varepsilon}{k^*}\,\underset{\varepsilon+1}{e^\alpha} & (\varepsilon = 1, \ldots, n) \\ \underset{1}{e^\alpha} = e^\alpha, \quad \underset{0}{k^*} = \underset{n}{k^*} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

geschrieben werden. Dabei ist zu bedenken, daß zwischen den $n-1$ Krümmungen k^* eine *Differentialgleichung* besteht, da die Kurve auf einer Hyperkugel gelegen ist. Um sich das Aufstellen dieser Differentialgleichung zu ersparen, wird man versuchen, an Stelle von (3) ein neues Gleichungssystem anzugeben, in dem nur $n-2$, aber voneinander *unabhängige* Krümmungen auftreten. Das gelingt z.B., indem man die Dimension des Gleichungssystems (3) von n auf $n-1$ reduziert.

Dazu die folgende Überlegung: Die Hyperkugel, eine V_{n-1}, ist mittels des Vektorfeldes i^α, das sind die *Normalenvektoren* der Hyperkugel, in die V_n eingespannt. Ist $p^\varphi(v)$ eine Vektormannigfaltigkeit der V_{n-1}, so erhält man die *kovariante Richtungsableitung* in Richtung $d_v i^\varphi = e^\varphi$ nach[22])

$$'\delta_v p^\varphi \overset{\text{def}}{=} d_v p^\varphi + {}'\Gamma^\varphi_{\chi\psi} p^\chi d_v i^\psi. \tag{4}$$

Die darin auftretenden ${}'\Gamma^\varphi_{\chi\psi}$ sind die Parameter der in der V_{n-1} induzierten *linearen Übertragung*. Diese ist bekanntlich eindeutig bestimmt durch die Übertragung in der V_n und die Einspannung. Es gilt[23])

$${}'\Gamma^\varphi_{\chi\psi} = B^\varphi_{\alpha\chi\psi} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - B^\alpha_\psi \partial_\chi B^\varphi_\alpha, \tag{5}$$

worin $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffel-Symbole in V_n und $B^\alpha_\psi, \ldots$ gewisse *Verbindungsgrößen* der V_{n-1} in V_n bedeuten, die durch die Einspannung gegeben sind. Die auf V_{n-1} gelegenen $(n-1)$-*Komponenten* e^φ des Vektors e^α in (4) ergeben sich aus

$$e^\varphi = B^\varphi_\alpha e^\alpha \qquad (\varphi = 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Die *erste* der Ableitungsgleichungen der sphärischen Kurve lautet jetzt

$$'\delta_v e^\varphi = \underset{1\,2}{k}\, e^\varphi. \tag{7}$$

---

[20]) Siehe etwa J. A. SCHOUTEN[1]) V. § 1. Formel (1.10) und J. A. SCHOUTEN-D. J. STRUIK[16]) I. § 2. Formel (2.15).

[21]) Die Einheitsvektoren $\underset{2}{e^\alpha}, \ldots, \underset{n}{e^\alpha}$ sind ebenso wie e^α nur noch Funktionen der Bogenlänge v der sphärischen Kurve. Dasselbe gilt für die später auftretenden Vektoren $\underset{\nu}{e^\varphi}$.

[22]) Griechische Indizes φ, χ, ψ laufen von 1 bis $n-1$.

[23]) Siehe etwa J. A. SCHOUTEN[1]) V. § 3 und J. A. SCHOUTEN-D. J. STRUIK[16]) II. §§ 7, 8, 9.

Um die Gl. (3) in dem erwähnten Sinne zu reduzieren, hat man, wie man sieht, nur den Vektor e^α durch seine auf V_{n-1} gelegenen $(n-1)$-Komponenten e^φ zu ersetzen und dann für e^φ das System von Ableitungsgleichungen[24]) anzuschreiben, wobei die auftretenden kovarianten Ableitungen in der V_{n-1} auszuführen sind[21]):

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\text{I:}\quad {}'\delta_v e^\varphi = -\underset{\nu-1}{k}\, e^\varphi_{\nu-1} + \underset{\nu}{k}\, e^\varphi_{\nu+1} \quad (v = 1, \ldots, n-1)}$$

$$e^\varphi_1 = e^\varphi, \qquad \underset{0}{k} = \underset{n-1}{k} = 0.$$

Die Gln. (8) stellen die *Ableitungsgleichungen des Strahlbüschels* in der endgültigen Form dar. Die in (8) auftretenden $n-2$ Krümmungen $\underset{1}{k}, \ldots, \underset{n-2}{k}$ sind im allgemeinen voneinander *unabhängig. Sind die Anfangsbedingungen des Strahlbüschels, d.h.* $\xi^\alpha(0, v_0)$, $i^\alpha(0, v_0)$ *und die Anfangslage des* $(n-1)$*-Beins* e^φ_ν*, sowie die Krümmungen* k *als Funktionen von* v *gegeben, so ist das Strahlbüschel eindeutig bestimmt.*

In den Fällen II und III kann man für die Kehllinie $u = 0$ setzen und v als Bogenlänge dieser Linie wählen, so daß $j^\alpha(0, v)$ der *Tangenteneinheitsvektor* der Kehllinie ist. Die Ableitungsgleichungen der Kehllinie lauten dann[25])

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \delta_v \underset{\varepsilon}{j}{}^\alpha = -\underset{\varepsilon-1}{\lambda^*}\, \underset{\varepsilon-1}{j}{}^\alpha + \underset{\varepsilon}{\lambda^*}\, \underset{\varepsilon+1}{j}{}^\alpha \\ \underset{1}{j}{}^\alpha = j^\alpha, \quad \underset{0}{\lambda^*} = \underset{n}{\lambda^*} = 0 \end{cases} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, n).$$

Da auch i^α ein Einheitsvektor ist, können die Ableitungsgleichungen des Vektors $i^\alpha(0, v)$, d.h. des Tangenteneinheitsvektors der Erzeugenden längs der Kehllinie, in der Form[25])

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \delta_v \underset{\varepsilon}{i}{}^\alpha = -\underset{\varepsilon-1}{\varkappa}\, \underset{\varepsilon-1}{i}{}^\alpha + \underset{\varepsilon}{\varkappa}\, \underset{\varepsilon+1}{i}{}^\alpha \\ \underset{1}{i}{}^\alpha = i^\alpha, \quad \underset{0}{\varkappa} = \underset{n}{\varkappa} = 0 \end{cases} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, n)$$

geschrieben werden. Zwischen den Vektoren i^α und j^α bzw. deren Ableitungen besteht noch die Beziehung (1.16), was zur Folge hat, daß die $2n-2$ Krümmungen λ^* und $\varkappa$ nicht voneinander unabhängig sind. Im allgemeinen hat eine Regelfläche $2n-3$ voneinander unabhängige Krümmungen.

---

[24]) Man zeigt, daß e^φ ein Einheitsvektor der Hyperkugel ist.

[25]) Für die Vektoren $j^\alpha(0, v)$ und $i^\alpha(0, v)$ schreiben wir im folgenden kurz j^α bzw. i^α. Die Einheitsvektoren $\underset{2}{j}{}^\alpha, \ldots, \underset{n}{j}{}^\alpha$ in (9) sind ebenso wie die Einheitsvektoren $\underset{2}{i}{}^\alpha, \ldots, \underset{n}{i}{}^\alpha$ in (10) nur noch Funktionen der Bogenlänge v der Kehllinie. Dasselbe gilt für die später auftretenden Vektoren $\underset{\nu}{j}{}^\varphi$.

Um sich das Aufstellen der aus (1.16) resultierenden Differentialgleichung zwischen den λ^* und $\varkappa$ zu ersparen, wird man wie im Falle I versuchen, an Stelle von (9), (10) ein neues Gleichungssystem anzugeben, in dem nur $2n-3$, aber voneinander ***unabhängige*** Krümmungen auftreten. Das gelingt z.B., indem man die Dimension des Gleichungssystems (9) von n auf $n-1$ reduziert. Durch das Vektorfeld $\delta_v i^\alpha$ ist längs der Kehllinie ein E_{n-1}-Feld, eine sog. X_n^{n-1}, in die V_n eingespannt. Ist $p^\varphi(v)$ eine Vektormannigfaltigkeit der X_n^{n-1}, so erhält man die *kovariante Richtungsableitung* in Richtung $d_v\xi^\varphi = j^\varphi$ nach

$$(11)\qquad \begin{cases} {}'\delta_v p^\varphi \overset{\text{def}}{=} d_v p^\varphi + {}'\Gamma^\varphi_{\chi\nu} p^\chi d_v \xi^\nu \\ \qquad = d_v p^\varphi + {}'\Gamma^\varphi_{\chi\nu} p^\chi j^\nu \end{cases} \qquad (\varphi, \chi, \psi = 1, \ldots, n-1).$$

Die darin auftretenden ${}'\Gamma^\varphi_{\chi\nu}$ berechnen sich nach (5), wobei jetzt $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffel-Symbole der V_n und $B^\alpha_\psi, \ldots$ die durch die Einspannung der X_n^{n-1} in die V_n gegebenen *Verbindungsgrößen*[26]) sind. Die $(n-1)$-Komponenten j^φ des Vektors j^α in (11) findet man aus

$$(12)\qquad j^\varphi = B^\varphi_\alpha j^\alpha.$$

Wegen $G_u = 0$ sind nur Vektoren j^α zugelassen, die auf $\delta_v i^\alpha$ senkrecht stehen, also Vektoren j^α der X_n^{n-1}. Man kann daher die Dimension des Gleichungssystems (9) reduzieren, indem man j^α durch seine $(n-1)$-Komponenten j^φ ersetzt und dann für j^φ das System von Ableitungsgleichungen anschreibt. Es läßt sich zeigen, daß j^φ ein Einheitsvektor der X_n^{n-1} ist. Die auftretenden Ableitungen sind jeweils in X_n^{n-1} auszuführen. Die Ableitungsgleichungen lauten[25]):

$$(13)\qquad \textbf{II, IIIa:}\quad \begin{aligned} \delta_v \underset{\varepsilon}{i^\alpha} &= -\underset{\varepsilon-1}{\varkappa}\,\underset{\varepsilon-1}{i^\alpha} + \underset{\varepsilon}{\varkappa}\,\underset{\varepsilon+1}{i^\alpha} \quad (\varepsilon = 1, \ldots, n) \\ {}'\delta_v \underset{\nu}{j^\varphi} &= -\underset{\nu-1}{\lambda}\,\underset{\nu-1}{j^\varphi} + \underset{\nu}{\lambda}\,\underset{\nu+1}{j^\varphi} \quad (\nu = 1, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

$$\underset{1}{i^\alpha} = i^\alpha, \quad \underset{1}{j^\varphi} = j^\varphi, \quad \underset{0}{\varkappa} = \underset{n}{\varkappa} = 0, \quad \underset{0}{\lambda} = \underset{n-1}{\lambda} = 0.$$

Die in (13) auftretenden $2n-3$ Krümmungen $\lambda, \varkappa$ sind im allgemeinen voneinander ***unabhängig***.

Die Gln. (13) stellen die Ableitungsgleichungen in den Fällen II und **IIIa**, falls $\delta_v i^\alpha \neq 0$, dar. Im Falle II kann man noch eine wichtige Aussage über die Krümmungen $\lambda, \varkappa$ machen. Da i^α und j^α Einheitsvektoren sind, gilt im Falle II (bei entsprechender Orientierung)

$$(14)\qquad i^\alpha \equiv j^\alpha \quad \{v\}, \qquad u = 0.$$

Die $(n-1)$-Komponenten ${}'\delta_v j^\varphi$ des Vektors $\delta_v j^\alpha$ werden nach (12) gewonnen, wobei die Transformation (12) einer *Normalprojektion* in Richtung $\delta_v i^\alpha \equiv \delta_v j^\alpha$

[26]) Vgl. etwa J. A. SCHOUTEN[1]) V. § 7.

entspricht. Daher ist

$$(15) \qquad {}'\delta_v j^\varphi \equiv 0\,\{v\}, \qquad u = 0.$$

Das erste der Gleichungssysteme (13) gilt für $i^\alpha \equiv j^\alpha$ und stellt die Frenetschen Ableitungsgleichungen der Kehllinie (= Gratlinie) dar. Das heißt, *im Falle* II *stimmen die Krümmungen* $\varkappa$ *der Regelfläche mit den Krümmungen der Gratlinie überein, während die Krümmungen* λ *identisch verschwinden*[27]):

$$(16) \qquad \underset{\nu}{\lambda} \equiv 0.$$

Sind die Anfangsbedingungen der Regelfläche, d.h. $\xi^\alpha(0, v_0)$, $j^\alpha(0, v_0)$ *und die Anfangslagen des n-Beins* $\underset{\varepsilon}{i^\alpha}$ *und des* $(n-1)$*-Beins* $\underset{\nu}{j^\varphi}$, *sowie die Krümmungen* $\varkappa, \lambda$ *als Funktionen von* v *gegeben, so ist die Regelfläche eindeutig bestimmt.*

Es bleibt jetzt noch **III b**, d.h. **III** mit $\delta_v i^\alpha \equiv 0\,\{v\}$, $u = 0$, zu erörtern. Da die Tangenten an die Erzeugenden wegen $\delta_v i^\alpha = 0$ längs der Kehllinie parallel (im absoluten Sinne) verschoben werden, genügt es, die Ableitungsgleichungen der Kehllinie, d.h. das Gleichungssystem (9)

$$(17) \qquad \textbf{III b:} \quad \begin{aligned} &\delta_v i^\alpha = 0 \\ &\delta_v \underset{\varepsilon}{j^\alpha} = -\underset{\varepsilon-1}{\lambda^*}\,\underset{\varepsilon-1}{j^\alpha} + \underset{\varepsilon}{\lambda^*}\,\underset{\varepsilon+1}{j^\alpha} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

$$\underset{1}{j^\alpha} = j^\alpha, \quad \underset{0}{\lambda^*} = \underset{n}{\lambda^*} = 0$$

anzugeben. *Die Krümmungen* λ^* *der Regelfläche sind gleich den Krümmungen der Kehllinie. Kennt man die Anfangsbedingungen und die Krümmungen* λ^* *als Funktionen von* v, *so ist die Regelfläche eindeutig bestimmt.*

§ 5. Zwei Beispiele

Als erstes Beispiel sei der Fall betrachtet, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n eine lineare R_3 ist. Die Erzeugenden sind gerade Linien. Durch Auszeichnung eines rechtwinkligen Koordinatensystems verschwinden die Christoffel-Symbole, und es ist $\delta_v p^\alpha = d_v p^\alpha$.

Besteht die Geradenschar der R_3 aus einem *Strahlbüschel*, d.h. liegt Fall **I** vor, so gelten die Ableitungsgleichungen (4.8) für $\nu = 1, 2$, nämlich

$$(1) \qquad \begin{cases} {}'\delta_v e^\varphi = \underset{1\,2}{k}\, e^\varphi \\ {}'\delta_v \underset{2}{e^\varphi} = -\underset{1}{k}\, e^\varphi \end{cases} \qquad (\varphi = 1, 2).$$

[27]) Eine Regelfläche der V_n wird im allgemeinen mehrere Kehllinien haben, die auch teilweise oder alle in Kehlpunkte ausgeartet sein können. Die in diesem Abschnitt aufgestellten Ableitungsgleichungen und damit die Krümmungen beziehen sich jeweils auf eine dieser Kehllinien.

Das Strahlbüschel ist durch die Krümmung $\underset{1}{k}$ im wesentlichen bestimmt. *$\underset{1}{k}$ ist gleich der geodätischen Krümmung des sphärischen Bildes der Erzeugenden auf der Einheitskugel*[28]).

Im Falle II stellt die Regelfläche eine *Torse* dar, deren Kehllinie gleich der Gratlinie ist. Es gelten die Ableitungsgleichungen (4.13) für $\varepsilon = 1, 2, 3$ und $\nu = 1, 2$, wobei noch (4.15) zu berücksichtigen ist, d.h.

$$(2)\qquad \begin{cases} d_v j^\alpha = & \underset{1}{\varkappa}\, j^\alpha \\ d_v \underset{2}{j}{}^\alpha = -\underset{1}{\varkappa}\, j^\alpha & + \underset{2}{\varkappa}\, \underset{3}{j}{}^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \\ d_v \underset{3}{j}{}^\alpha = & -\underset{2}{\varkappa}\, \underset{2}{j}{}^\alpha \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad {}'\delta_v j^\varphi \equiv 0.$$

(2) sind die Frenetschen Ableitungsgleichungen der Gratlinie. *Im Falle der Torse geben die Krümmungen $\underset{1}{\varkappa}, \underset{2}{\varkappa}$ die Krümmung und Windung der Gratlinie an, während $\underset{1}{\lambda}$ identisch verschwindet.*

Im Falle **IIIa**, $d_v i^\alpha \neq 0$ liegt eine *windschiefe Regelfläche* vor. Die nach (1.16) durch $G_u = 0$ erklärte Kehllinie stimmt, falls $V_n = R_3$, mit der aus der Theorie der Regelfläche der R_3 bekannten *Kehllinie* oder *Striktionslinie* überein. Es gelten die Ableitungsgleichungen (4.13) für $\varepsilon = 1, 2, 3$ und $\nu = 1, 2$, d.h.

$$(4)\qquad \begin{cases} d_v i^\alpha = & \underset{1}{\varkappa}\, i^\alpha \\ d_v \underset{2}{i}{}^\alpha = -\underset{1}{\varkappa}\, i^\alpha & + \underset{2}{\varkappa}\, \underset{3}{i}{}^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \\ d_v \underset{3}{i}{}^\alpha = & -\underset{2}{\varkappa}\, \underset{2}{i}{}^\alpha \\ {}'\delta_v j^\varphi = & \underset{1}{\lambda}\, \underset{2}{j}{}^\varphi \qquad (\varphi = 1, 2) \\ {}'\delta_v \underset{2}{j}{}^\varphi = -\underset{1}{\lambda}\, j^\varphi. & \end{cases}$$

Wegen $g_{\alpha\beta} j^\alpha d_v i^\beta = 0$ und $g_{\alpha\beta} i^\alpha d_v i^\beta = 0$ ist $\underset{2}{i}{}^\alpha$ der Normaleneinheitsvektor der Regelfläche. Das begleitende Dreibein wird, wenn man die ersten drei Gleichungen von (4) ins Auge faßt, von der Erzeugenden i^α, der Flächennormale

---

[28]) Die Ableitungsgleichungen (1) stimmen im wesentlichen mit den von E. KRUPPA in: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzgsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Kl. IIa **157**, 125–158 (1949) angegebenen Ableitungsgleichungen des Kegels überein. Die dort auftretende Krümmung $\varkappa_2$ (konische Krümmung des Kegels) ist identisch mit der Krümmung $\underset{1}{k}$ (geodätische Krümmung des sphärischen Bildes der Erzeugenden).

$\underset{2}{i}^{\alpha}$ und der Zentraltangente $\underset{3}{i}^{\alpha}$ aufgespannt. $\underset{2}{\varkappa}:\underset{1}{\varkappa}$ *ist gleich der konischen Krümmung des Richtkegels der Regelfläche,* $\underset{1}{\lambda}$ *gleich der geodätischen Krümmung der Kehllinie auf der Regelfläche*[29]).

Im Falle **III b**, $d_v i^{\alpha} \equiv 0\,\{v\}$, $u = 0$ sind alle Erzeugenden *parallel*. Es ist sogar $G_u \equiv 0$ und nach (3.30) $'K \equiv 0\,\{u, v\}$. Die Regelfläche stellt einen *Zylinder* (bzw. eine *Ebene*) dar. Jeder Punkt der Fläche ist ein Kehlpunkt. Als Kehllinie wählt man nach (3.32) irgendeine der *Orthogonaltrajektorien* der Erzeugenden. Bezogen auf eine solche Kehllinie lauten die Ableitungsgleichungen gemäß (4.17)

$$(5)\qquad \begin{cases} d_v \underset{1}{j}^{\alpha} = \underset{1}{\lambda}^{*}\,\underset{2}{j}^{\alpha} \\ d_v \underset{2}{j}^{\alpha} = -\,\underset{1}{\lambda}^{*}\,\underset{1}{j}^{\alpha} + \underset{2}{\lambda}^{*}\,\underset{3}{j}^{\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \\ d_v \underset{3}{j}^{\alpha} = -\,\underset{2}{\lambda}^{*}\,\underset{2}{j}^{\alpha}. \end{cases}$$

$\underset{1}{\lambda}^{*}, \underset{2}{\lambda}^{*}$ *sind Krümmung und Windung der Kehllinie. Da die Kehllinie eine ebene Kurve ist, verschwindet* $\underset{2}{\lambda}^{*}$ *identisch.*

Als zweites Beispiel erörtern wir noch den Fall, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n eine V_2 *in* R_3 ist. Die Erzeugenden sind die Geodätischen der V_2. Außer im Falle **I**, wo eine Schar von ∞^1 Erzeugenden durch einen festen Punkt vorliegt, ist jede eindimensionale Schar von Erzeugenden durch eine Krümmung im wesentlichen bestimmt.

Im Falle **II** lauten die Ableitungsgleichungen nach (4.13) und (4.15)

$$(6)\qquad \begin{cases} \delta_v \underset{1}{j}^{\alpha} = \underset{1}{\varkappa}\,\underset{2}{j}^{\alpha} \\ \delta_v \underset{2}{j}^{\alpha} = -\,\underset{1}{\varkappa}\,\underset{1}{j}^{\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2) \end{cases}$$

und

$$(7)\qquad {}'\delta_v j^{q} \equiv 0.$$

Die darin auftretende Krümmung $\underset{1}{\varkappa}$ *der Regelfläche ist gleich der geodätischen Krümmung der Kehllinie (= Enveloppe der Geodätischen) auf der* V_2[27]).

[29]) Die Ableitungsgleichungen der Strahlflächen sind von E. KRUPPA in der in [28]) zitierten Arbeit in einer Form angegeben worden, die mit unserer Darstellung (4) im wesentlichen übereinstimmt. Bei KRUPPA bestehen die Anfangsbedingungen aus der Vorgabe einer Erzeugenden, des Striktionspunktes auf ihr und der Anfangslage des begleitenden Dreibeins, in unserem Falle jedoch aus der Vorgabe einer Erzeugenden samt Striktionspunkt, der Anfangslage des begleitenden Dreibeins *und* der Tangente an die Striktionslinie im Striktionspunkt. Daher ist bei KRUPPA $\sigma'(v)$, das ist der Winkel zwischen der Erzeugenden und der Tangente an die Striktionslinie, eine „Grundinvariante" der Regelfläche, während hier die Striktionslinie schon durch $\sigma'(v)$ bestimmt ist. Ein Vergleich zwischen den Grundinvarianten $\varkappa, \varkappa_1, \sigma$ bei KRUPPA und den Krümmungen $\underset{1}{\varkappa}, \underset{2}{\varkappa}, \underset{1}{\lambda}$ ergibt: $\varkappa = \underset{1}{\varkappa}$, $\varkappa_1 = \underset{2}{\varkappa}$, $\sigma' = \underset{1}{\lambda}$. Vgl. ferner E. KRUPPA: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, S. 61 ff. Wien 1957.

Im Falle III ist nach (3.5) $'\delta_v i^\alpha = 0$, aber auch $\delta_v i^\alpha = 0$, da man $\xi^\alpha = x^\alpha$; $\alpha, \beta = 1, 2$ setzen kann. Es gelten die Ableitungsgleichungen (4.17) für $\varepsilon = 1, 2$, d.h.

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta_v \underset{1}{j}^\alpha = \underset{1}{\lambda}^* \underset{2}{j}^\alpha \\ \delta_v \underset{2}{j}^\alpha = -\underset{1}{\lambda}^* j^\alpha \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Die Krümmung $\underset{1}{\lambda}^*$ *der Regelfläche ist wie in* II *gleich der geodätischen Krümmung der Kehllinie auf der* V_2 *in* R_3. Längs der Kehllinie werden die Tangentenvektoren an die Erzeugenden wegen $\delta_v i^\alpha = 0$ *parallel* (im absoluten Sinne) verschoben. Die Kehllinie schneidet die Erzeugenden dann und nur dann unter konstantem Winkel, falls $\underset{1}{\lambda}^* \equiv 0$, d.h. falls die Kehllinie eine *geodätische Linie der* V_2 ist (Darbouxsche Verallgemeinerung des Satzes von BONNET).

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 22. März 1958)

HOFMANN, K. H.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 213–230 (1958)

Topologische Doppelloops

Von

KARL HEINRICH HOFMANN

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Untersuchung zunächst nicht notwendig assoziativer topologisch-algebraischer Strukturen, die in zwei vorhergegangenen Arbeiten[1]) vorwiegend von Strukturen mit einer Verknüpfung handelte und nun auf Strukturen mit zwei Verknüpfungen vom ring- oder körperartigen Typ ausgedehnt werden soll. Die Terminologie bleibt dieselbe wie in jenen Arbeiten. Die römischen Ziffern I und II bei Hinweisen auf Textstellen beziehen sich auf die erste bzw. die zweite der erwähnten beiden vorausgegangenen Arbeiten.

§ 1. Ringartige Strukturen und Doppelloops

(1.1) Auf den im folgenden betrachteten algebraischen Strukturen K sind stets zwei Verknüpfungen definiert: Erstens eine als Addition bezeichnete Verknüpfung $(x, y) \to x + y$; K sei bezüglich dieser Verknüpfung stets eine Loop; es gibt dann zu x und y immer zwei Elemente u und v mit $x + u = y$ bzw. $v + y = x$, die wir mit $u = -x + y$ bzw. mit $v = x - y$ bezeichnen. Zweitens ist eine als Multiplikation bezeichnete Verknüpfung $(x, y) \to xy$ erklärt; es gelte stets $x0 = 0x = 0$ (wobei mit 0 das neutrale Element der Addition bezeichnet ist), und diese Verknüpfung habe ein beiderseits neutrales Element e. In der Regel werden wir solche Strukturen K betrachten, in denen sogar $K - \{0\}$ bezüglich $(x, y) \to xy$ eine Loop bildet; eine algebraische Struktur dieser Eigenschaft nennen wir mit PICKERT [3], S. 61 eine *Doppelloop*, während wir eine Struktur mit zwei Verknüpfungen ohne diese scharfe Forderung über die Multiplikation eine *ringartige Struktur* nennen. Was unter einer *topologischen ringartigen Struktur* bzw. unter einer *topologischen Doppelloop* zu verstehen sei, geht unmittelbar aus I, (2.1) hervor.

(1.2) Die von den Rechtsmultiplikationen $x \to xa$ $(a \neq 0)$ erzeugte Transformationsgruppe einer ringartigen Struktur $(K, +, .)$ nennen wir gelegentlich $\mathfrak{R}$, die von den Linksmultiplikationen $x \to ax$ $(a \neq 0)$ erzeugte $\mathfrak{L}$ und schließlich die von beiden Typen von Translationen erzeugte Gruppe $\mathfrak{Z}$. Eine ringartige Struktur $(K, +, .)$ nennen wir *rechtsdistributiv*, wenn alle Rechtsmultiplikationen, *linksdistributiv*, wenn alle Linksmultiplikationen und *zweiseitig distributiv* (oder *distributiv* schlechthin) wenn Rechts- und Linksmultiplikation Endomorphismen der additiven Struktur $(K, +)$ darstellen.

Ein Normalteiler J der additiven Struktur $(K, +)$ heißt ein *Rechtsideal*, wenn er von $\mathfrak{R}$, ein *Linksideal*, wenn er von $\mathfrak{L}$ und ein *zweiseitiges Ideal* oder

[1]) Topologische Loops, Math. Z. **70**, 13–37 (1958); Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen, Math. Z. **70**, 125–155.

Ideal schlechthin, wenn er von $\mathfrak{Z}$ in sich übergeführt wird. *Ein charakteristischer Normalteiler von* $(K, +)$ *in einer rechtsdistributiven ringartigen Struktur* $(K, +, .)$ *ist stets ein Rechtsideal.* Entsprechendes gilt für die Begriffe „links" und „zweiseitig".

In einer Doppelloop $(K, +, .)$ *gibt es außer* $\{0\}$ *und* K *keine Rechts-, Links- oder zweiseitigen echten Ideale:*

Es sei J ein von $\{0\}$ verschiedenes Rechtsideal. x sei ein beliebiger von 0 verschiedener Punkt von K und a ein beliebiger von 0 verschiedener Punkt von J. Es existiert dann genau ein Element $u \in K$, so daß $au = x$. Die Abbildung $y \to yu$ bildet aber J in sich ab. Also liegt x in J und damit K in J.

In einer zweiseitig distributiven ringartigen Struktur $(K, +, .)$ sind die zweiseitigen Ideale J gerade die Kerne von Homomorphismen h von K in eine algebraische Struktur. Es gilt dann nämlich für ein zweiseitiges Ideal $(x+J)(y+J) = (xy+J)$, so daß $(K, +)/J$ mit der Multiplikation $\big((x+J), (y+J)\big) \to (x+J)(y+J)$ zu einem homomorphen Bild von $(K, +, .)$ wird. Es sei umgekehrt h ein auf K definierter Homomorphismus. $J = h^{-1}\big(h(0)\big)$ ist dann ein Ideal: J ist jedenfalls ein $+$-Normalteiler. Jx wird durch h auf $h(Jx) = h(J)h(x) = h\big(h^{-1}(h(0))\big)h(x) = h(0)$ abgebildet, d.h. Jx liegt in $h^{-1}\big(h(0)\big) = J$. Dieser zweite Teil des Beweises gilt ohne Distributivitätsvoraussetzungen; d.h. jeder Kern eines Homomorphismus ist ein Ideal.

(1.3) $(K, +, .)$ *sei eine topologische Doppelloop. Dann ist* K *entweder zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend (also auch insbesondere total unzusammenhängend).*

BEWEIS. $Z'(0)$ sei die Quasikomponente von 0 in K. $Z'(0)$ ist ein charakteristischer $+$-Normalteiler [II, (5.9)]. Die Abbildung $z \to zx$ $(x \neq 0)$ ist eine homöomorphe Abbildung f von $Z'(0)$ in K; das Bild von $Z'(0)$ enthält 0, und umfaßt $Z'(0)$; denn $Z'(0) = \cap\{U;\ U \in \mathfrak{U}(0),\ U$ ist abgeschlossen und offen$\}$ und $f\big(Z'(0)\big)$ ist wieder ein Durchschnitt von offenen und abgeschlossenen Mengen der 0 enthält. Ebenso folgt aber auch $f^{-1}\big(Z'(0)\big) = Z'(0)$ und daraus $Z'(0) = f\big(Z'(0)\big)$; es gilt also $Z'(0) = f\big(Z'(0)\big)$. Dann ist aber $Z'(0)$ ein Rechtsideal und stimmt daher mit $\{0\}$ oder K überein.

(1.4) *In einer topologischen ringartigen Struktur sind die Zusammenhangskomponente* $Z(0)$ *und die Quasikomponente* $Z'(0)$ *des Punktes* 0 *zweiseitige Ideale.*

BEWEIS. Wie unter (1.3).

(1.5) $(K, +, .)$ sei eine lokalkompakte Doppelloop. Dann ist K nicht kompakt. Die Abbildung $x \to x\backslash e$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Homöomorphismus g der Einpunktkompaktifizierung $K \cup \{a\}$ auf sich mit $g(0) = a$ und $g(a) = 0$.

BEWEIS. $\mathfrak{U}'(0)$ bestehe aus den Mengen $U - \{0\}$ mit $U \in \mathfrak{U}(0)$. Das Bild von $\mathfrak{U}'(0)$ bei $x \to x\backslash d$ (mit beliebigem $d \neq 0$ aus K) hat keine Adhärenzpunkte in K; denn für jede gegen 0 konvergierende Filterbasis $\mathfrak{B}$ mit $\lim\limits_{\mathfrak{B}} x\backslash d = k$ gilt $d = \lim\limits_{\mathfrak{B}} x(x\backslash d) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} x \lim\limits_{\mathfrak{B}} x\backslash d = 0 \cdot k = 0$ im Widerspruch zur Wahl von d.

Nun sei $K \cup \{a\}$ die Einpunktkompaktifizierung von K. Das Bild von $\mathfrak{U}'(0)$ bei $x \to x\backslash d$ hat keinen Adhärenzpunkt in K, muß aber in dem kompakten Raum $K \cup \{a\}$ wenigstens einen solchen besitzen; dieses Bild konvergiert also gegen a. In derselben Weise konvergiert das Bild von $\mathfrak{U}'(0)$ bei $x \to d/x$ (mit beliebigem $d \neq 0$ aus K) gegen a. Die beiden Abbildungen

$$x \to g(x) = \begin{cases} a & \text{für} \quad x = 0 \\ x\backslash e & \text{für} \quad x \in K - \{0\} \\ 0 & \text{für} \quad x = a, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$x \to \bar{g}(x) = \begin{cases} a & \text{für} \quad x = 0 \\ e/x & \text{für} \quad x \in K - \{0\} \\ 0 & \text{für} \quad x = a \end{cases} \quad \text{sind}$$

eineindeutige und auf K stetige Abbildungen von $K \cup \{a\}$ auf sich, und die eine ist die Umkehrabbildungen der anderen. Da $\bar{g}$ in 0 stetig ist, gibt es zu jeder offenen Umgebung U von a in $K \cup \{a\}$ mit $0 \notin \overline{U}$ eine Umgebung V von 0, so daß $V \subseteq g(U)$; d.h. g ist in a offen und bildet U eineindeutig und offen in $K \cup \{a\}$ ab. Ist $\overline{U}$ kompakt, so wird $\overline{U}_0 = \overline{U} \cup \{0\}$ durch g eineindeutig relativ offen, also homöomorph auf $g(\overline{U}) \in \mathfrak{U}(0)$ abgebildet, denn $g(\overline{U}_0) = g(\overline{U} - \{a\}) \cup \{0\} \cup \{a\}$ ist abgeschlossen (und daher kompakt), weil g auf $K - \{0\}$ einen Homöomorphismus auf sich darstellt. g und dann auch $\bar{g}$ sind also überall stetige und sogar homöomorphe Abbildungen von $K \cup \{a\}$ auf sich.

(1.6) *Eine lokalkompakte, zusammenhängende Doppelloop ist lokalzusammenhängend.*

Beweis. $(K, +, ., \mathfrak{O}(K))$ erlaubt eine Verfeinerung der Topologie $\mathfrak{O}(K)$ zu $\mathfrak{O}'(K)$ derart, daß $(K, +, ., \mathfrak{O}'(K))$ eine lokalkompakte, lokalzusammenhängende und wegen (1.3) zusammenhängende Doppelloop bildet [I, (5.15)]. U sei eine kompakte Umgebung von 0 in der alten Topologie; in der neuen Topologie ist U eine Vereinigung $\cup \{U_i; i \in I\}$ von kompakten punktfremden Umgebungen U_i. Angenommen $\mathfrak{U}(0)$ würde die Zusammenhangskomponente U_{i_0} von 0 in U nicht enthalten. Dann enthielte jedes $V \in \mathfrak{U}(0)$ ein x_{i_V} aus einem $U_{i_V} \neq U_{i_0}$. Die Menge $I' = (i_V; V \in \mathfrak{U}(0))$ ist durch $\leqq$ gefiltert gemäß der Angabe, daß $i_V \leqq i_{V'}$ genau gilt, wenn $V \subseteq V'$ gilt. Wir haben $\lim_{i \in I} x_i = 0$ in der alten Topologie; in der neuen kann $(x_i)_{i \in I}$ kein konvergentes Unternetz $(x_i)_{i \in I}$ besitzen; denn in der neuen Topologie ist der Teilraum $\{x_i; i \in I\}$ diskret, da jedes x_i in einer offenen Menge U_i liegt, die kein Element x_j mit $j \neq i$ enthält. Es gilt also $\lim_{i \in I'} x_i = a$, wenn $K \cup \{a\}$ die Kompaktifizierung von K in der neuen Topologie bezeichnet. Daraus folgt aber $\lim_{i \in I} x_i \backslash e = 0$ in der neuen Topologie und erst recht in der alten. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Gültigkeit von $\lim_{i \in I'} x_i = 0$ in der alten Topologie. Demnach muß U_{i_0} eine Umgebung von 0 sein, und da U beliebig gewählt war, besitzt $\mathfrak{U}(0)$ eine Basis aus zusammenhängenden Umgebungen.

(1.7) $(K, +, .)$ sei eine ringartige Struktur. Unter dem *Ringzentrum* H von K verstehen wir diejenige Menge von Elementen $x \in K$, die aus der Null und allen x besteht, die im Zentrum von $(K, +)$ liegen und für alle $(a, b) \in K \times K$ die Identitäten $xa = ax$, $(ab)x = a(bx) = (ax)b$ erfüllen. Das Ringzentrum ist eine Unterstruktur und ein $+$-Normalteiler. Ist K eine Doppelloop, so ist $(H - \{0\}, .)$ das Zentrum von $(K - \{0\}, .)$.

(1.8) *$(K, +, .)$ sei eine zusammenhängende ringartige Struktur. H sei ein total unzusammenhängendes Ideal. Dann liegt H im Ringzentrum von K.*

BEWEIS. H ist ein $+$-Normalteiler. Es sei $a \in H$. Dann ist $x \to xa - ax$ eine stetige Abbildung von K in H; das Bild ist zusammenhängend und enthält 0, ist also gleich $\{0\}$. Daher gilt $xa = ax$ für alle $x \in K$. Ebenso beweist man die übrigen Identitäten.

(1.9) H sei ein total unzusammenhängendes Ideal einer zusammenhängenden ringartigen Struktur. Für alle $a, b \in H$ und alle $x \in K$ gilt dann $(a+b)x = (ax + bx)$, $x(a+b) = (xa + xb)$; d.h. $\mathfrak{Z}$ ist eine Endomorphismengruppe auf H. Insbesondere folgt, daß jedes total unzusammenhängende Ideal in K ein kommutativer Unterring ist.

BEWEIS. Die Abbildung $x \to (a+b)x - (ax + bx)$ ist eine stetige Abbildung von K in H; das Bild ist zusammenhängend und enthält 0; da e auf 0 abgebildet wird. Dieses Bild muß also mit $\{0\}$ übereinstimmen, woraus die eine der Identitäten folgt. Die andere beweist man analog.

(1.10) *$(K, +, .)$ sei eine ringartige Struktur; sie sei zusammenhängend, lokalzusammenhängend. $(\tilde{K}, +, ., f)$ sei eine einfach zusammenhängende Überlagerungsstruktur von K. Dann enthält das Zentrum von $\tilde{K}$ ein diskretes Ideal $\tilde{H}$, das einen Ring bildet, dessen additive Gruppe der Poincaré-Gruppe von K isomorph ist, und in dem sämtliche Produkte null sind.*

BEWEIS. $(\tilde{K}, +, ., f)$ sei die einfach zusammenhängende Überlagerungsstruktur von K. Dann ist $(\tilde{K}, +)$ eine Loop mit neutralem Element $\tilde{0}$. Ferner bildet $(\tilde{K}, .)$ eine Struktur mit der Verknüpfung $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \tilde{x}\tilde{y}$. Es gibt ein Element $\tilde{e} \in f^{-1}(e)$, so daß $\tilde{x}\tilde{e} = \tilde{e}\tilde{x} = \tilde{x}$. Die Abbildung $\tilde{x} \to \tilde{0}\tilde{x}$ bildet den zusammenhängenden Raum $\tilde{K}$ in den diskreten Raum $\tilde{H} = f^{-1}(0)$ ab und ist daher konstant: $\tilde{0}\tilde{x} = \tilde{c}$. Wie im Beweis von (1.9) überlegt man, daß für alle $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ aus $\tilde{H}$ und alle $\tilde{x}$ aus $\tilde{K}$ stets $(\tilde{a} + \tilde{b})\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{x}$ gilt. Mit $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{0}$ folgt daraus insbesondere $\tilde{c} + \tilde{c} = \tilde{c}$, was aber $\tilde{c} = \tilde{0}$ nach sich zieht. Ebenso beweist man $\tilde{x}\tilde{0} = \tilde{0}$. Nun ist also $(\tilde{K}, +, .)$ eine ringartige Struktur, und f ein Homomorphismus von $\tilde{K}$ auf K. Der Kern $\tilde{H} = f^{-1}(0)$ ist ein im Ringzentrum gelegenes diskretes Ideal. Es sei $a \in H$. Dann gilt für alle $\tilde{x}$ stets $f(\tilde{x}\tilde{a}) = 0$ und überdies ist $\tilde{0} \cdot \tilde{a} = \tilde{0}$. Die Abbildungen $\tilde{x} \to \tilde{0}$ und $\tilde{x} \to \tilde{x}\tilde{a}$ von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}$ haben dieselben im Sinne von I, (6.2) eindeutig kennzeichnenden Eigenschaften und stimmen daher überein. (Derselbe Schluß wurde in I, § 6 wiederholt angewandt.)

(1.11) Nun erfülle $(K, +, .)$ die Voraussetzungen von (1.10) und sei überdies eine Doppelloop. Dann ist für jedes $\tilde{a} \triangleleft \tilde{H}$ die Abbildung $\tilde{x} \to \tilde{x}\tilde{a}$ eine eineindeutige Abbildung „auf".

BEWEIS. Zu jedem $\tilde{a} \notin \tilde{H}$ existiert eine Abbildung $\tilde{x} \to \tilde{x}/\tilde{a}$ von $\tilde{K}$ in sich derart, daß $f(\tilde{x}/\tilde{a}) = f(\tilde{x})/f(\tilde{a})$, daß $\tilde{a}/\tilde{a} = \tilde{e}$ und daß $(\tilde{x}/\tilde{a})\tilde{a} = \tilde{x}$ gilt (in der Tat: $\bar{x} \to (\tilde{x}/\tilde{a})\tilde{a}$ hat die Eigenschaft, daß $f((\tilde{x}/\tilde{a})\tilde{a}) = f(\tilde{x})$ und $(\tilde{a}/\tilde{a})\tilde{a} = \tilde{a}$, woraus die Behauptung folgt). Insbesondere folgt aus dem Gesagten die Gleichung $\tilde{0}/\tilde{a} = \tilde{0}$. In genau analoger Weise kann man $(\tilde{x}\tilde{a})/\tilde{a} = \tilde{x}$ zeigen. Die Abbildung $R_{\tilde{a}} = (\tilde{x} \to \tilde{x}\tilde{a})$ besitzt also eine Umkehrabbildung $R_{\tilde{a}}^{-1}$, d.h. $R_{\tilde{a}}^{-1} \circ R_{\tilde{a}} = R_{\tilde{a}} \circ R_{\tilde{a}}^{-1}$ ist die identische Abbildung.

(1.12) *Eine zusammenhängende, lokalzusammenhängende, lokal einfach zusammenhängende topologische Doppelloop K ist einfach zusammenhängend.*

BEWEIS. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in (1.10) und (1.11). Für $\tilde{a} \notin \tilde{H}$ ist $\tilde{x} \to \tilde{x}\tilde{a}$ ein Homöomorphismus von $\tilde{K}$ auf sich. Aus $\tilde{H}\tilde{a} = \{0\}$ folgt dann aber $\tilde{H} = \{0\}$, w.z.b.w.

Nach einer Bemerkung von I, § 6 gilt auch der folgende Satz, in dem unter dem Begriff des einfachen Zusammenhangs der dort erwähnte Begriff zu verstehen ist:

Eine topologische kurvenzusammenhängende Doppelloop K ist einfach zusammenhängend (im Sinne von R. NOVOSAD).

Insbesondere ist jede zu R lokal homöomorphe Doppelloop zu R homöomorph. Es hätte ausgereicht, in (1.11) und (1.12) K als nullteilerfreie ringartige Struktur vorauszusetzen, d.h. als ringartige Struktur, in der aus $ab = 0$ stets $a = 0$ oder $b = 0$ folgt.

(1.13) *Sämtliche Sätze über Doppelloops, soweit sie bislang angegeben wurden, gelten für Strukturen $(K, +, .)$ folgender Art: K sei bezüglich $+$ eine Quasigruppe; in K existiere ein Element a derart, daß $(K \{a\}, .)$ eine Quasigruppe bildet und daß $ax = xa = a$ für alle $x \in K$ richtig ist.*

Der Beweis folgt aus einer Bemerkung von I, (1.3).

(1.12) liefert einen einfachen Beweis für einen Satz von SALZMANN [4, S. 455].

§ 2. Eindimensionale Doppelloops

In allen im folgenden betrachteten ringartigen Strukturen ist die additive Loop stets mindestens lokal monassoziativ, in der Regel sogar potenzassoziativ; ferner beschränken wir uns auf lokalkompakte Strukturen und solche, die wenigstens linksdistributiv sind. Die ringartigen Strukturen seien stets *nullteilerfrei*, d.h. aus $xy = 0$ folge stets $x = 0$ oder $y = 0$.

(2.1) Existiert in einer linksdistributiven Doppelloop K auch nur ein von 0 verschiedenes monassoziatives (bzw. potenzassoziatives) Element a, (wobei sich die Begriffe monassoziativ bzw. potenzassoziativ auf die Addition beziehen), so ist $(K, +)$ monassoziativ (bzw. potenzassoziativ).

BEWEIS. Da $\mathfrak{L}$ eine Automorphismengruppe bildet, liegen in Ka nur monassoziative (bzw. potenzassoziative) Elemente. Da K Doppelloop ist, gilt aber $Ka = K$.

Wenn wir also in Zukunft in linksdistributiven Doppelloops die Additionsloop monassoziativ (bzw. potenzassoziativ) voraussetzen, so hätte es auch ausgereicht, die Monassoziativität (bzw. Potenzassoziativität) eines einzigen von 0 verschiedenen Elementes zu fordern.

(2.2) *$(K, +, \circ)$ sei eine linksdistributive $+$ — monassoziative Doppelloop, die lokal einem reellen Intervall homöomorph sei* (die also in Wirklichkeit sogar zu R homöomorph ist). *Dann enthält $(K - \{0\}, \circ)$ einen Normalteiler K' vom Index 2* (d.h. einen Normalteiler dessen Restklassenstruktur aus zwei Elementen besteht), *der zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen isomorph ist, sowie eine Untergruppe A aus zwei Elementen, so daß $(K - \{0\}, \circ) = A \circ K'$.*

BEWEIS. $(K, +)$ enthält zwei verschiedene zu R_+ isomorphe Halbgruppen H_1 und H_2 mit dem Durchschnitt $\{0\}$ II, (6.4). Die Abbildungen $x \to a \circ x$ sind für $a \neq 0$ Automorphismen von $(K, +)$ und Isomorphismen von H_n auf H_m (wobei n und m unabhängig die Menge der Ziffern 1 und 2 durchlaufen). Das Element e sei in H_1 enthalten. f sei ein Isomorphismus von R_+ auf H_1 mit $f(1) = e$. Die sämtlichen Automorphismen von H_1 entsprechen eineindeutig sämtlichen Automorphismen von R_+, und diese sind gerade die Abbildungen $r \to sr$ $(s \in R_+, s \neq 0)$ von R_+ auf sich. Jeder Automorphismus von H_1 hat die Form $x \to f(sf^{-1}(x))$. Wir bezeichnen die Klasse aller Elemente $a \in K$, die durch $x \to a \circ x$ einen Automorphismus von H_1 definieren, mit K'. Zu jedem a aus K' gibt es genau ein reelles $s(a) \in R_+$, so daß $a \circ x = f(s(a) f^{-1}(x))$. Somit gilt, falls a und b beide in K' liegen, $b \circ (a \circ x) = b \circ (f(s(a) f^{-1}(x))) = f(s(b) f^{-1}(f(s(a) f^{-1}(x))))$ $= f(s(b)\, s(a) f^{-1}(x)) = a \circ (b \circ x)$. Setzt man $x = e$, so folgt zunächst $a \circ b = b \circ a$. Für ein Tripel a, b, c von Elementen aus K' gilt somit $a \circ (b \circ c) = a \circ (c \circ b) = c \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ c$; zu einem Element $a \in K'$ gibt es ein $a' \in K$ mit $a' \circ a = e$; dann ist aber die Abbildung $x \to a' \circ x$ ein Automorphismus von H_1 und a' liegt in K'. Die Menge K' bildet also eine Gruppe, die durch $x \to s(x)$ isomorph auf die multiplikative Gruppe von $R_+ - \{0\}$ abgebildet wird; zu jedem $s \neq 0$ aus R_+ gibt es ja ein $a \in K'$, so daß $s = s(a)$; man braucht dazu ja nur $a = f(s)$ zu setzen. K' ist also eine zusammenhängende Untergruppe von $(K - \{0\}, \circ)$, die zu $(R_+ - \{0\}, .)$ und damit auch zu $(R, +)$ isomorph ist. Die Zusammenhangskomponente von e in $(K - \{0\}, \circ)$ ist $H_1 - \{0\}$ und bildet eine zu R homöomorphe Unterloop, die K' enthält. K' ist in $H_1 - \{0\}$ ein offenes, e enthaltendes Intervall. $(H_1 - \{0\}, \circ)$ ist also lokal potenzassoziativ und ist nach II, (6.4) eine Einparametergruppe, die dann aber mit K' übereinstimmen muß. Nun sei g ein Isomorphismus der additiven Halbgruppe R_+ auf H_2. Die Abbildung $r \to p(r)$, die einen Element r aus $R_+ - \{0\}$ das eindeutig bestimmte Element $p(r) \in R_+ - \{0\}$ zu ordnet, für welches $g(r) \circ g(p(r)) = e$ gilt, ist ein Homöomorphismus von $R_+ - \{0\}$ auf sich, $g(R_+ - \{0\}) \backslash e$ ist nämlich in H_2 enthalten und stimmt sogar mit H_2 überein. Nach (1.5) strebt $p(r)$

gegen ∞, wenn r gegen 0 strebt. $r \to p(r)$ ist also monoton fallend und es gibt genau ein r_0 mit $r_0 = p(r_0)$. Das Element $\bar{e} = g(r_0)$ liegt in $H_2 - \{0\}$ und genügt der Gleichung $\bar{e} \circ \bar{e} = e$. Die Gruppe $\{e, \bar{e}\}$ sei mit A bezeichnet. Dann gilt in der Tat $(K - \{0\}, \circ) = A \circ K'$. Die Gruppe K' ist als Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e von $(K - \{0\}, \circ)$ ein Normalteiler, der den Index 2 hat, weil $K - \{0\}$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht. K' ist, um das nocheinmal zu wiederholen, isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen. Aus dem bisher Bewiesenen braucht nun noch nicht zu folgen, daß $(K - \{0\}, \circ)$ zur multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen isomorph ist. Es sei z.B. $(R - \{0\}, .)$ die multiplikative Gruppe des Körpers der reellen Zahlen.

Die Verknüpfung $x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{wenn } x \geqq 0, \quad \text{oder} \quad y \geqq 0 \\ 4xy, & \text{wenn } x < 0, \quad \text{und} \quad y < 0 \end{cases}$

hat mit $e = 1$ und $\bar{e} = -\frac{1}{2}$ alle oben abgeleiteten Eigenschaften ohne assoziativ zu sein. Zusammen mit der in II, (6.3) genannten Verknüpfung als Addition wird $(R, +, \circ)$ zu einer Doppelloop mit kommutativer monassoziativer Addition und kommutativer lokal assoziativer Multiplikation, die in beiden Verknüpfungen nicht assoziativ ist, die allerdings auch im Großen kein Distributivgesetz erfüllt. Die Loop $(R - \{0\}, \circ)$ ist bemerkenswert als Beispiel einer nichtassoziativen Loop, die eine abelsche Gruppe als Normalteiler vom Index 2 besitzt, deren Faktorgruppe nach diesem Normalteiler also eine abelsche Gruppe der Ordnung 2 bildet.

Die Gültigkeit des linksdistributiven Gesetzes erlaubt aber die Ableitung des schärferen Ergebnisses:

(2.3) *Unter den Voraussetzungen von* (2.2) *ist* $(K - \{0\}, \circ)$ *isomorph zur multiplikativen Gruppe des Körpers der reellen Zahlen.*

Beweis. Es sei h ein Automorphismus von $(K, +)$, der dann H_n auf H_m isomorph abbildet (wobei offen bleibe, wie die Abbildung $n \to m(n)$ der Menge (1, 2) auf sich beschaffen sei). Dann ist h durch die Angabe von $h(e)$ und $h(\bar{e})$ schon eindeutig bestimmt. Denn so hat z.B. jeder Isomorphismus von H_2 auf H_1 die Form $x \to f(sg^{-1}(x))$ mit einem $s \in R_+ - \{0\}$; genau Entsprechendes gilt für alle anderen Fälle. Auf H_1 stimmt h also mit $x \to h(e) \circ x$ und auf H_2 mit $x \to h(\bar{e}) \circ (\bar{e} \circ x)$ überein. Unter $x \to \bar{x}$ sei die Abbildung $x \to \bar{e} \circ x$ verstanden; es gilt also $\bar{x} = \bar{e} \circ x$. Die Abbildung $x \to \bar{\bar{x}}$ ist ein Isomorphismus von H_n auf sich $(n = 1, 2)$ mit $\bar{\bar{e}} = e$ und $\overline{(\bar{e})} = \bar{e}$.

Die Abbildung $x \to \bar{\bar{x}}$ stimmt also mit dem identischen Automorphismus überein, d.h. $x \to \bar{x}$ ist ein involutorischer Automorphismus. Für einen beliebigen Automorphismus h von $(K, +)$ gilt also

$$h(x) = \begin{cases} h(e) \circ x, & \text{wenn} \quad x \in H_1 \\ h(\bar{e}) \circ \bar{x}, & \text{wenn} \quad x \in H_2. \end{cases}$$

Nun sei $x \in H_2$ fest gewählt, $x \neq 0$. Wir suchen ein Element $y \in H_1$ so, daß $x + y \in H_1$ gilt; diese Wahl ist möglich; denn wird K durch a kompakt abgeschlossen, so ist a Adhärenzpunkt von $x + H_1$, und $x + H_1$ enthält das

Element 0. Dann gilt aber $h(x+y)=h(x)+h(y)=h(\bar{e})\circ\bar{x}+h(e)\circ y$. Andrerseits gilt aber unter Benutzung des linksdistributiven Gesetzes $h(x+y)=h(e)\circ(x+y)=h(e)\circ x+h(e)\circ y$, woraus unmittelbar $h(\bar{e})\circ\bar{x}=h(e)\circ x$ folgt. Für jeden Automorphismus h von $(K,+)$ gilt also $h(x)=h(e)\circ x$ für alle $x\in K$.

Die Abbildung $x\to a\circ(b\circ x)$ ist für alle a und b aus $K-\{0\}$ ein Automorphismus von $(K,+)$ und hat die Form $x\to a\circ(b\circ x)=(a\circ b)\circ x$. Dies besagt aber gerade, daß $(K-\{0\},\circ)$ assoziativ ist. Unter diesen Umständen folgt aber in der Tat aus $K-\{0\}=A\circ K'$ die Isomorphie von $(K-\{0\},\circ)$ mit der multiplikativen Gruppe des Körpers der reellen Zahlen, denn $A\circ K'$ ist ein direktes Produkt abelscher Gruppen und ist daher selbst eine abelsche Gruppe. $x\to\bar{e}\circ x\circ\bar{e}$ ist nämlich ein Automorphismus von K', ist also von der Form $x\to s^{-1}(s(x)^\alpha)$, ($x\to s(x)$ wie in (2.2), $\alpha\neq 0$ reell). Für $x\in K'$ gilt dann $\bar{x}\circ\bar{x}=\bar{e}\circ x\circ\bar{e}\circ x=s^{-1}(s(x)^\alpha)\circ x$ oder $s(\bar{x}\circ\bar{x})=s(x)^\alpha s(x)$. Genau dann gilt $\bar{x}\circ\bar{x}=e$, wenn $1=s(x)^\alpha s(x)$, d.h. wenn $\alpha=-1$ oder $x=e$. Da $x\to\bar{x}\circ\bar{x}$ die Gruppe K' wegen $\lim\limits_{x\to 0}\bar{x}\circ\bar{x}=0$ nicht auf e abbildet scheidet $\alpha=-1$ aus. $A=(e,\bar{e})$ ist daher die einzige Untergruppe von $A\circ K'$ mit der Ordnung 2 und ist daher normal. Zur Konstruktion von $\bar{e}$ und um $\alpha=-1$ auszuscheiden, war kein Distributivgesetz erforderlich.

(2.4) *Ist $(K,+,\circ)$ sogar $+-$ potenzassoziativ, so ist K isomorph zum Körper der reellen Zahlen.*

BEWEIS. $(K,+)$ ist isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen [II, (6.4)]. Die multiplikative Struktur $(K-\{0\},\circ)$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe des Körpers der reellen Zahlen (2.3)]; und K ist infolge der Kommutativität der Multiplikation distributiv. f sei ein Isomorphismus von $(R,+)$ auf K mit $f(1)=e$. Dann gilt $f(a)\cdot f(b)=f\big(m(a,b)\big)$ mit $m(a,b)=m(b,a)$ und $f\big(m(a,b+c)\big)=f(a)\cdot f(b+c)=f(a)\cdot\big(f(b)+f(c)\big)=f(a)\cdot f(b)+f(a)\cdot f(c)=f\big(m(a,b)\big)+f\big(m(a,c)\big)=f\big(m(a,b)+m(a,c)\big)$; die Abbildung $(a,b)\to m(a,b)$ genügt also der Funktionalgleichung $m(a+b,c)=m(a,c)+m(b,c)$. Aus $m(a,b)=0$ folgt $a=0$ oder $b=0$ und umgekehrt. $r\to m(r,s)$ ist somit ein Isomorphismus von $(R,+)$ in sich und hat die Form $m(r,s)=p(s)\cdot r$. Ebenso schließt man $m(r,s)=q(r)\cdot s$, woraus dann $m(r,s)=c.\ rs$ folgt mit einer Konstanten c.

Wegen $f(1)f(1)=f(1)$ gilt $m(1,1)=c.\ 1.1=1$, also $c=1$. Wir haben damit die Gültigkeit der Funktionalgleichung $f(a)f(b)=f(ab)$ nachgewiesen und damit den Beweis vollendet.

(2.5) *Es gibt eine distributive in beiden Verknüpfungen kommutative Doppelloop, die zu R homöomorph ist, und deren multiplikative Loop der multiplikativen Gruppe des Körpers der reellen Zahlen isomorph ist.*

BEWEIS. Man nehme den Körper der reellen Zahlen und darin als Addition die in II, (6.3) benützte Verknüpfung

$$x\wedge y=\begin{cases} x+y\ , & \text{falls } xy\geqq 0,\\ \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\ , & \text{falls } xy<0.\end{cases}$$

$(R,\wedge,.)$ ist distributiv.

Zusammenfassend formulieren wir folgenden SATZ:

(2.6) *Die Multiplikationsloop einer linksdistributiven, additiv monassoziativen, lokal zu einem reellen Intervall homöomorphen Doppelloop ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen. Ihre Additionsloop braucht nicht assoziativ zu sein, sie ist dann assoziativ, wenn sie wenigstens potenzassoziativ vorausgesetzt wird.*

ANMERKUNGEN. Bei den Sätzen (2.2) und (2.3) ist bemerkenswert, daß abgesehen von der Koppelung der Addition und Multiplikation durch das Distributivgesetz über die Multiplikation nichts vorausgesetzt wurde, daß aber gerade über die Multiplikation voller Aufschluß erzielt wurde, während die Information über die Addition trotz der über sie gemachten Voraussetzungen unvollkommen bleiben mußte. Diese Erscheinung werden wir noch öfters antreffen. Diese Sätze bleiben auch richtig, wenn $(K, +, 0)$ nur als ringartige Struktur vorausgesetzt wird. (2.5) ist ein einfaches Beispiel eines kommutativen Neokörpers (s. z.B. [3]). Das Hauptergebnis dieses Paragraphen könnten wir auch in folgender Form angeben: Jede zu R lokal homöomorphe, linksdistributive ringartige topologische Struktur mit monassoziativer Addition ist ein Neokörper mit reeller Multiplikationsgruppe. SALZMANN beweist in [4], daß die multiplikative Gruppe eines zu R homöomorphen Neokörpers zur multiplikativen Gruppe von R isomorph ist, setzt dabei freilich die Assoziativität der multiplikativen Loop schon voraus.

§ 3. Die Charakteristik ringartiger Strukturen

(3.1) Wir sagen, eine nullteilerfreie ringartige Struktur $(K, +, .)$ habe die *Charakteristik* n, wenn sie $+$-potenzassoziativ und linksdistributiv ist, und wenn n die kleinste natürliche Zahl bezeichnet, so daß $n \cdot e = (e + \cdots + e) = 0$, falls eine solche existiert; andernfalls sei $n = 0$. Die von den Vielfachen von e gebildete Untermenge P ist ein Unterring von K, der zum Ring der ganzen Zahlen modulo n isomorph ist. In der Tat ist $(n \cdot e)(m \cdot e) = m \cdot (n \cdot e) = nm \cdot e$. In einer Doppelloop ist die Charakteristik n eine Primzahl p und es gilt $p \cdot a = 0$ für alle $a \in K$. Hier ist P isomorph dem Primkörper der Charakteristik p. Für alle $a \in P$ und alle $(y, z) \in K \times K$ gilt $y(za) = y(m \cdot z) = m \cdot (yz) = (yz) \cdot a$. Ist K sogar distributiv, so gilt auf Grund desselben Prinzips mit einer gewissen natürlichen Zahl m auch $(yz)a = y(za) = y(m \cdot z) = y(az) = (m \cdot y)z = (a \cdot y) \cdot z = m \cdot (yz) = a(yz)$, d.h. P liegt im Zentrum von $(K - \{0\}, .)$.

(3.2) *K sei eine linksdistributive Doppelloop endlicher Charakteristik. Dann ist K diskret oder $\mathfrak{U}(0)$ besitzt eine Basis aus Umgebungen, die Vereinigung von zyklischen $+$-Untergruppen sind.*

BEWEIS. Aus $ya = zb$ [wobei $(y, z) \in K \times K$, $(a, b) \in P \times P$, $a \neq 0$, $b \neq 0$] folgt nach dem eben Bewiesenen stets $y = zc$ mit $c = ba^{-1} \in P$. Es gibt also eine natürliche Zahl n $(0 \leqq n < p)$, so daß $y = n \cdot z$. Ist $n \neq 0$, so existiert ein m $(0 \leqq m < p)$, so daß $mn \equiv 1$ (p); d.h. es gilt $m \cdot y = z$. Ist $\mathrm{nun}(y_i)_{i \in I}$ ein gegen 0 konvergierendes Netz mit $y_i \neq 0$, so gilt $\lim_{i \in I} z_i = 0$ für alle Netze $(z_i)_{i \in I}$ derart, daß $z_i \in y_i P$. Denn für jede Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ und für jedes n $(n = 0, \ldots p-1)$ gibt es ein $i_n \in I$ derart, daß $n \cdot y_i U$ für $i > i_n$. Nun wähle man $i' = \max(i_0, i_1, \ldots i_{p-1})$. Dann liegen alle Elemente $m \cdot y_i$ $(m = 0, \ldots, p-1$, $i > i')$ in U. Wegen $z_i = n_i \cdot y_i$ $(n_i = 0, \ldots, p-1)$ ist dies die Behauptung. Ist U also eine fest vorgegebene Umgebung, so gibt es eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(0)$,

so daß für alle $W \subseteqq V$ stets $WP \subseteqq U$ gilt. Die Menge $\{WP; W \in \mathfrak{U}(0)\}$ bildet also eine Basis von $\mathfrak{U}(0)$.

(3.3) *$(K, +, .)$ sei eine nicht diskrete lokalkompakte linksdistributive nullteilerfreie ringartige Struktur. $(K, +)$ sei potenzassoziativ und eudoxisch* [II, 1.3)]. *Ist nun K +-alternativ lokal euklidisch oder aber eine Doppelloop, so hat K ein zusammenhängendes offenes Ideal H* (welches natürlich im zweiten Fall mit K übereinstimmt), *in welchem jeder Punkt auf einer +-Einparametergruppe isomorph zu R liegt.*

BEWEIS. K hat keine endliche von 0 verschiedene Charakteristik [(3.2)] und ist nicht totalunzusammenhängend [II, (1.4)]. Es sei U eine offene Umgebung von 0, die frei ist von nichttrivialen +-Untergruppen. Der Punkt x sei im Innern von U gelegen, und es sei $n \cdot x$ in U enthalten. In $\mathfrak{U}(e)$ gibt es eine Umgebung W, für die $n \cdot (xW) \subseteqq U$. Es sei $n \cdot x = n \cdot y$ mit $y \in xW$; dann gilt ja $n \cdot x = x(n \cdot e) = x(n \cdot w)$ mit einem $w \in W$ oder $0 = x \cdot (n \cdot w) + x((-n) \cdot e) = x \cdot (n \cdot w - n \cdot e) = 0$, woraus wegen der Nullteilerfreiheit $n \cdot (w - e) = 0$, oder wegen der nicht endlichen Charakteristik $w = e$ und $x = y$ folgt. Ist nun K lokal euklidisch und +-alternativ, so ist $(K, +)$ potenzoffen [II, (5.7)]. Dann liegt nach II, (5.6) jeder Punkt in U auf einer +-Einparametergruppe. Einfacher liegt der Fall, wenn K eine Doppelloop ist: Es existiert wenigstens eine +-Einparametergruppe in $(K, +)$ [II, (5.1)], zu ihr gehöre der stetige algebraische Isomorphismus f von R in K. Es liege etwa der Punkt a auf ihr. Dann liegt der beliebige Punkt b auf der +-Einparametergruppe, die durch den stetigen algebraischen Isomorphismus $r \to (b/a) f(r)$ von R in K definiert ist.

(3.4)* *$(K, +, .)$ erfülle die Voraussetzungen von* (3.3) *und sei darüber hinaus distributiv und zusammenhängend. Bezeichnet man mit f den stetigen algebraischen Isomorphismus von R in K, der 1 auf e abbildet, so liegt $f(R)$ im Zentrum von $(K, .)$ und ist insbesondere isomorph zum Körper der reellen Zahlen.*

BEWEIS. Wir beweisen zunächst unter ausschließlicher Benützung der Linksdistributivität, daß $f(R)$ dem Körper der reellen Zahlen isomorph ist. Es seien $s = q^{-1}p_1$ und $t = q^{-1}p_2$ rationale Zahlen. Dann gilt $f(s)f(t) = (p_1 \cdot f(1/q))(p_2 \cdot f(1/q)) = p_1 p_2 \cdot f(1/q) = f(q^{-1}p_1 p_2)$. f ist also ein Isomorphismus des Körpers der rationalen Zahlen in $f(R)$ und hat als stetige Fortsetzung einen Isomorphismus des Körpers R auf $f(R)$.

Ist nun K distributiv, so ist $f(r)a$ mit $a \neq 0$ eine +-Einparametergruppe. Die durch die Isomorphismen $s \to (ab)f(s)$, $s \to a(bf(s))$, $s \to a(f(s)b)$, $s \to (af(s))b$ $s \to (f(s)a)b$ und $s \to f(s)(ab)$ definierten +-Einparametergruppen laufen sämtlich durch ab und stimmen daher überein, wie man auf Grund der Nullteilerfreiheit leicht einsieht. Damit liegt aber $f(R)$ in der Tat im Zentrum von $(K, .)$. In Zukunft schreiben wir statt $xf(r)$ stets $r \cdot x$ und statt $r \cdot e$ nur r (sog. Ersetzungsverfahren).

(3.5) *$(K, +, .)$ sei eine lokalkompakte zusammenhängende, distributive nullteilerfreie ringartige Struktur; $(K, +)$ sei potenzassoziativ und eudoxisch. Ist*

K lokal euklidisch und $+$-alternativ oder aber eine Doppelloop, so bildet $(K, +)$ zusammen mit der Abbildung $(r, x) \to r \cdot x$ von $R \times K$ in K einen Fastvektorraum.

BEWEIS. Der Beweis ist auf Grund der Definition in II, (8.1) und der in der letzten Nummer bewiesenen Tatsachen trivial.

(3.6) SATZ: *$(K, +, .)$ sei eine lokalkompakte zusammenhängende, distributive nullteilerfreie ringartige Struktur. $(K, +)$ sei eine eudoxische Moufangloop. Ist K lokal euklidisch oder eine Doppelloop, dann ist K eine (möglicherweise nicht assoziative) Algebra endlichen Ranges über dem Körper der reellen Zahlen.* (Unter einer Algebra ist dabei eine Algebra im klassischen Sinne verstanden, ausgenommen, daß vielleicht $(K - \{0\}, .)$ nicht assoziativ ist).

BEWEIS. (3.5) und II, (8.17).

(3.7) SATZ: *$(K, +, .)$ sei eine lokalkompakte, distributive Doppelloop. $(K, +)$ sei eine eudoxische Moufangloop und $(K - \{0\}, .)$ sei eine I-Loop. Dann ist K isomorph entweder zum Körper der reellen Zahlen, zum Körper der komplexen Zahlen, zum Schiefkörper der Quaterionen über dem Körper der reellen Zahlen oder aber zur Cayley-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen.*

BEWEIS. Aus dem vorangehenden Absatz und der zusätzlichen Voraussetzung der Kürzbarkeit der Multiplikation [d.h. der I-Loopeigenschaft von I, (1.4)] folgt, daß K ein Alternativkörper endlichen Ranges über dem Körper der reellen Zahlen ist. Daraus folgt die Behauptung (vgl. z. B. PICKERT [3], Kap. 6).

ANMERKUNGEN. Der Satz (3.7) ist eine Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von Pontrjagin, der besagt, daß jeder lokalkompakte zusammenhängende Schiefkörper einem Unterkörper eines reellen Quaternionenschiefkörpers isomorph ist. Die additive Gruppe eines lokalkompakten zusammenhängenden Schiefkörpers ist eine zusammenhängende nicht kompakte abelsche Gruppe ohne kompakte Untergruppen und ist also ein n-dimensionaler Vektorraum und damit eudoxisch. Das Ergebnis von (3.6) für ringartige Strukturen benötigte die nicht ganz einfache Satzgruppe II, (5.6) und (5.7).

§ 4. Über die multiplikative Struktur ringartiger Strukturen und einige Kennzeichnungen des Körpers der komplexen Zahlen

(4.1) $(K, +, .)$ sei eine lokalkompakte zusammenhängende distributive nullteilerfreie ringartige Struktur. $(K, +)$ sei eine eudoxische potenzassoziative Loop; ferner sei K lokal euklidisch und $+$-alternativ oder aber eine Doppelloop. Bezeichnen wir wiederum mit f den Isomorphismus von R in K derart, daß $f(1) = e$ und nennen wir L die multiplikative Gruppe $f(R_+ - \{0\})$, so kann ein Restklassenraum $(K - \{0\})/L$ auf $K - \{0\}$ definiert werden. Auf $(K - \{0\})/L$ läßt sich eine Verknüpfung einführen, bezüglich der dieser Restklassenraum eine kompakte topologisch-algebraische Struktur bildet, die homomorphes Bild von $(K - \{0\}, .)$ ist. (Im Falle einer Doppelloop ist letzteres trivial.)

BEWEIS. Die Menge $M = \{xL;\ x \in K - \{0\}\}$ besteht aus Teilmengen xL von $K - \{0\}$; jeder Punkt x von $K - \{0\}$ liegt in wenigstens einer dieser Mengen nämlich in xL; andererseits haben zwei verschiedene Mengen xL und zL leeren Durchschnitt (andernfalls gäbe es ein $u \in K - \{0\}$ mit $u = r \cdot x = s \cdot z$,

woraus $x = r^{-1}s \cdot z$ und $xL = zL$ folgen würde). M definiert also eine Äquivalenzrelation auf $K - \{0\}$; den Restklassenraum in der Quotiententopologie bezeichnen wir mit $(K - \{0\})/L$. Auf diesem läßt sich die Verknüpfung $(xL, yL) \to xL \circ yL = xy \cdot L$ definieren. Wegen $(r \cdot x)(s \cdot y) = rs \cdot xy$ gilt nämlich $xL \circ yL = uL \circ vL$ für alle $u \in xL$ und $v \in yL$, und die Abbildung $x \to xL$ ist ein Homomorphismus von $(K - \{0\}, .)$ auf $(K - \{0\})/L$. Nun sei $W \in \mathfrak{U}(0)$ eine kompakte Umgebung von 0. Dann ist $W + W$ ebenfalls eine kompakte Umgebung von 0. Es kann nicht $W = W + W$ für alle kompakten $W \in \mathfrak{U}(0)$ gelten, denn $(K, +)$ ist lokal einfach. Es sei also $W + W \neq W$. Ist V das Innere von W, so ist $(W + W) - V$ ein kompakter Teilraum von $(K - \{0\})$. Zu jedem xL gibt es ein u, so daß $u \in V$, aber nicht $2 \cdot u \in V$ richtig ist (denn $r \to r \cdot x$ ist ein Isomorphismus von $(R_+, +)$ auf $xL \cup \{0\}$). Andererseits ist $2 \cdot u \in V + V \subseteq W + W$; d.h. $xL \cap (W + W) - V$ ist nicht leer. Da $x \to xL$ eine stetige Abbildung von $(W + W) - V$ auf $(K - \{0\})/L$ darstellt, ist $(K - \{0\})/L$ in der Tat kompakt.

(4.2) Ist $(K, +, .)$ eine Doppelloop und erfüllt die Voraussetzungen von (4.1) und ist $(K - \{0\}, .)$ ein multiplikativ geschriebener Fastvektorraum (d.h. eine eudoxische zusammenhängende, lokalalternative, kommutative Loop), so ist $(K - \{0\})/L$ isomorph einer Torusgruppe T^n.

BEWEIS. Der Satz II, (8.19) beweist, daß $(K - \{0\}, .)$ direktes Produkt eines zentralen kompakten Normalteilers isomorph einer Torusgruppe T^n und einem Fastvektorraum L' ist. Denn L ist ein (multiplikativ geschriebener) Untervektorraum von $(K - \{0\}, .)$; die Faktorloop $(K - \{0\})/L$ nach diesem ist kompakt; daraus folgt aber $L = L'$ und die Behauptung.

Wir haben darüber hinaus sogar bewiesen, daß die multiplikative Loop $(K - \{0\}, .)$ eine Gruppe ist. *K ist also ein Neokörper.*

(4.3) Kommt zu den Voraussetzungen von (4.2) noch hinzu, daß $(K, +)$ eine Moufangloop ist, so ist $(K, +, .)$ isomorph dem Körper der reellen Zahlen oder dem Körper der komplexen Zahlen. Der Satz bleibt richtig, wenn $(K, +)$ alternativ vorausgesetzt wird.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus dem Satz (3.7) und der Tatsache, daß $(K - \{0\}, .)$ eine abelsche Gruppe ist.

Wir geben für diesen Satz im folgenden einen unabhängigen Beweis, der die komplizierte Kennzeichnung der Alternativkörper nicht benötigt, und der außerdem nur die Alternativität der Addition benützt.

Nach (3.6) ist $(K, +)$ isomorph einem Vektorraum R^n. $(K - \{0\})/L$ ist nach BOURBAKI [1], Chap. VI, § 2 no. 3 homöomorph einer m-Sphäre und andererseits homöomorph einem n-dimensionalen Torus T^n. Dann ist aber notwendig $n = 1$ und $m = 2$. Nun sei $r \to \tilde{e}(r)$ der Isomorphismus der Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 auf die Torusgruppe $(K - \{0\})/L$. $(K - \{0\}, .)$ ist das direkte Produkt eines kompakten Normalteilers C isomorph der Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 und der Gruppe L isomorph zur multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen. Bezeichnen wir mit $r \to e(r)$ den Isomorphismus der Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 auf C, so gilt $\tilde{e}(r) = e(r)L$.

Es steht nun fest, daß $(K-\{0\},.)$ der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorph ist, wobei wir stillschweigend vorausgesetzt haben, daß $(K-\{0\})/L$ aus mehr als einem Punkt besteht. (Andernfalls folgt sofort die Isomorphie von K zum Körper der reellen Zahlen.)

Nun sei K^* der Körper der komplexen Zahlen. Die Abbildung w, die einem Element $re(s)$ von K mit $r \neq 0$ die komplexe Zahl $re^{2\pi is}$ und dem Element $0 \in K$ die Zahl 0 zuordnet ist ein Homöomorphismus von K auf K^*, der die Multiplikation isomorph überträgt. Wegen $e(\frac{1}{2})^2 = e$ und $(-e)^2 = e$ (also wegen $e(\frac{1}{2}) = -e$) gilt für alle reellen Zahlenpaare (a, b) und (a', b') die Gleichung $(a \cdot e + b \cdot e(\frac{1}{4}))\,(a' \cdot e + b' \cdot e(\frac{1}{4})) = aa' \cdot e + ab' \cdot e(\frac{1}{4}) + ba' \cdot e(\frac{1}{4}) + bb' \cdot e(\frac{1}{2}) = (aa' - bb') \cdot e + (ab' + ba') \cdot e(\frac{1}{4})$, denn infolge der Alternativität von $(K, +)$ erzeugen e und $e(\frac{1}{4})$ gemäß II, (8.3) einen Untervektorraum und außerdem waren beide Distributivgesetze vorausgesetzt. Die Abbildung $f = (a + bi \to a \cdot e + b \cdot e(\frac{1}{4}))$ ist also ein Homomorphismus und daher ein Isomorphismus von K^* in $(K, +, .)$. Die Abbildung $w^{-1} \circ f$ ist ein Isomorphismus der multiplikativen Struktur des Körpers der komplexen Zahlen in sich. Eine abelsche Gruppe, die zur multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen isomorph ist, besitzt außer ihren Automorphismen keine Isomorphismen in sich. Also ist $w^{-1} \circ f$ einer Abbildung von K^* auf sich, und f ist ein Isomorphismus von K^* auf K.

Diesen Beweisgang bauen wir aus zu folgendem Satz:

(4.4) *$(K, +, .)$ sei eine Doppelloop, die den Voraussetzungen von* (4.1) *genügt. Dann ist jeder eindimensionalen Torusgruppe von $(K-\{0\})/L$ als Urbild eine Untergruppe von $(K-\{0\},.)$ zugeordnet, die der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorph ist.*

Beweis. $r \to \tilde{e}(r)$ sei ein Isomorphismus der Gruppe T der reellen Zahlen modulo 1 in $(K-\{0\})/L$. Das Urbild von $\tilde{e}(T)$ in $K-\{0\}$ bei dem Homomorphismus $x \to xL$ sei A. Nach II, (7.6) ist $A = C'L$ mit einer Einparametergruppe C'. Der Durchschnitt $C' \cap L$ ist eine diskrete zyklische Untergruppe von L, die etwa von r erzeugt sei. Ist $s \to f(s)$ ein Homomorphismus von R auf C' und ist $f(1) = r \cdot e$, so ist $s \to e(s) = e^{-s \cdot \ln r} \cdot f(s)$ ein Homomorphismus von R in A mit $e(1) = e$. Die Einparametergruppe $e(R) = C$ ist also ein isomorphes Bild von T und es gilt $A = CL$. Da L im Zentrum von A liegt und $C \cap L = \{e\}$ ist, ist A dem direkten Produkt von C und L isomorph.

Da die Addition nicht notwendig eine Gruppe bildet, ist der letzte, auf die Addition bezügliche Teil des Beweises (4.3) nicht anwendbar.

(4.5) *$(K, +, .)$ sei eine Doppelloop, die den Voraussetzungen von* (4.1) *genügt. Darüber hinaus sei $(K, +)$ alternativ. Dann ist jeder eindimensionalen Torusgruppe von $(K-\{0\})/L$ ein Unterkörper von K zugeordnet, der dem Körper der komplexen Zahlen isomorph ist.*

Beweis. $(K, +)$ ist ein kommutativer alternativer Fastvektorraum [II, (8.5)]. Jeder eindimensionalen Torusgruppe von $(K-\{0\})/L$ ist eine der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorphe Gruppe in $(K^*-\{0\},.)$ zugeordnet. $re^{2\pi i \cdot s} \to r \cdot e(s)$ sei der zugehörige Isomorphismus

von $K^* - \{0\}$ in $K - \{0\}$. Da die Elemente e und $e(\frac{1}{4})$ in K nach II, (8.3) einen nach dem Beweis von (4.3) multiplikativ abgeschlossenen Untervektorraum erzeugen, gilt also dann auch der letzte, die Addition betreffende Teil des Beweises von (4.3), woraus die Behauptung folgt.

(4.6) *$(K, +, .)$ sei eine nicht diskrete lokalkompakte distributive Doppelloop; $(K, +)$ sei eine lokal einfache potenzassoziative Loop, $(K - \{0\}, .)$ sei ein lokaler Fastvektorraum (d.h. eine eudoxische zusammenhängende lokalalternative kommutative Loop). Dann ist $(K - \{0\})$ isomorph der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen. Ist $(K, +)$ sogar alternativ, so ist K isomorph zum Körper der komplexen Zahlen.*

BEWEIS. $(K - \{0\}, .)$ ist isomorph dem direkten Produkt einer n-dimensionalen Torusgruppe mit L. Wir müssen $n = 1$ beweisen. Jedes Element $x \in K$ $(x \neq 0)$ besitzt genau eine Darstellung der Form $r \cdot e_1(s_1) \dots e_n(s_n)$ mit n verschiedenen Isomorphismen der Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 in $(K - \{0\}, .)$. Die Abbildung $g = (x \to (r, s_1, \dots, s_n))$ ist eine eineindeutige stetige und offene Abbildung von $K - \{0\}$ auf $(R_+ - \{0\}) \times T^n$. K ist lokal euklidisch $(n+1)$-dimensional, denn e besitzt eine zu einem Quader homöomorphe Umgebung $\{y;\ y = g(r, s_1, \dots, s_n),\ 0 < 1 - a < r < 1 + a,\ -\frac{1}{2}a < s_m < \frac{1}{2}a,\ m = 1, \dots, n\}$. Jeder Punkt x von K besitzt also eine Basis aus Umgebungen W derart, daß $W - \{x\}$ für $n > 1$ einfach kurvenzusammenhängend ist. Nun hat aber jede Umgebung W des Punktes 0 die Eigenschaft ‚daß $W - \{0\}$ stets einen Teilraum der Form $B_a = \{g^{-1}(r, s_1, \dots, s_n);\ 0 < r < a,\ s_m \in T,\ m = 1, \dots, n\}$ enthält, denn zu jedem offenen $W \in \mathfrak{U}(0)$ existiert ein reelles r so, daß $r \cdot x \in W$ für alle $x \in g^{-1}(1, T^n)$, denn die Mengen $g^{-1}(]0, r], T^n) \cup \{0\}$ $(r \neq 0)$ bilden eine Umgebungsbasis für 0. Andernfalls gäbe es nämlich ein $W \in \mathfrak{U}(0)$ ‚so daß zu jedem natürlichen l ein n-tupel $s^{(l)} = (s_1^{(l)}, \dots, s_n^{(l)})$ existieren würde, für welches $g^{-1}(a_l, s_1^{(l)}, \dots, s_n^{(l)}) \notin W$, wobei die Folge a_l gegen 0 konvergiert, wenn l gegen unendlich strebt. Ist $\bar{s} = (\overline{s_1}, \dots, \overline{s_n})$ der Limes einer Teilfolge $s^{(l_i)}$, so würde $0 = \lim_{l_i \to \infty} g^{-1}(a_{l_i}, s_1^{(l_i)}, \dots, s_n^{(l_i)})$ nicht im Innern von W liegen, was offenbar nicht möglich ist. Jede Umgebung von 0 der Form $g^{-1}(]0, r], T^n \cup \{0\}$ ist so beschaffen, daß für $n > 1$ der Raum $g^{-1}(]0, r], T^n)$ nicht einfach kurvenzusammenhängend ist. Andererseits müßte er für n größer als 1 einfach kurvenzusammenhängend sein oder wenigstens einen offenen einfach kurvenzusammenhängenden Teilraum der Form $W - \{0\}$ enthalten, wo W eine Umgebung von 0 wäre. Dieser Widerspruch beweist, daß $n = 1$ sein muß.

Besteht nun $(K - \{0\})/L$ nicht nur aus einem Punkt, was wir in der Formulierung des Satzes stillschweigend angenommen haben, so folgt daraus die Behauptung.

(4.7) *$(K, +, .)$ sei eine lokal euklidisch zweidimensionale distributive nullteilerfreie ringartige Struktur. $(K, +)$ sei potenzassoziativ und eudoxisch. $(K - \{0\})/L$ sei monassoziativ und die Rechtstranslationen in dieser Struktur seien eineindeutig; diese Voraussetzungen sind insbesondere erfüllt, wenn $(K - \{0\}, .)$ lokal monassoziativ ist und eineindeutige Rechtstranslationen besitzt. Entweder sei $(K, +)$ sogar alternativ oder K eine Doppelloop.*

Dann ist $(K-\{0\},.)$ *isomorph der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen.*

BEWEIS. Nach den bisher bewiesenen Sätzen haben wir festzustellen, daß $(K-\{0\})/L$ einer eindimensionalen Torusgruppe isomorph ist. Wegen dem in II, (6.4) niedergelegten Ergebnis wird es unter den angegebenen Voraussetzungen genügen, nachzuweisen, daß der topologische Raum $(K-\{0\})/L$ eine Jordan-Kurve ist.

Es sei $K\cup\{a\}$ die Einpunktkompaktifizierung von K, dann ist dieser Raum wegen der in (1.5) bewiesenen Homogenitätseigenschaft eine zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit. Diese hat die Eigenschaft nach der Entfernung eines Punktes noch einfach zusammenhängend zu sein. Sie ist dann notwendig homöomorph zu einer Kugeloberfläche, denn allen anderen zweidimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten kommt diese Eigenschaft nicht zu. Für alle x ist $xL\cup\{0\}\cup\{a\}$ ein Jordan-Bogen, der 0 mit a verbindet, denn $R_+\cdot x=xL\cup\{0\}$ ist homöomorphes Bild von R_+ und es gilt ja $\lim_{r\to\infty} r\cdot x=a$. Sind nun xL und yL zwei verschiedene Punkte von $(K-\{0\})/L$, so ist $xL\cap yL=\emptyset$ und $xL\cup yL\cup\{0\}\cup\{a\}$ ist eine Jordan-Kurve auf $K\cup\{a\}$. Die Menge $(K-\{0\})\cap(xL\cup yL)^c$ besteht aus genau zwei Komponenten A_1 und A_2 mit der Eigenschaft, daß aus $z\in A_n$ auch $zL=A_n$ folgt; denn wäre z.B. $z\in A_1$ und $z'\in A_2$ mit $z=l\cdot z'$ $(l\in L)$, so enthielte zL einen zu $[0,1]$ homöomorphen Kurvenbogen mit den Endpunkten z und z'; dieser hätte jedoch mit $xL\cup yL\cup\{0\}\cup\{a\}$ wenigstens einen Punkt gemeinsam; denn eine Jordan-Kurve zerlegt die Kugel in genau zwei Gebiete, und z und z' liegen in verschiedenen Gebieten. Dieser gemeinsame Punkt ist andrerseits von $\{0\}$ und $\{a\}$ verschieden, denn weder 0 noch a ist ein innerer Punkt von zL. Dann wäre also z.B. $zL\cap xL\neq\emptyset$, woraus dann $zL=xL$ oder $z\in xL$ folgen würde im Widerspruch dazu, daß $z\in A_n$ und somit $z\notin xL\cup yL$ angenommen war.

Die Menge $(K-\{0\})/L-\{xL\}\cup\{yL\}$ hat also die zwei verschiedenen Komponenten, die bei der Abbildung $h=(x\to xL)$ aus A_1 und A_2 entstehen, denn aus $zL\in h(A_1)\cap h(A_2)$ würde die Existenz von zwei Elementen l_1 und l_2 in L folgen, für die $zl_1\in A_1$ und $zl_2\in A_2$ gelten würde, was aber unmöglich ist. Jedes Punktepaar in $(K-\{0\})/L$ trennt $(K-\{0\})/L$ in einen nicht zusammenhängenden Raum mit genau zwei Komponenten auf; daraus folgt aber, daß $(K-\{0\})/L$ einem eindimensionalen Torus homöomorph ist (Satz von R. L. MOORE, vgl. C. KURATOWSKI [2], Topologie II, S. 120).

Man kann das Ergebnis dieser Nummer in etwas speziellerer Form auch so formulieren:

SATZ: *Alle lokal euklidisch zweidimensionalen, distributiven nullteilerfreien ringartigen Strukturen mit potenzassoziativer eudoxischer Addition und Multiplikation sind Neokörper mit einer zur Gruppe der Multiplikation im Körper der komplexen Zahlen isomorphen Multiplikationsgruppe, wenn sie sogar alternative Addition haben oder Doppelloops sind. Im alternativen Fall ist K isomorph zum Körper der komplexen Zahlen (vgl.* (4.5)*).*

(4.8) Unter den Bedingungen von (4.7) gibt es einen Homöomorphismus von K auf den Körper der komplexen Zahlen, nämlich den Isomorphismus der multiplikativen Gruppe von K auf die multiplikative Gruppe von K^*, dem Körper der komplexen Zahlen, der durch die Festsetzung auf ganz K ausgedehnt wird, daß dem Punkt 0 in K der Punkt 0 in K^* zugeordnet wird. Dieser Homöomorphismus heiße w.

Nun definieren wir eine Verknüpfung in K durch die Definition $(x, y) \to x \circ y = w\big(w^{-1}(x) + w^{-1}(y)\big)$; $(K, \circ)$ ist dann isomorph zu $(K, +)$. Die Abbildung w kann man in der Form $w(x) = r(x)\, e^{2\pi i \cdot s(x)}$ angeben, wobei $r(x)$ und $s(x)$ durch $x = r(x) \cdot e\big(s(x)\big)$ definiert sind mit einem Isomorphismus $s \to e(s)$ der Gruppe der reellen Zahlen modulo eins in $(K - \{0\}, .)$. Gilt nun für zwei Elemente x und y aus K die Gleichung $p\,x = q\,y$ mit reellen Zahlen p und q, so ist $\arc x = \arc y$ und $w^{-1}(x) + w^{-1}(y) = |x| \cdot e(\arc x) + |y| \cdot e(\arc y) = (|x| + |y|) \cdot e(\arc x) = w^{-1}(x + y)$; unter diesen Bedingungen gilt also $x \circ y = x + y$. Außerdem folgt aus dem distributiven Gesetz wegen der Isomorphie von $(K, \circ, .)$ und $(K, +, .)$ die Identität $(x \circ y)z = xz \circ yz$. Setzt man nun allgemein

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = -y, \\ \dfrac{x \circ y}{x + y}, & \text{wenn } x \neq -y, \end{cases}$$

so folgt

a) $f(x, y) = 1$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$, oder wenn xy^{-1} oder yx^{-1} reell ist.

b) $(x \circ y)z = (x + y)f(x, y)z = (xz + yz)f(x, y) = (xz + yz)f(xz, yz)$ oder $f(xz, yz) = f(x, y)$; d.h. es gilt $f(x, y) = g(xy^{-1})$ (man braucht ja nur $z = y^{-1}$ zu setzen und bekommt dann $g(xy^{-1}) = f(xy^{-1}, 1)$). $z \to g(z)$ ist auf der vollen Zahlenkugel stetig außer vielleicht im Punkt $z = -1$, weil f auf ganz $K \times K - \{(x, -x);\ x \in K\}$ stetig ist. g ist auf dem vollen reellen Großkreis gleich eins. Da $x \circ y = u$ eindeutig nach x und nach y aufgelöst werden kann, muß dasselbe auch für die Gleichung $(x + y)g(xy^{-1}) = u$ gelten; d.h. die Abbildung $z \to (z + 1)g(z)$ muß eine eineindeutige Abbildung der Zahlenkugel auf sich darstellen.

Ist umgekehrt eine Funktion $z \to g(z)$ dieser Eigenschaft vorgegeben, so wird durch $x \circ y = (x + y)g(xy^{-1})$ eine Verknüpfung auf K definiert, so daß $(K, \circ, .)$ eine zweidimensionale Doppelloop darstellt, deren multiplikative Loop der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorph ist, und deren „Addition" $\circ$ monassoziativ ist.

Es besteht also eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge solcher Strukturen und der Menge aller Funktionen g mit den oben aufgezählten Eigenschaften.

Es ist klar, daß $(K, \circ, .)$ genau dann dem Körper der komplexen Zahlen isomorph ist, wenn $g(z)$ identisch gleich eins ist.

(4.9) *$(K, +, .)$ sei eine ringartige Struktur, die den Voraussetzungen von Satz (4.7) genügt. Der in (4.8) beschriebene Homöomorphismus w von K auf den Körper der komplexen Zahlen habe die zusätzliche Eigenschaft, daß $x \to x \circ 1$*

eine in einem reellen Punkt regulär analytische Abbildung ist. Dann ist K isomorph dem Körper der komplexen Zahlen.

BEWEIS. Die Abbildung $z \to z \circ 1 = (z+1)g(z)$ sei in dem reellen Punkt r regulär; sie stimmt dann auf einer sich gegen r häufende Punktmenge mit der regulären Funktion $z \to z+1$ überein und ist daher mit ihr identisch.

(4.10) *Es gibt einen lokal euklidisch zweidimensionalen Neokörper (also eine distributive Doppelloop mit assoziativer Multiplikation), dessen multiplikative Loop $(K-\{0\}, .)$ der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorph ist, der aber nicht zum Körper der komplexen Zahlen isomorph ist.*

BEWEIS. Wir suchen eine geeignete Verknüpfung $x \circ y = (x+y)g(xy^{-1})$, so daß $(K, \circ, .)$ die angegebenen Eigenschaften besitzt. $(K, \circ)$ ist genau dann kommutativ, wenn $g(z) = g(z^{-1})$ gilt. Wir setzen nun $g(z) = 1 + \frac{|y|\,\varepsilon}{x^2+y^2+1}$ mit $z = x+iy$ und einem noch näher zu bestimmenden ε mit $\frac{1}{2} \geqq \varepsilon > 0$. Dann ist g auf der ganzen Kugel stetig und es gilt

$$g(z^{-1}) = 1 + \frac{|y| \cdot \varepsilon}{z\bar{z}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z\bar{z}} + 1} = g(z).$$

Ferner ist $1 \leqq g(z) < 1+\varepsilon$; und $g(z) = 1$ gilt genau dann, wenn z reell ist. Wir haben nun noch nachzuweisen, daß $z \to (z+1)g(z)$ eine eineindeutige Abbildung der Zahlenkugel auf sich darstellt. Es sei also w ein Element der Zahlenkugel. Gilt nun $w = \infty$ oder $w = 0$, so wird $w = (1+z)g(z)$ nur durch $z = \infty$ bzw. durch $z = -1$ befriedigt. Also sei im folgenden stets $w = u + iv \neq 0$. Dann muß die Existenz einer und nur einer reellen Zahl $r \neq 0$ nachgewiesen werden, für die $w = r^{-1}(1+z)$ und $r^{-1} = g(z)$ erfüllt ist. Diese zwei Identitäten sind mit $r^{-1} = g(rw-1)$ gleichwertig. Nun gilt $0 \leqq g(rw-1) - 1 < \varepsilon$. Die Kurven $s_1 = \frac{1}{r} - 1$ und $s_2 = g(rw-1) - 1$ schneiden sich sicher im Intervall $\frac{1}{\varepsilon+1} \leqq r \leqq 1$ und sicher nicht außerhalb dieses Intervalls. Es ist nachzuprüfen, daß sie sich in diesem Intervall auch nur höchstens einmal schneiden. Man berechnet $\frac{ds_1}{dr} = -\frac{1}{r^2}$ und $\frac{ds_2}{dr} = \frac{\varepsilon|y|(2-|w|^2r^2)}{(|w|^2r^2 - 2rx + 2)^2}$ für $\frac{1}{\varepsilon+1} \leqq r \leqq 1$. Nun ist in diesem Intervall einerseits $\frac{ds_1}{dr} \leqq -1$ und andrerseits

$$\frac{ds_2}{dr} \geqq -\frac{\varepsilon|y|(\varepsilon+1)^4|w|^2}{\left(\left(x-\frac{1}{r}\right)^2 + r^{-2}y^2 + r^{-2}\right)^2} \geqq -\frac{\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right)^4|y||w|^2}{\left(\left(x-\frac{1}{r}\right)^2 + y^2 + 1\right)^2}$$

$$\geqq -\frac{|y||w|^2}{(a(x)^2+y^2+1)^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4, \quad \text{wo} \quad a(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{für } x \leqq 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leqq x \leqq \frac{3}{2} \\ \left(x-\frac{3}{2}\right) & \text{für } \frac{3}{2} \leqq x. \end{cases}$$

Es gilt

$$\frac{|y||w|^2}{(a(x)^2+y^2+1)^2} = \frac{|y||w|^2}{(|w|^2+1+a(x)^2-x^2)^2} = \frac{|y|}{|w|^2} \frac{1}{(1+(1+a(x)^2-x^2)|w|^{-2})^2},$$

und für $|w| \to \infty$ strebt $(1+a(x)^2-x^2)|w|^{-2}$ gegen null. Es gibt also eine positive reelle Zahl A derart, daß dieser Bruch für alle komplexen w stets unterhalb A liegt. Wählt man nun ε so, daß $\varepsilon < \min\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot A^{-1}\right)$, so ist immer $\frac{ds_2}{dr} > -1$. Damit ist dann $\frac{d(s_2 - s_1)}{dr} > -1+1=0$, d.h. die Kurve $s = s_2 - s_1$ schneidet die r-Achse in höchstens einem Punkt in $\left[\frac{1}{\varepsilon+1}, 1\right]$.

Die Abbildung $z \to (z+1)g(z)$ ist somit eine eineindeutige Abbildung der Zahlenkugel auf sich. Es wäre wesentlich einfacher gewesen, ein Beispiel mit nichtkommutativer Addition anzugeben.

Das eben konstruierte Beispiel liefert auch eine lokal euklidische, zwei dimensionale topologische Loop, die kommutativ, potenzassoziativ, eudoxisch und lokaltorsionsfrei ist, ohne assoziativ zu sein, nämlich die Loop $(K, \circ)$.

ANMERKUNGEN. Bei den verschiedenen Kennzeichnungen des Körpers der komplexen Zahlen treffen wir wieder auf die schon in § 2 aufgetretene Erscheinung, daß die vollständige Information zuerst über die multiplikative Loop geliefert wird. Ebenso wie damals das Beispiel (2.5) zeigt jetzt das Beispiel (4.10), daß dies eine notwendige Erscheinung ist. Als Ergänzung zu dem in II, § 9 konstruierten Beispiel ist die in (4.10) angegebene kommutative, potenzassoziative, eudoxische, lokal torsionsfreie, nichtassoziative zweidimensionale Loop bemerkenswert; ihre Translationen sind nicht überall differenzierbar, also erst recht nicht analytisch.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Eléments de Mathématique. Actual. sci. industr. **858** (1940); **1152** (1951). — [2] KURATOWSKI, C.: Topologie I und II. Monogr. Mat., Tom XX und XXI. — [3] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin: Springer 1957. — [4] SALZMANN, H.: Topologische Ebenen. Math. Z. **67**, 436–466 (1957).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 27. März 1958)

FARAHAT, H. K., and L. MIRSKY
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 231–244 (1958)

Group Membership in Rings of Various Types

By

H. K. FARAHAT and L. MIRSKY

1. Introduction

Nearly fifty years ago, A. RANUM [2] used the theory of elementary divisors for determining the conditions that a given matrix should belong to some multiplicative group of (not necessarily non-singular) matrices and for investigating a number of related questions. In a subsequent paper [3] he reverted to the subject, but considered now the more general case of finite-dimensional algebras. Our aim in the present note is to discuss a series of problems which are closely related to those of RANUM, but with the important difference that whereas he considers *algebras*, we are largely concerned with *rings*. Thus there is very little overlap between his results and ours, while the methods we employ are also quite distinct from his. We propose to study multiplicative groups in rings, their relation to each other, criteria for group membership, and other problems which naturally suggest themselves in this context. In §§ 2–4 we shall develop the general theory, imposing progressively more restrictive conditions on the structure of the rings in question. In § 5 a few applications to the theory of numbers will be indicated; and finally, in § 6, we shall consider linear algebras and, more particularly, the algebra of matrices.

The main idea in our treatment is the use of direct sums and of "principal idempotent elements". The latter notion is, of course, familiar in matrix theory (see e.g. [4], pp. 28–30); and we shall show that it can be extended without difficulty to more general situations.

If R is a ring (or a multiplicative semigroup) and S is a subset of R, then S will be called a *group in* R if it is a group with respect to multiplication. If an element $a \in R$ belongs to at least one group in R, it will be called a *group member* (in R). Our object is to determine, for specified classes of rings, whether a given element is a group member or not; and also to characterize, as far as possible, all groups in a given ring.

An element a in a ring (or semigroup) R is said to be *idempotent* if $a^2 = a$. It is clear that every idempotent element is a group member, and also that every group in R contains exactly one idempotent.

If S is a subset of a ring R and $a \in R$, then aS will denote the set of all elements of the form ax, $x \in S$; and Sa is defined analogously. Similarly, $a + S$ will denote the set of all elements of the form $a + x$, $x \in S$.

If X is a finite set, we shall denote the number of its elements by $|X|$.

2. Semigroups and rings with unit element

2.1. We shall begin with two results on semigroups, i.e. systems closed with respect to an associative multiplication.

THEOREM 1. *Let R be a semigroup, and let a be a group member in R. Then there exists a group $\mathfrak{M}(a)$ in R such that every group in R containing a is a subgroup of $\mathfrak{M}(a)$. In particular, the unit element of any group containing a is the unit element of $\mathfrak{M}(a)$, and the inverse of a in any group to which it belongs is equal to its inverse in $\mathfrak{M}(a)$.*

Denote by $\{G_i\}_{i\in J}$, where J is an appropriate index set, the family of all groups in R which contain a. For every $i\in J$, denote by u_i the unit element of G_i and by a_i the inverse of a in G_i. We then have, for $i, j\in J$,

$$\begin{aligned} a_i &= a_i u_i = a_i a_i a = a_i a_i a u_j = a_i a_i a a a_j \\ &= a_i u_i a a_j = a_i a a_j = a_i a u_j a_j = a_i a a a_j a_j \\ &= u_i a a_j a_j = a a_j a_j = u_j a_j = a_j. \end{aligned}$$

Therefore $u_i = a a_i = a a_j = u_j$. Thus all groups G_i, $i\in J$, have a common unit element, say u; and a has the same inverse, say a^*, in every group G_i. Now denote by $\mathfrak{M}(a)$ the set of all elements $x\in R$ which can be represented in the form $x = x_1 x_2 \dots x_k$, where each x_j belongs to some G_i. It can be verified at once that $\mathfrak{M}(a)$ is a group (with $x_k^* \dots x_2^* x_1^*$ as the inverse of x); and clearly every G_i, $i\in J$, is a subgroup of $\mathfrak{M}(a)$[1]).

We shall call $\mathfrak{M}(a)$ the *maximal group of* a. Since it is now possible to speak of *the* inverse of a group member a, we shall denote this inverse by a^{-1}. From the preceding discussion we infer immediately the following result.

THEOREM 2. *If R is a semigroup and a, b are group members in R, then $\mathfrak{M}(a)$, $\mathfrak{M}(b)$ are either disjoint or identical*[2]).

It now follows at once that if a group $\mathfrak{M}$ in R is the maximal group of any one of its elements, then it is the maximal group of every one of its elements. A group in R with this property will be called *maximal*. We see, then, that the group members in a semigroup are distributed among disjoint maximal groups.

2.2. We shall now specialize R, and for the remainder of the present section shall assume that it is a ring with unit element 1. An element $x\in R$ will be said to be invertible if, for some $y\in R$, $xy = yx = 1$. (If such an element y exists, it is plainly unique, and will be denoted by x^{-1}.) We may note that the set of all invertible elements in R is a maximal group, namely $\mathfrak{M}(1)$.

THEOREM 3. *Let R be a ring with unit element 1. If a is a group member in R, e is the unit element of $\mathfrak{M}(a)$, and $\mathfrak{C}(e)$ is the set of all invertible elements*

[1]) We owe the proof given above to Professor R. RADO, who has also drawn our attention to the following more general result. Let R be a semigroup and let $\{G_i\}_{i\in J}$ be a family of pairwise intersecting groups in R; then there exists a group G in R such that every G_i is a subgroup of G.

[2]) RANUM ([3], p. 287) proved Theorem 2 for the special case when R is a finite-dimensional algebra. His proof is based on the additive structure of R.

in R which commute with e, then (i) $\mathfrak{M}(a) = e\,\mathfrak{C}(e)$; (ii) *the element* $1-e+a$ *is invertible, and* $a^{-1} = e(1-e+a)^{-1}$.

It is obvious that $e\,\mathfrak{C}(e)$ is a group. Since it contains e, we have

$$e\,\mathfrak{C}(e) \subseteq \mathfrak{M}(e) = \mathfrak{M}(a). \tag{1}$$

Next, let $x \in \mathfrak{M}(a)$. Then

$$(1-e+x)(1-e+x^{-1}) = 1 = (1-e+x^{-1})(1-e+x), \tag{2}$$

so that $1-e+x$ is invertible. Moreover

$$x = e(1-e+x) = (1-e+x)e,$$

and so $x \in e\,\mathfrak{C}(e)$. Hence $\mathfrak{M}(a) \subseteq e\mathfrak{C}(e)$; and (i) follows in view of (1). Furthermore, we note from (2) that $1-e+a$ is invertible. Since now $a^{-1}(1-e+a) = e$, the proof of (ii) is complete.

THEOREM 4. *If R is a ring with unit element 1 and e is an idempotent element in R, then*

$$\mathfrak{M}(e) \cong \mathfrak{C}(e)/\{e + \mathfrak{M}(1-e)\},$$

where $\mathfrak{C}(e)$ is defined as in Theorem 3.

It is obvious that $\mathfrak{C}(e)$ is a group. Since, by Theorem 3 (i), $\mathfrak{M}(e) = e\,\mathfrak{C}(e)$, it follows that the mapping $x \to ex$ effects a homomorphism of $\mathfrak{C}(e)$ onto $\mathfrak{M}(e)$, so that $\mathfrak{M}(e) \cong \mathfrak{C}(e)/N$, where N is the set of all $x \in \mathfrak{C}(e)$ such that $ex = e$. But it is clear by a straightforward argument that $N = e + \mathfrak{M}(1-e)$, and the proof is therefore complete.

COROLLARY. *If R is a commutative ring with unit element 1, and e is any idempotent element of R, then*

$$\mathfrak{M}(e) \cong \mathfrak{M}(1)/\{e + \mathfrak{M}(1-e)\}.$$

Thus every maximal group is a homomorphic image of $\mathfrak{M}(1)$.

3. Semi-divided rings

3.1. Let R be a ring. We shall denote its zero element by 0. An element $a \in R$ is said to be *nilpotent* if, for some positive integer k, $a^k = 0$. The smallest positive integer with this property will be called the *index* of a. (In particular we regard 0 as a nilpotent element of index 1.) It is clear that a non-zero nilpotent element cannot be a group member in R.

A ring R will be said to be the *direct sum* of the subrings $R_1, \ldots, R_r$ if every element $a \in R$ possesses a unique representation of the form

$$a = \sum_{k=1}^{r} a_k \qquad (a_k \in R_k;\ k = 1, \ldots, r),$$

and if, furthermore, $xy = 0$ whenever $x \in R_k$, $y \in R_j$, $k \neq j$. We express this relation between R and the R_k by writing

$$R = \sum_{k=1}^{r} R_k \qquad \text{(direct sum)}. \tag{3}$$

If (3) is given and x is any element of R, then we shall denote by x_k the "component" of x in R_k. Again, if S_k is a subset of R_k, then $\sum_{k=1}^{r} S_k$ will denote the set of all elements of R expressible in the form $y_1+\cdots+y_r$, where $y_k \in S_k$ $(k=1,\ldots,r)$.

A ring R is said to be *divided* if it possesses a unit element and if every element of R is either invertible or nilpotent. Further, we call R a *semi-divided ring* if it is the direct sum of a finite number of subrings, each of which is divided.

Throughout the present section R will denote a semi-divided ring, with unit element 1, which is the direct sum of the divided subrings $R_1, \ldots, R_r$. We shall denote the unit element of R_k by e_k, the set of elements invertible in R_k by I_k, and the set of nilpotent elements in R_k by N_k.

Again, let $a \in R$. We define $l(a_k)$ as 1 or as the index of a_k according as $a_k \in I_k$ or $a_k \in N_k$; and we put $l(a) = \max l(a_k)$, $1 \leqq k \leqq r$. The number $l(a)$ will be called the *index* of a. (It is clear that when a is nilpotent, this coincides with our previous definition.) We shall see from a subsequent theorem that $l(a)$ is, in fact, independent of the particular decomposition (3).

For any $a \in R$, we shall denote by $\Omega(a)$ the set of integers k in the range $1 \leqq k \leqq r$ such that $a_k \in I_k$. Further, we shall write

$$\mathrm{id}\, a = \sum_{k \in \Omega(a)} e_k,$$

and we shall call id a the *idempotent* of a. This, too, will be seen to be independent of (3).

3.2. It is easy to reduce the problem of group membership in R to that of group membership in the R_k.

THEOREM 5. *An element $a \in R$ is a group member in R if and only if, for every value of k, a_k is a group member in R_k.*

Suppose that a belongs to a group G in R. As x ranges over G, let x_k range over G_k. Then G_k is evidently a group in R_k, and $a_k \in G_k$ is a group member in R_k. On the other hand, suppose that, for every value of k, a_k belongs to some group G_k in R. Then $G = \sum_{k=1}^{r} G_k$ is a group in R, and a belongs to this group. We may also note that if ε_k denotes the unit element of G_k (so that ε_k is either 0 or e_k), then the unit element of G is $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k$.

THEOREM 6. *If $a \in R$, then a^t is a group member in R if and only if*

$$t \geqq l(a). \tag{4}$$

If this condition is satisfied, then id a *is the unit element of* $\mathfrak{M}(a^t)$, *and*

$$\mathfrak{M}(a^t) = \sum_{k \in \Omega(a)} I_k. \tag{5}$$

In particular, therefore, if a is a group member in R, then

$$\mathfrak{M}(a) = \sum_{a_k \neq 0} I_k .$$

We have

$$a^t = \sum_{k=1}^{r} a_k^t .$$

By Theorem 5, a^t is a group member in R if and only if, for every value of k, a_k^t is a group member in R_k, i.e. $t \geqq l(a)$.

Next, let (4) be given; and write $b = a^t$. Then $b_k \in I_k$ or $b_k = 0$ according as $k \in \Omega(a)$ or $k \notin \Omega(a)$. Hence the unit element of any group in R_k containing b_k is e_k or 0 according as $k \in \Omega(a)$ or $k \notin \Omega(a)$. It follows, by the last remark in the proof of Theorem 5, that the unit element of $\mathfrak{M}(b)$ is id a. Again, it is clear that the right-hand side of (5) is a group which contains b; therefore

$$\sum_{k \in \Omega(a)} I_k \subseteqq \mathfrak{M}(b) .$$

Suppose, next, that $x \in \mathfrak{M}(b)$, and write $y = x^{-1}$. Then $xy = yx = \mathrm{id}\, a$ and so $x_k y_k = y_k x_k = (\mathrm{id}\, a)_k$ for every value of k. Hence, when $k \in \Omega(a)$, $x_k y_k = y_k x_k = e_k$, and so $x_k \in I_k$. Moreover, $x = x\, \mathrm{id}\, a$ and so $x_k = x_k (\mathrm{id}\, a)_k$. Hence, if $k \notin \Omega(a)$, then $x_k = 0$. We infer, then, that x is contained in the right-hand side of (5). Hence

$$\mathfrak{M}(b) \subseteqq \sum_{k \in \Omega(a)} I_k ,$$

and the proof is complete.

We note that, in view of Theorem 6, the index $l(a)$ is, in fact, independent of the particular decomposition (3). Equally, id a depends solely on R and a.

COROLLARY. *The element a is a group member in R if and only if*

$$a \cdot \mathrm{id}\, a = a , \tag{6}$$

If a is a group member, then, by Theorem 6, id a is the unit element of $\mathfrak{M}(a)$, and (6) follows. If, on the other hand, (6) is satisfied, then we infer that $a_k = 0$ when $k \notin \Omega(a)$. It follows, by Theorem 5, that a is a group member in R.

THEOREM 7. *The product of two group members in R is again a group member.* Let a and b be two group members in R, and write $\Omega = \Omega(a) \cap \Omega(b)$. Then

$$ab = \sum_{k \in \Omega} a_k b_k .$$

But $a_k b_k \in I_k$ when $k \in \Omega$; hence the assertion follows by Theorem 5.

3.3. Theorem 6 shows, in particular, that all sufficiently high powers of any element are group members which belong to the same maximal group. Accordingly, we shall say that two elements $x, y \in R$ belong to the same *class* if, for some sufficiently large value of t, x^t and y^t belong to the same maximal group. The class containing x will be denoted by $\mathfrak{K}(x)$.

The following statements relating to classes are immediate.

(i) A divided ring contains just two classes, namely the set of invertible elements and the set of nilpotent elements.

(ii) In any semi-divided ring, the maximal group $\mathfrak{M}(1)$ is also a class.

(iii) The elements a, b of a semi-divided ring belong to the same class if and only if $\mathrm{id}\, a = \mathrm{id}\, b$.

(iv) Any class in a commutative semi-divided ring is a semigroup with respect to multiplication[3]).

3.4. We shall use the letter S to denote any one of the 2^r subsets (including the empty subset) of $\{1, 2, \ldots, r\}$. The complement of S will be denoted by S'.

THEOREM 8. *There are exactly 2^r idempotents in R, and these are given by*

$$e_S = \sum_{k \in S} e_k. \tag{7}$$

The maximal group and the class containing e_S are given by

$$\mathfrak{M}(e_S) = \sum_{k \in S} I_k, \tag{8}$$

$$\mathfrak{N}(e_S) = \sum_{k=1}^{r} X_k, \tag{9}$$

where $X_k = I_k$ or N_k according as $k \in S$ or $k \in S'$.

If $x \in R$ is an idempotent, then $x_k^2 = x_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ and so $x_k = e_k$ or 0 according as $x_k \in I_k$ or $x_k \in N_k$. Thus x is of the form (7); and conversely any element of the form (7) is obviously an idempotent. Next, (8) follows by Theorem 6, and (9) is equally evident.

COROLLARY 1. *If R is finite, then*

$$|\mathfrak{M}(e_S)| = \prod_{k \in S} |I_k|,$$

$$|\mathfrak{N}(e_S)| = \prod_{k \in S} |I_k| \cdot \prod_{k \in S'} |N_k|.$$

COROLLARY 2. *If R is finite and commutative and $\mathfrak{N}$ is any class in R, then $|\mathfrak{M}(1)|$ is a multiple of $|\mathfrak{N}|$.*

Since $1 = e_1 + \cdots + e_r$, we have, by Corollary 1,

$$|\mathfrak{M}(1)| = \prod_{k=1}^{r} |I_k|.$$

Defining S by the equation $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(e_S)$, we therefore have

$$|\mathfrak{M}(1)|/|\mathfrak{N}| = \prod_{k \in S'} (|I_k|/|N_k|).$$

Now, since R_k is commutative, it follows that N_k is a subring of R_k. Thus N_k is a subgroup of the additive group R_k; and therefore $|R_k|$, and so $|I_k|$, is a multiple of $|N_k|$. This completes the proof.

3.5. The next theorem furnishes us with two further criteria for group membership of a given element.

[3]) Cf. RANUM [3], p. 293.

THEOREM 9. *Let $a \in R$. The following statements are then equivalent.* (i) *a is a group member in R;* (ii) $aR = a^2R$; (iii) $l(a) = 1$.

In the first place, let (i) be given; and suppose that a belongs to a group G in R. Denoting by u the unit element of G, we have $a = au = a(aa^{-1}) = a^2a^{-1}$, and so $aR \subseteq a^2R$. Thus (i) implies (ii). Next, let (ii) be given. Since R possesses a unit element, we have $a = a^2b$ for some $b \in R$. Hence $a_k = a_k^2 b_k$ and therefore $a_k = a_k^s b_k^{s-1}$ $(k = 1, \ldots, r;\ s \geqq 2)$. It follows that $a_k = 0$ or $a_k \in I_k$ and therefore $l(a) = 1$. We have thus shown that (ii) implies (iii). Finally, if (iii) is given, then (i) follows immediately by Theorem 6. The proof is therefore complete.

We may note that, in deducing (ii) from (i), we only used the fact that R is closed with respect to multiplication. Thus, if a is a group member in any semigroup R, then $aR = a^2R$ [4]).

3.6. We conclude the present section with a result on rings which possess a semi-divided subring. This result will prove particularly useful in the discussion of algebras in § 6.

THEOREM 10. *Let R^* be a ring with a unit element, and let R be a semi-divided subring of R^*. If $a \in R$ is a group member in R^*, then it is a group member in R.*

Write R in the form (3). Suppose that a belongs to a group G^* in R^*, and denote by u^* the unit element of G^*. We have $a_k = ae_k = e_k a$ $(k = 1, \ldots, r)$. If a_k is nilpotent, say $a_k^n = 0$, then

$$a_k = (au^*)e_k = a(a^{-1}a)^n e_k = a(a^{-1})^n a^n e_k$$
$$= a(a^{-1})^n (ae_k)^n = a(a^{-1})^n a_k^n = 0.$$

It follows that the index of a in R is 1. Hence, by Theorem 9, a is a group member in R.

4. Residue class rings

4.1. In this section, R will denote a principal ideal domain, i.e. a commutative integral domain in which every ideal is principal. The unit element and the zero element of R will be denoted by 1 and 0 respectively. The highest common factor $(a_1, \ldots, a_s)$ of the elements $a_1, \ldots, a_s \in R$ is, of course, defined only to within an invertible multiplier, and equality between highest common factors must always be understood in this sense. If $\mathfrak{p}$, $a \in R$ and $\mathfrak{p}$ is irreducible, then the greatest integer k such that $\mathfrak{p}^k \mid a$ will be denoted by ord $(a; \mathfrak{p})$.

Throughout the present section, n will denote a fixed non-invertible element other than zero; and we shall write $R(n)$ for the residue class ring $R/(n)$. The elements of R will be denoted by small letters and those of $R(n)$ by capital letters. If $a \in R$, we shall denote by $C(a)$ the residue class (mod n) containing a. In particular, we shall write $I = C(1)$, $Z = C(0)$.

---

[4]) The implication (i) $\Rightarrow$ (ii) was proved by RANUM ([3], p. 287) for the case when R is a finite-dimensional algebra, and the implication (ii) $\Rightarrow$ (i) for the case when R is a finite-dimensional algebra with a right unit element ([3], p. 289).

If $x, x' \in R$, $x \equiv x' \pmod{n}$, and $d \mid n$, then $(d, x) = (d, x')$, so that (d, x) depends only on $C(x)$. We may therefore denote it unambiguously by (d, X) where $X = C(x)$.

As we know, n possesses an (essentially unique) representation

$$n = \eta \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}, \tag{10}$$

where η is an invertible element, the p_k are irreducible elements (no two of which are associated), and the a_k are positive integers. Put

$$n_k = \prod_{j \neq k} p_j^{a_j} \quad (k = 1, \ldots, r).$$

Then $(n_1, \ldots, n_r) = 1$; and there exist therefore elements $m_1, \ldots, m_r \in R$ such that

$$n_1 m_1 + \cdots + n_r m_r = 1. \tag{11}$$

Write $E_k = C(n_k m_k)$, $k = 1, \ldots, r$. It is now a matter of immediate verification that the E_k do not depend on the particular representation (10) nor on the particular choice of the m's. We shall call $E_1, \ldots, E_r$ the *principal idempotent elements* of $R(n)$.

Our subsequent discussion of the structure of $R(n)$ will depend, in essence, on the fact that $R(n)$ is isomorphic to the direct sum of the rings $R(p_k^{a_k})$, $k = 1, \ldots, r$. However, we find it convenient to use a slightly different language.

4.2. We begin with a number of easy preliminary results.

LEMMA 1. (i) $E_1 + \cdots + E_r = I$; (ii) $E_k E_j = Z$ $(k \neq j)$; (iii) $E_k^2 = E_k \neq Z$ $(k = 1, \ldots, r)$; (iv) *if* S, T *are subsets of* $\{1, \ldots, r\}$, *and*

$$\sum_{k \in S} E_k = \sum_{k \in T} E_k,$$

then $S = T$.

Lemma 1 (i) follows immediately from (11). The remaining assertions are then derived successively by obvious arguments.

LEMMA 2. (i) $R(n)\, E_k$ *is a ring with unit element* E_k. (ii) *Let* $X \in R(n)$. *Then* XE_k *is nilpotent or invertible in* $R(n)\, E_k$ *according as* $p_k \mid (n, X)$ *or* $p_k \nmid (n, X)$. *In particular, therefore,* $R(n)\, E_k$ *is a divided ring.* (iii) $R(n)$ *is the direct sum of its subrings* $R(n)\, E_k$ $(k = 1, \ldots, r)$, *and is therefore semi-divided.*

We obtain (i) by straightforward verification and the use of Lemma 1 (iii). To prove (ii), let $x \in R$ be such that $X = C(x)$. If $p_k \mid (n, X)$, then $p_k \mid x$ and it is easily seen that $(XE_k)^{a_k} = Z$, i.e. XE_k is nilpotent. On the other hand, if $p_k \nmid (n, X)$, then $p_k \nmid x$ and there exist elements $u, v \in R$ such that $1 = p_k^{a_k} u + xv$. Hence $x n_k m_k v \equiv n_k m_k \pmod{n}$; and so, writing $V = C(v)$, we have $XE_k V = E_k$. Thus $XE_k \cdot VE_k = E_k$, i.e. XE_k is invertible in $R(n)\, E_k$.

Finally, write $X_k = XE_k$ $(k = 1, \ldots, r)$. Then, in view of Lemma 1 (i), $X = X_1 + \cdots + X_r$, where $X_k \in R(n) E_k$ $(k = 1, \ldots, r)$. Again, by Lemma 1, (ii) and (iii), this representation is unique. Moreover, by Lemma 1 (ii), $AB = Z$

whenever $A \in R(n)\, E_k$, $B \in R(n)\, E_j$, $k \neq j$. Hence $R(n)$ is the direct sum of the $R(n)\, E_k$, and the proof is complete.

Since, then, $R(n)$ is a semi-divided ring, it follows that id X is defined for every element $X \in R(n)$. By Lemma 2, (i) and (ii), we immediately infer

LEMMA 3. *For any $X \in R(n)$, we have*

$$\mathrm{id}\, X = \sum_{p_k \nmid (n, X)} E_k .$$

Our next object is to determine the index of every element in $R(n)$. When ξ is a real number, we shall denote by $\{\xi\}$ the least integer k such that $k \geqq \xi$.

LEMMA 4. *Let X be any element of $R(n)$.* (i) *If XE_k is nilpotent, its index is equal to*

$$\left\{ \frac{\mathrm{ord}\,(n; p_k)}{\mathrm{ord}\,((n, X); p_k)} \right\}.$$

(ii) *If $p_k \nmid (n, X)$ for all k, then $l(X) = 1$; otherwise*

$$l(X) = \max_k \left\{ \frac{\mathrm{ord}\,(n; p_k)}{\mathrm{ord}\,((n, X); p_k)} \right\},$$

where the maximum is taken over integers k such that $1 \leqq k \leqq r$, $\mathrm{ord}\,((n, X); p_k) > 0$.

To prove (i), denote by x any element in R such that $X = C(x)$. Let m be the index of XE_k, i.e. the least positive integer such that $X^m E_k = Z$. This relation is equivalent to $n \mid (n, x)^m n_k m_k$, and this is satisfied if and only if

$$\mathrm{ord}\,(n; p_k) \leqq m \cdot \mathrm{ord}\,((n, X); p_k).$$

This proves (i); and (ii) follows at once by (i) and Lemma 2 (ii).

4.3. Since, by Lemma 2 (iii), $R(n)$ is a semi-divided ring, all conclusions of §§ 2, 3 now apply. For example, if $X \in R(n)$, then X^t is a group member if and only if $t \geqq l(X)$; if this condition is satisfied, then id X is the unit element of $\mathfrak{M}(X^t)$. Again, all idempotent elements in $R(n)$ can be written down in terms of the principal idempotent elements of $R(n)$. Further, all elements (all group members) in $R(n)$ are distributed among disjoint classes[5]) (maximal groups). Among the maximal groups we may, in particular, note the group $\Gamma(n)$ of all $X \in R(n)$ with $(n, X) = 1$; this is, in fact, the group $\mathfrak{M}(I)$ of all elements invertible in $R(n)$. Every maximal group in $R(n)$ is a homomorphic image of this group $\Gamma(n)$.

4.4. We conclude the present section with some results which do not follow solely from the fact that $R(n)$ is a semi-divided ring.

THEOREM 11. *The element $X \in R(n)$ is a group member if and only if*

$$\left(\frac{n}{(n, X)}, X \right) = 1. \tag{12}$$

By Theorem 9 and Lemma 2 (iii), X is a group member if and only if $l(X) = 1$. In view of Lemma 4 (ii), this condition is satisfied if and only if

$$\mathrm{ord}\,(n; p_k) = \mathrm{ord}\,((n, X); p_k)$$

[5]) The term "class" should not, of course, be confused with "residue class".

whenever the right-hand side of this equation is positive; and this is clearly equivalent to (12).

THEOREM 12. *Let X, Y be group members in $R(n)$. Then $\mathfrak{M}(X)=\mathfrak{M}(Y)$ if and only if*

$$(n, X)=(n, Y). \tag{13}$$

We know that $\mathfrak{M}(X)=\mathfrak{M}(Y)$ if and only if $\mathrm{id}\, X=\mathrm{id}\, Y$. In view of Lemmas 3 and 1 (i), this condition is equivalent to

$$\sum_{p_k \mid (n, X)} E_k=\sum_{p_k \mid (n, Y)} E_k. \tag{14}$$

If (13) is satisfied, then so is obviously (14). On the other hand, if (14) is satisfied, then, by Lemma 1 (iv),

$$P_n(X)=P_n(Y), \tag{15}$$

where $P_n(X)$ denotes the set of those elements among $p_1, \ldots, p_r$ which divide (n, X). Also, since X, Y are group members, we have, by Theorem 11,

$$\left(\frac{n}{(n, X)}, X\right)=1=\left(\frac{n}{(n, Y)}, Y\right). \tag{16}$$

From (15) and (16) we at once infer (13), and the proof is therefore complete.

THEOREM 13. *Let X and Y be any elements in $R(n)$. Then $\mathfrak{R}(X)=\mathfrak{R}(Y)$ if and only if every irreducible element of R which divides (n, X) also divides (n, Y), and conversely.*

We know that $\mathfrak{R}(X)=\mathfrak{R}(Y)$ if and only if $\mathrm{id}\, X=\mathrm{id}\, Y$, i.e. if and only if (15) holds. The assertion therefore follows.

5. Applications to the theory of numbers

Let n be an integer greater than 1, and let its representation as a product of powers of primes be given by

$$n=p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}.$$

In the present section we shall be concerned with surveying the groups and classes in the ring $R(n)$ of residue classes (mod n)[6]. It will be convenient, at times, to ignore the distinction between the integer a and the residue class (mod n) containing a.

As usual, $\varphi(n)$ will denote EULER's function. D_n is to denote the set of the 2^r divisors of n of the form $p_1^{b_1} \ldots p_r^{b_r}$, where, for each value of k, b_k is either a_k or 0. Further, S_n is to denote the set of square-free divisors of n. The letter p is reserved for primes.

A number of results relating to $R(n)$ follow immediately from the general theory of § 4. For example, a is a group member in $R(n)$ if and only if $(n, a) \in D_n$; this implies, in particular, that all elements in $R(n)$ are group members if and only if n is square-free. We may also note that every maximal group

[6]) A few special results concerning $R(n)$ were noted by RANUM. See [3], pp. 307–308.

in $R(n)$ is a homomorphic image of the group $\Gamma(n)$ of the $\varphi(n)$ residue classes (mod n) and prime to n.

We next deduce a few results which are not merely consequences of the general theory.

THEOREM 14. (i) *If a is a group member in $R(n)$, then*

$$|\mathfrak{M}(a)| = \varphi\left(\frac{n}{(n,a)}\right).$$

(ii) *The orders of the 2^r maximal groups in $R(n)$ are $\varphi(d)$, $d \in D_n$.*

(iii) *The number of group members in $R(n)$ is equal to*

$$n \prod_{k=1}^{r} (1 - p_k^{-1} + p_k^{-a_k}).$$

Let a be a group member in $R(n)$ and write $(n,a) = d$, so that $d \in D_n$. In view of Theorem 12, the order of $\mathfrak{M}(a)$ is equal to the number of integers k satisfying $0 < k \leqq n$, $(n,k) = d$, i.e. to $\varphi(n/d)$. This establishes (i). Next, if $d \in D_n$, then d is a group member and, by (i), $|\mathfrak{M}(d)| = \varphi(n/d)$. Moreover, if $d_1, d_2 \in D_n$, $d_1 \neq d_2$, then $(n,d_1) \neq (n,d_2)$ and so, by Theorem 12, $\mathfrak{M}(d_1) \neq \mathfrak{M}(d_2)$. The orders of the maximal groups are therefore the numbers $\varphi(n/d)$, $d \in D_n$; hence (ii) follows. This implies that the number of group members in $R(n)$ is equal to

$$\sum_{d \in D_n} \varphi(d),$$

and this leads at once to (iii).

THEOREM 15. (i) *If a is any integer, then*

$$|\mathfrak{N}(a)| = \varphi(n) \prod_{p|(n,a)} (p-1)^{-1}.$$

(ii) *The orders of the classes*[7]) *in $R(n)$ are the numbers*

$$\varphi(n) \prod_{p|d} (p-1)^{-1}, \qquad d \in S_n.$$

Denote by $\varrho_1, \ldots, \varrho_i$ those primes among $p_1, \ldots, p_r$ which divide a, and by $\sigma_1, \ldots, \sigma_j$ those which do not divide a. Then, by Theorem 13, $x \in \mathfrak{N}(a)$ if and only if x is divisible by every ϱ and by no σ. It follows that

$$\begin{aligned} |\mathfrak{N}(a)| &= n(\varrho_1 \ldots \varrho_i)^{-1}(1-\sigma_1^{-1}) \ldots (1-\sigma_j^{-1}) \\ &= n \prod_{p|(n,a)} p^{-1} \prod_{\substack{p|n \\ p \nmid a}} (1-p^{-1}) = \varphi(n) \prod_{p|(n,a)} (p-1)^{-1}, \end{aligned}$$

and (i) is proved. To establish (ii), let $d \in S_n$. Then, by (i),

$$|\mathfrak{N}(d)| = \varphi(n) \prod_{p|d} (p-1)^{-1}.$$

Moreover, if $d_1, d_2 \in S_n$, $d_1 \neq d_2$, then, by Theorem 13, $\mathfrak{N}(d_1) \neq \mathfrak{N}(d_2)$. The assertion therefore follows.

[7]) The order of a class is the number of elements contained in it.

It may be of interest to observe that Theorems 14 and 15 can also be deduced without difficulty from Corollary 1 to Theorem 8. We may note further that, for any a, $|\Gamma(n)|$ is a multiple of $|\mathfrak{N}(a)|$, while, for any group member a, $|\mathfrak{N}(a)|$ is a multiple of $|\mathfrak{M}(a)|$. The reason for this is clear from the corollaries to Theorem 8.

6. Applications to the theory of algebras

6.1. Let F be a field, Λ a linear associative algebra over F, and $F[x]$ the ring of polynomials in x with coefficients in F. An element $a \in \Lambda$ will be said to be *algebraic* if it satisfies an equation of the form $\psi(x) = 0$, where $\psi(x)$ is a non-constant polynomial in $F[x]$. The monic polynomial of least degree with this property is called the *minimum polynomial* of a.

By considering the homomorphic mapping $f(x) \to f(a)$ of $F[x]$ into Λ, we establish at once the isomorphism of the rings $F[a]$ and $F[x]/(\psi(x))$, where $\psi(x)$ is the minimum polynomial of a. Hence, using Lemma 2 (iii) and Theorem 10, we obtain

THEOREM 16. *If a is an algebraic element of Λ, then $F[a]$ is a semi-divided subring of Λ. An element $b \in F[a]$ is a group member in Λ if and only if it is a group member in $F[a]$.*

In view of §§ 3 and 4, the theory of group membership of algebraic elements in Λ can now be regarded as complete. Thus, for example, we infer from Theorems 16 and 9 that an algebraic element $a \in \Lambda$ is a group member in Λ if and only if $aF[a] = a^2F[a]$. We devote the remainder of this section to the derivation of results which depend essentially on the present special situation.

Throughout, let a be an algebraic element of Λ; let $\psi(x)$ be its minimum polynomial; and let the polynomial $\vartheta(x)$ and the non-negative integer $\mu(a)$ be defined by the relations

$$\psi(x) = x^{\mu(a)}\vartheta(x), \qquad \vartheta(0) \neq 0. \tag{17}$$

If $\mu(a) = 0$, it is clear that id $a = 1$. If, however, $\mu(a) > 0$, then there exist polynomials $g(x)$, $h(x) \in F[x]$ such that

$$x^{\mu(a)}g(x) + \vartheta(x)h(x) = 1,$$

and it is readily verified that id $a = a^{\mu(a)}g(a)$. It is also evident that, for the purpose of this construction, any polynomial annihilating a can be taken in place of $\psi(x)$. For example, when Λ is the algebra of matrices, id a can be easily computed from the characteristic polynomial of a.

THEOREM 17. *If $f(x) \in F[x]$, then $f(a)$ is a group member in Λ if and only if*

$$\left(\frac{\psi}{(\psi, f)}, f\right) = 1.$$

In particular[8]*, a^t is a group member if and only if $t \geqq \mu(a)$.*

This follows at once from Theorems 16 and 11.

[8]) This last result was proved by RANUM ([3], p. 295) for the case when Λ is finite-dimensional.

THEOREM 18. *Let $\mu(a)=1$, so that a is a group member. If $\eta(x)$ denotes the polynomial $\{\vartheta(0)-\vartheta(x)\}/x\vartheta(0)$, then*

$$\mathrm{id}\, a = a\cdot\eta(a), \qquad a^{-1} = a\cdot\eta^2(a).$$

Writing $\vartheta(0)=c$, we have $x\eta(x)+c^{-1}\vartheta(x)=1$. Hence $\mathrm{id}\, a = a\cdot\eta(a)$, and therefore

$$a^{-1} = a^{-1}\,\mathrm{id}\, a = a^{-1}a\cdot\eta(a) = \mathrm{id}\, a\cdot\eta(a) = a\cdot\eta^2(a).$$

RANUM ([3], p. 295) gave an expression for $\mathrm{id}\, a$ equivalent to ours, and also indicated how a^{-1} could be calculated.

THEOREM 19. *If a, b are commuting algebraic elements which are group members in Λ, then ab is also a group member in Λ.*

The unit elements of the maximal groups containing a, b are $\mathrm{id}\, a$, $\mathrm{id}\, b$ respectively. Since $ab=ba$ and since $\mathrm{id}\, a$, $\mathrm{id}\, b$ are polynomials in a, b respectively, it follows that the four elements a, b, $\mathrm{id}\, a$, $\mathrm{id}\, b$ commute in pairs. Hence the set of all elements of Λ of the form $a^r b^s$ ($r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), where $a^0 = \mathrm{id}\, a$, $b^0 = \mathrm{id}\, b$, is a group which contains ab. (It is, moreover, almost obvious that ab is algebraic, but we do not require this fact.)

The condition of commutativity in Theorem 19 cannot be dispensed with. For, if Λ is the algebra of 2×2 matrices and

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

then a, b are group members, but ab is not.

6.2. For the remainder of this section, we shall take Λ to be the algebra of $n\times n$ matrices over F, but shall continue to use the notation specified by (17). The rank of a matrix a will be denoted by $R(a)$.

It follows from Theorem 17 that a is a group member if and only if $\mu(a)\leqq 1$. Now any matrix a is similar to the direct sum of a non-singular matrix a_1 and a nilpotent matrix a_2; and it is clear that $\mu(a)\leqq 1$ if and only if $a_2=0$. Again, $R(a)=R(a^2)$ if and only if $a_2=0$, and this gives us another necessary and sufficient condition for group membership. Further, since $\mathrm{id}\, a = a^{\mu(a)}g(a)$ and $a_2^{\mu(a)}=0$, and since $g(a_1)$ is non-singular, it follows that $R(\mathrm{id}\, a)=R(a_1)$. Hence a is a group member if and only if $R(a)=R(\mathrm{id}\, a)$. Finally, a is a group member if and only if there exists a matrix u such that $u^2=u$, $au=ua=a$, $R(u)=R(a)$. The necessity of this condition is obvious; we establish the sufficiency by observing that u is similar to the direct sum of a unit matrix and a zero matrix, and hence deducing that $a_2=0$[9].

6.3. We know that every group member a belongs to a unique maximal group $\mathfrak{M}(a)$. However, in general there exists no abelian group $\mathfrak{G}$ such that every abelian group containing a is a subgroup of $\mathfrak{G}$. (For example, take a to be the unit matrix and let b, c be non-commuting non-singular matrices. The cyclic groups generated by b and c are abelian and both contain a, but

[9]) Some further criteria for group membership are given by RANUM ([2], § 6).

they cannot be subgroups of the same abelian group.) Nevertheless, if a is non-derogatory (i.e. if its minimum polynomial and characteristic polynomial are equal), then a unique maximal abelian group containing a does, in fact, exist. To be more precise, we have the following result.

THEOREM 20. *If the non-derogatory matrix a is a group member, then every abelian group containing a is a subgroup of the abelian group* $(\mathrm{id}\, a)\, \mathfrak{P}(a)$, *where* $\mathfrak{P}(a)$ *denotes the set of all non-singular matrices in* $F[a]$.

Every abelian group containing a must be a subgroup of the normalizer $\mathfrak{N}(a)$ of a in $\mathfrak{M}(a)$. But, by Theorem 3 (i), $\mathfrak{N}(a)$ is the set of all matrices which commute with a and have the form $(\mathrm{id}\, a)\, y$, where y is a non-singular matrix commuting with $\mathrm{id}\, a$. Hence $\mathfrak{N}(a)$ is the set of all matrices of the form $(\mathrm{id}\, a)\, y$, where y is a non-singular matrix commuting with a. But, since a is non-derogatory, y must be a polynomial in a (see e.g. [1], pp. 69 and 107), and the assertion therefore follows. The trivial instance of the zero matrix shows, however, that there also exist derogatory matrices which are contained in a unique maximal abelian group.

In conclusion, we wish to thank Professor H. WIELANDT for a number of helpful comments.

Added in proof. Since submitting our paper, we have seen a short note by W. E. BARNES and H. SCHNEIDER [Arch. Math. **8**, 166–168 (1957)] in which some problems similar to those discussed by us are considered. In particular, BARNES and SCHNEIDER prove a result substantially equivalent to our Theorem 17. They also raise the following question: if S is a subring of a ring R and $a \in S$ is a group member in R, under what conditions is it a group member in S? Our Theorem 10 provides a partial answer to this question.

References

[1] JACOBSON, N.: Lectures in abstract algebra, vol. II. New York 1953. — [2] RANUM, A.: The group membership of singular matrices. Amer. J. Math. **31**, 18–41 (1909). — [3] RANUM, A.: The groups belonging to a linear associative algebra. Amer. J. Math. **49**, 285–308 (1927). — [4] WEDDERBURN, J. H. M.: Lectures on matrices. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1934.

Dept. of Mathematics, University of Sheffield (England)

(Eingegangen am 29. Mai 1958)

PERRON, O.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 245–249 (1958)

Über zwei ausgeartete Heinesche Reihen und einen Kettenbruch von Ramanujan

Von

OSKAR PERRON

§ 1. Wir betrachten die beiden unendlichen Reihen

$$(1)\quad G(b,q;x)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^\lambda)}\cdot\frac{b^\lambda x^\lambda}{(1+b)(1+bq)\dots(1+bq^{\lambda-1})},$$

$$(2)\quad H(b,q;x)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^\lambda)}\cdot\frac{(-x)^\lambda}{(1+b)(1+bq)\dots(1+bq^{\lambda-1})},$$

die man, wenn man $b=-q^\nu$ setzt, leicht als Grenzfälle der bekannten HEINEschen Reihe erkennt. Dabei darf natürlich kein Nenner verschwinden, also insbesondere q keine Einheitswurzel sein. Auch wenn q zwar keine Einheitswurzel, aber doch $|q|=1$ ist, kann das Konvergenzverhalten sehr unterschiedlich sein, je nachdem, wie stark sich q durch Einheitswurzeln approximieren läßt. Wir sehen davon ab, setzen also $|q|\neq 1$ voraus.

Für $0<|q|<1$ ist $G(b,q;x)$ augenscheinlich eine *ganze* Funktion von x. Für $|q|>1$ ist die Reihe $G(b,q;x)$, falls $b=0$ ist, konstant gleich 1, und falls $b\neq 0$ ist, konvergiert sie nur im Kreis $|x|<1$; wir werden aber sehen, daß sie sich darüber hinaus als *meromorphe* Funktion von x fortsetzt, und werden sie auch als Quotienten von zwei ganzen Funktionen von x darstellen können [Formel (11)].

Für $|q|>1$ ist $H(b,q;x)$ eine *ganze* Funktion von x. Für $0<|q|<1$ konvergiert die Reihe $H(b,q;x)$ nur im Kreis $|x|<|q|^{-1}$; wir werden aber sehen, daß sie sich darüber hinaus als *meromorphe* Funktion von x fortsetzt, und werden sie auch als Quotienten von zwei ganzen Funktionen von x darstellen können [Formel (12)].

Zwischen den Funktionen G und H besteht, wie unmittelbar zu kontrollieren, der Zusammenhang

$$(3)\qquad G(b,q;x)=H(b^{-1},q^{-1};qx),$$

$$(4)\qquad H(b,q;x)=G(b^{-1},q^{-1};qx),$$

so daß es genügen würde, sich mit einer der beiden zu beschäftigen. Es ist aber doch nützlich, alle beide zu betrachten.

§ 2. Man verifiziert leicht die Identität

$$(5)\qquad G(b,q;x)-G(bq,q;x)=\frac{bqx}{(1+b)(1+bq)}G(bq^2,q;x),$$

und indem man b durch bq^ν ersetzt,

$$G(bq^\nu, q; x) - G(bq^{\nu+1}, q; x) = \frac{bq^{\nu+1}x}{(1+bq^\nu)(1+bq^{\nu+1})} G(bq^{\nu+2}, q; x).$$

Hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{G(bq^\nu, q; x)}{G(bq^{\nu+1}; q; x)} = \mathfrak{P}_\nu(x)$$

gesetzt wird, sofort die Identität

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = 1 + \frac{\dfrac{bq^{\nu+1}}{(1+bq^\nu)(1+bq^{\nu+1})}x}{\mathfrak{P}_{\nu+1}(x)},$$

und daraus nach Satz 3.5 S. 110 meines Buches[1]) die Korrespondenzformel

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \cfrac{\dfrac{bq}{(1+b)(1+bq)}x}{1} + \cfrac{\dfrac{bq^2}{(1+bq)(1+bq^2)}x}{1} + \cdots.$$

Dieser Kettenbruch stellt sowohl für $0<|q|<1$ als auch für $|q|>1$ nach Satz 3.28 S. 149 meines Buches eine meromorphe Funktion von x dar, die in der Umgebung des Nullpunktes gleich der korrespondierenden Reihe, also gleich $\mathfrak{P}_0(x) = \frac{G(b,q;x)}{G(bq,q;x)}$ ist. Daher kann man das Korrespondenzzeichen $\sim$ durch ein Gleichheitszeichen ersetzen; wenn man dann noch mit $1+b$ multipliziert und zur Vermeidung der Brüche in den Teilzählern zu einem äquivalenten Kettenbruch übergeht, erhält man die Formel

$$(6) \qquad (1+b)\frac{G(b,q;x)}{G(bq,q;x)} = 1 + b + \cfrac{bqx}{1+bq} + \cfrac{bq^2x}{1+bq^2} + \cfrac{bq^3x}{1+bq^3} + \cdots,$$

oder, indem man xb^{-1} an Stelle von x schreibt,

$$(7) \qquad 1 + b + \cfrac{xq}{1+bq} + \cfrac{xq^2}{1+bq^2} + \cfrac{xq^3}{1+bq^3} + \cdots = (1+b)\frac{G(b,q;xb^{-1})}{G(bq,q;xb^{-1})}.$$

Den Kettenbruch (7) hat RAMANUJAN in seinem berühmten Brief an HARDY erwähnt, ohne mehr von ihm zu verraten, als daß es über ihn ein „allgemeines Theorem" gebe, in dem gewisse sehr merkwürdige sich auf den Kettenbruch $1 + \cfrac{q}{1} + \cfrac{q^2}{1} + \cfrac{q^3}{1} + \cdots$ beziehende Formeln, die er ohne Beweis mitteilt, als Spezialfälle enthalten seien[2]). Die Formel (7) für den Spezialfall $b=0$, $|q|<1$ wurde von G. N. WATSON gefunden[3]) und sie diente ihm als Schlüssel, um bis zu den merkwürdigen Formeln von RAMANUJAN vorzudringen, wobei der ganze weitere Weg gar nichts mehr mit Kettenbrüchen zu tun hatte, sondern aus einem kunstvollen Operieren mit den Reihen bestand. Daher habe ich schon auf S. 127 meines Buches, woselbst

[1]) PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl., Bd. II. Stuttgart 1957

[2]) Siehe Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, S. XXVIII. Cambridge 1927.

[3]) Man beachte, daß nach der Definitionsformel (1) die Reihe $G(b, q; xb^{-1})$ auch für $b=0$ sinnvoll bleibt und dann für $|q|<1$ konvergiert.

Literatur, die Vermutung geäußert, daß auch RAMANUJAN wohl im Besitz der Formel (7) mit $b=0$, $|q|<1$ war und einen ähnlichen Weg wie WATSON eingeschlagen hatte. Ich möchte nun nach diesen Zusammenhängen weiter vermuten, daß RAMANUJAN sogar im Besitz der allgemeinen Formel (7) war, obwohl ich allerdings keine Ahnung habe, welche weiteren merkwürdigen Formeln er daraus etwa noch gewonnen und mit dem „allgemeinen Theorem" gemeint haben mag.

§ 3. Man verifiziert auch leicht die Identität

$$H(b,q;x)-H(bq,q;x)=\frac{bqx}{(1+b)(1+bq)}H(bq^2,q;x). \tag{8}$$

Aus dieser ergibt sich, genau wie vorhin aus der Identität (5) die Formel (6) gewonnen wurde, die weitere Formel

$$(1+b)\frac{H(b,q;x)}{H(bq,q;x)}=1+b+\frac{bqx}{|1+bq}+\frac{bq^2x}{|1+bq^2}+\frac{bq^3x}{|1+bq^3}+\cdots. \tag{9}$$

Durch Vergleich mit (6) folgt dann

$$\frac{G(b,q;x)}{G(bq,q;x)}=\frac{H(b,q;x)}{H(bq,q;x)}$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$\frac{H(b,q;x)}{G(b,q;x)}=\frac{H(bq,q;x)}{G(bq,q;x)}. \tag{10}$$

Das besagt, daß die linke Seite der Gl. (10) als Funktion von b sich nicht ändert, wenn man b durch bq ersetzt, und rückwärts gelesen, daß sie sich auch nicht ändert, wenn man b durch bq^{-1} ersetzt. Indem man beides wiederholt tut, ergibt sich allgemein:

$$\frac{H(b,q;x)}{G(b,q;x)}=\frac{H(bq^n,q;x)}{G(bq^n,q;x)} \qquad (n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots).$$

Durch den Grenzübergang $n\to\pm\infty$ folgt hieraus, weil $|q|\neq 1$ ist,

$$\frac{H(b,q;x)}{G(b,q;x)}=\frac{H(0,q;x)}{G(0,q;x)}=\frac{H(\infty,q;x)}{G(\infty,q;x)}.$$

Da nun augenscheinlich $G(0,q;x)=1$ und $H(\infty,q;x)=1$ ist, ergibt sich:

$$G(b,q;x)=\frac{H(b,q;x)}{H(0,q;x)}=\frac{H(b,q;x)}{1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda}(-x)^{\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{\lambda})}}, \tag{11}$$

$$H(b,q;x)=\frac{G(b,q;x)}{G(\infty,q;x)}=\frac{G(b,q;x)}{1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q)^{\lambda}}}, \tag{12}$$

$$\left(1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{\lambda})}\right)\cdot\left(1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda}(-x)^{\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{\lambda})}\right)=1. \tag{13}$$

Die Formeln (11), (12), (13) gelten natürlich wie alle früheren sowohl für $0<|q|<1$ als auch für $|q|>1$ innerhalb ihres Konvergenzkreises in der x-Ebene. Speziell für $|q|>1$ ist die in diesem Fall nicht ganze Funktion $G(b, q; x)$ durch (11) als Quotient von zwei ganzen Funktionen dargestellt, wie in § 1 angekündigt. Und für $0<|q|<1$ ist die in diesem Fall nicht ganze Funktion $H(b, q; x)$ durch (12) als Quotient von zwei ganzen Funktionen dargestellt.

§ 4. Man verifiziert leicht durch einfaches Ausmultiplizieren die Identität

$$H(0, q; x) \cdot (1 + qx) = H(0, q; qx),$$

und indem man hier x durch $qx, q^2x, \ldots, q^nx$ ersetzt und dann multipliziert ergibt sich

$$H(0, q; x) \cdot (1 + qx)(1 + q^2x) \ldots (1 + q^nx) = H(0, q; q^nx).$$

Im Fall $|q|<1$ hat offenbar die rechte Seite für $n \to \infty$ den Limes 1, und man erhält, wenn man für $H(0, q; x)$ die Reihe einsetzt, die Formel

$$(14) \quad 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^\lambda (-x)^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n x} \quad \text{für } |q|<1,\ |x|<|q|^{-1}.$$

Aus (13) folgt dann weiter

$$(15) \quad 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} x^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n x) \quad \text{für } |q|<1.$$

Diese beiden Formeln sind nicht neu. Sie stehen schon in EULERs Introductio in analysin infinitorum, tom. I, cap. XVI = Opera omnia, Ser. I, vol. VIII.

Indem man q durch q^{-1} ersetzt, gehen die Formeln (14), (15) über in

$$1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} x^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{1+q^{-n}x} \quad \text{für } |q|>1,\ |x|<q,$$

$$1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-x)^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{-n}x) \quad \text{für } |q|>1,$$

oder, wenn man x zwecks Angleichung an (15) und (14) durch qx ersetzt,

$$(16) \quad 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} x^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+q^{-n}x} \quad \text{für } |q|>1,\ |x|<1,$$

$$(17) \quad 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^\lambda (-x)^\lambda}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^{-n}x) \quad \text{für } |q|>1.$$

Aus (11) in Verbindung mit (17) erkennt man sofort die Pole der für $|q|>1$ meromorphen Funktion $G(b, q; x)$; es sind die Werte $x = -q^n$ ($n = 0,$

1, 2, ...). Ebenso erkennt man aus (12) in Verbindung mit (15) die Pole der für $0<|q|<1$ meromorphen Funktion $H(b, q; x)$; es sind die Werte $x=-q^{-n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

§ 5. Bemerkt sei noch, daß in unseren Funktionen als Grenzfall auch die Exponentialfunktion steckt. Es ist nämlich, wie sofort zu sehen,

$$\lim_{q\to 1} G(b, q; (1-q)x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b^\lambda x^\lambda}{\lambda!(1+b)^\lambda} = \exp\left(\frac{bx}{1+b}\right),$$

$$\lim_{q\to 1} H(b, q; (1-q)x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-x)^\lambda}{\lambda!(1+b)^\lambda} = \exp\left(\frac{-x}{1+b}\right).$$

Die Formeln (11, (12), (13) gehen bei diesem Grenzprozeß in simple Beziehungen über, die auf das Additionstheorem der Exponentialfunktion hinauslaufen, während die Kettenbruchformeln sogar nur in $1=1$ übergehen.

München 27, Friedrich-Herschel-Str. 11

(Eingegangen am 4. Juni 1958)

DEKKER, J. C. E.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 250–262 (1958)

The Factorial Function for Isols*)

By

J.C.E. DEKKER

1. INTRODUCTION. The reader is assumed to be familiar with the first two sections of [*1*]. S. TENNENBAUM suggested to the author a definition of $X!$ in Λ which is an extension of the factorial function in ε[1]). In the present paper we shall establish a few properties of this factorial function in Λ, in particular:

$$(X+1)! = (X+1)\cdot X!, \tag{1.1}$$

$$Y \leqq X \Rightarrow Y! \,|\, X!. \tag{1.2}$$

As a side result we shall extend the function

$$C(x,y) = \frac{x!}{y!\,(x-y)!} \quad \text{for } y \leqq x,$$

from $\varepsilon \times \varepsilon$ to $\Lambda \times \Lambda$ and prove for this extension:

$$Y+1 \leqq X \Rightarrow C(X+1, Y+1) = C(X,Y) + C(X, Y+1).$$

We do not know whether the function $X!$ as defined below is the only extension of $x!$ from ε to Λ which satisfies (1.1) and (1.2).

2. THE DEFINITION. In the following the word *permutation* will only be used in the restricted sense of a permutation of ε which maps almost all elements of ε onto themselves. Under this agreement every permutation is a recursive function of one variable. It is readily verified that for every permutation p,

$$\{x \,|\, p(x) \neq x\} = \{p(x) \,|\, p(x) \neq x\}.$$

We define

$$\pi p = \{x \,|\, p(x) \neq x\}.$$

A permutation p is said to be *given* if the elements and the cardinality of the finite set πp are given and also the image under p of every element in πp. The proof of the following proposition is left to the reader.

---

*) Presented to the American Mathematical Society, October 26, 1957.

[1]) The author is indebted to Mr. S. TENNENBAUM for his permission to use this definition.

P1. *There exists a recursive function $p_n(x)$ of n and x such that:*

(a) for every n, $p_n(x)$ is a permutation,

(b) $p_0(x)$ is the identity, i.e., $\pi p_0 = o$,

(c) for any permutation $p(x)$ there is exactly one number i such that $p(x) = p_i(x)$, and given $p(x)$, i can be effectively found.

It is clear that there are denumerably many functions $p_n(x)$ with the properties listed in P1. From now on we assume, however, that one such function has been selected once and for all. We define:

$$\mathfrak{P}_\sigma = \{p_n \mid \pi p_n < \sigma\}$$

$$\sigma! = \{n \mid p_n \in \mathfrak{P}_\sigma\} = \{n \mid \pi p_n < \sigma\}.$$

Note that $o! = (0)$. The cardinality of any set σ will be denoted by $\mathrm{card}(\sigma)$, but this notation will only be used in case σ is finite. We shall write $fg(x)$ for $f(g(x))$.

A function $f(x)$ is called *special* if it has the following four properties: (1) δf is finite, (2) $\delta f = \varrho f$, (3) f is one-to-one, (4) $x \in \delta f$ implies $f(x) \neq x$. The special function $f(x)$ is said to be *given* if both the elements and the cardinality of δf are given and also the image under f of every element in δf.

P2. *There exists a partial recursive function $b_n(x)$ of n and x such that:*

(a) for every n, $b_n(x)$ is a special function,

(b) $b_0(x)$ is nowhere defined, i.e., $\delta b_0 = o$,

(c) for any special function $f(x)$ there is exactly one number i such that $f(x) = b_i(x)$, and given $f(x)$, i can be effectively found.

PROOF. If for every n, $b_n(x)$ is the restriction of $p_n(x)$ to the domain πp_n, the function $b_n(x)$ of n and x satisfies the requirements.

From now on we assume that $b_n(x)$ denotes the function defined in terms of $p_n(x)$ as described in the proof of P2.

P3. $\sigma! = \{n \mid \delta b_n < \sigma\}$.

PROOF. Left to the reader.

P4. $\sigma \simeq \tau \Rightarrow \sigma! \simeq \tau!$.

PROOF. Assume $\sigma \simeq \tau$; let $q(x)$ be a partial recursive one-to-one function such that $\sigma < \delta q$ and $q(\sigma) = \tau$. Put $\eta = \{n \mid \delta b_n < \delta q\}$. For every $n \in \eta$ we associate with the function b_n a function $c_n = \Phi\langle b_n \rangle$ in the following manner:

$$\left.\begin{aligned} c_0(x) &= b_0(x), \\ \delta c_n &= q(\delta b_n) \\ c_n q(x) &= q\, b_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{for } n \geqq 1.$$

It is readily seen that for every $n \in \eta$ the function c_n is special and that Φ is effective and one-to-one. There exists a partial recursive one-to-one function $r(n)$ such that $\delta r = \eta$ and $c_n = b_{r(n)}$. Hence

$$n \in \sigma! \Leftrightarrow \delta b_n < \sigma \Leftrightarrow \delta b_{r(n)} < \tau \Leftrightarrow r(n) \in \tau!$$

This implies $\sigma! \simeq \tau!$.

P5. *σ isolated $\Leftrightarrow$ $\sigma!$ isolated.*

PROOF. We establish the contrapositives of the two conditionals. Assume $\sigma!$ not isolated; let δ be an infinite r.e. subset of $\sigma!$. Then the set $\gamma = \Sigma\pi\mathfrak{p}_n$ with n ranging over δ is an infinite r.e. subset of σ. Now assume σ is not isolated; let η be an infinite r.e. subset of σ and e_n a one-to-one recursive function ranging over η. There must now exist a one-to-one recursive function $t(n)$ such that:

$$\mathfrak{p}_{t(n)}(e_{2n}) = e_{2n+1}, \quad \mathfrak{p}_{t(n)}(e_{2n+1}) = e_{2n}$$
$$\mathfrak{p}_{t(n)}(x) = x \quad \text{for} \quad x \notin (e_{2n}, e_{2n+1}).$$

Then $\tau = \varrho t$ is an infinite r.e. subset of $\sigma!$.

P6. *Let σ be finite. Then $\sigma!$ is finite and*

$$card(\sigma!) = (card\,\sigma)!.$$

PROOF. Let σ be finite and have cardinality k. Then $\sigma! = \{n \mid \pi\mathfrak{p}_n < \sigma\}$ is clearly finite. Let $\mathfrak{F}$ be the family of all one-to-one mappings from σ onto itself. Let for every $f \in \mathfrak{F}$,

$$\Psi\langle f\rangle(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in \sigma, \\ x & \text{for} \quad x \notin \sigma, \end{cases}$$

then Ψ maps $\mathfrak{F}$ one-to-one into $\mathfrak{P}_\sigma$. For every $g \in \mathfrak{P}_\sigma$ there exists an $f \in \mathfrak{F}$ such that $\Psi\langle f\rangle = g$, namely, the restriction of g to the domain σ. $\mathfrak{P}_\sigma$ has therefore the same cardinality as $\mathfrak{F}$. Thus $\text{card}(\sigma!) = k! = (\text{card}\,\sigma)!$.

DEFINITION. $X! = \text{Req}\,\xi!$ for any $\xi \in X$.

This definition is independent of the choice of the set $\xi \in X$ by P4. The system Λ is closed under the factorial function by P5. The function $X!$ is an extension of the function $x!$ by P6. Note that $0! = 1$, since $o! = (0)$.

In addition to the properties of Λ listed in section 2 of [1] we shall use:

(2.1) $$AC = BC \,\&\, C \neq 0 \Rightarrow A = B$$

which is proved in [2]. If $B \mid A$ and $B \neq 0$, the unique element X such that $BX = A$ is denoted by A/B. We clearly have:

(2.2) $$B \neq 0 \,\&\, C \neq 0 \,\&\, B \mid A \Rightarrow BC \mid AC \,\&\, \frac{AC}{BC} = \frac{A}{B},$$

(2.3) $$C \neq 0 \,\&\, BC \mid AC \Rightarrow B \mid A,$$

(2.4) $$C \neq 0 \,\&\, C \mid A \,\&\, C \mid B \Rightarrow C \mid A + B \,\&\, \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}.$$

3. THE PRINCIPAL THEOREMS.

THEOREM T1. $(A+1)! = (A+1) \cdot A!$.

PROOF. Let $\alpha \in A$, $t \notin \alpha$, $\beta = \alpha + (t)$, then $\alpha! \in A!$, $\beta \in A+1$ and $\beta! \in (A+1)!$. We wish to show that $j(\alpha! \times \beta) \simeq \beta!$. For any family $\mathfrak{P}$ of permutations and any set σ we denote the collection of all ordered pairs $\langle p, s\rangle$ with $p \in \mathfrak{P}$ and $s \in \sigma$ by $\mathfrak{P} \times \sigma$. Let $\mathfrak{P}_t$ denote the family of all permutations which leave t

fixed. We associate with every $\langle p, e\rangle \in \mathfrak{P}_t \times \varepsilon$ a function $q = \Phi\langle p, e\rangle$ defined by

$$\begin{cases} q(x) = p(x) & \text{for} \quad x \neq e \quad \text{and} \quad x \neq t, \\ q(e) = p(t) = t, \\ q(t) = p(e). \end{cases}$$

Note that $q = p$ in case $e = t$, whereas q is obtained from p by interchanging the images of e and t in case $e \neq t$. This shows that Φ maps $\mathfrak{P}_t \times \varepsilon$ into $\mathfrak{P}_t$. We claim:

(I) Φ maps $\mathfrak{P}_\alpha \times \beta$ onto $\mathfrak{P}_\beta$,

(II) Φ is one-to-one.

Proof of (I). We first show:

(α) $\pi p < \pi q < \pi p + (e, t)$.

Let $x_0 \in \pi p$, i.e., $x_0 \neq p(x_0)$. If $x_0 \notin (e, t)$, $q(x_0) = p(x_0)$, hence $q(x_0) \neq x_0$ and $x_0 \in \pi q$. Now assume $x_0 \in (e, t)$. Observe that $x_0 \neq t$, because $p(x_0) \neq x_0$. Thus $x_0 = e$; this implies $e \neq t$, since $x_0 \neq t$. However, $q(e) = t$, hence $q(e) \neq e$ and $e \in \pi q$. We conclude that $x_0 \in \pi p$ implies $x_0 \in \pi q$, i.e., $\pi p < \pi q$. Since $q(x)$ is identical with $p(x)$ for $x \notin (e, t)$, the only numbers which might belong to $\pi q - \pi p$ are e and t. We have therefore verified (α). Let $q = \Phi\langle p, e\rangle$, where $p \in \mathfrak{P}_\alpha$, $e \in \beta$. Then $\pi p < \alpha < \beta$, $t \in \beta$ and $e \in \beta$. It follows by (α) that $\pi q < \beta$, i.e., $q \in \mathfrak{P}_\beta$. Thus Φ maps $\mathfrak{P}_\alpha \times \beta$ into $\mathfrak{P}_\beta$. Let $q \in \mathfrak{P}_\beta$. We distinguish two cases.

Case 1. $q(t) = t$. Then $q = \Phi\langle q, t\rangle$, where $\langle q, t\rangle \in \mathfrak{P}_\alpha \times \beta$.

Case 2. $q(t) \neq t$. Then there exist elements a_1 and a_2 in β such that $q(a_1) = t$ and $q(t) = a_2$. Let

$$r(x) = \begin{cases} q(x) & \text{for} \quad x \notin (a_1, t), \\ t & \text{for} \quad x = t, \\ a_2 & \text{for} \quad x = a_1. \end{cases}$$

From $\pi r < \beta = \alpha + (t)$ and $t \notin \pi r$ we infer that $\pi r < \alpha$. Hence $q = \Phi\langle r, a_1\rangle$ where $\langle r, a_1\rangle \in \mathfrak{P}_\alpha \times \beta$. Since every member of $\mathfrak{P}_\beta$ is the image under Φ of some member of $\mathfrak{P}_\alpha \times \beta$, it follows that Φ maps $\mathfrak{P}_\alpha \times \beta$ onto $\mathfrak{P}_\beta$.

Proof of (II). Let $q = \Phi\langle p, e\rangle$, $q' = \Phi\langle p', e'\rangle$, where $\langle p, e\rangle \neq \langle p', e'\rangle$. To establish $q \neq q'$ we distinguish two cases.

Case 1. $e \neq e'$. Then $p(e) \neq p(e')$, $q(t) = p(e)$ and $q'(t) = p(e')$. Hence $q(t) \neq q'(t)$ and $q \neq q'$.

Case 2. $e = e'$. Then $\langle p, e\rangle \neq \langle p', e'\rangle$ implies $p \neq p'$, say $p(x_1) \neq p'(x_1)$. Either $x_1 \neq e$ or $x_1 = e$. First consider the case $x_1 \neq e$. In view of $p(t) = t = p'(t)$, it is impossible that $x_1 = t$; hence $x_1 \notin (e, t)$. This implies $q(x_1) = p(x_1)$ and $q'(x_1) = p'(x_1)$; since $p(x_1) \neq p'(x_1)$, we now have $q(x_1) \neq q'(x_1)$, hence $q \neq q'$ Now consider the case $x_1 = e$. Then $p(e) \neq p'(e)$, $q(t) = p(e)$ and $q'(t) = p'(e)$. Hence $q(t) \neq q'(t)$ and $q \neq q'$. Thus Φ is one-to-one.

Let $\tau = \{n \mid p_n(t) = t\}$. The mapping Φ is clearly effective. In fact, there must exist a partial recursive function $f(m, y)$ with $\tau \times \varepsilon$ as domain such that

$$\langle n, y\rangle \in \tau \times \varepsilon \Rightarrow \Phi\langle p_n, y\rangle = p_{f(n,y)}.$$

Using the properties of Φ verified above we conclude that f maps $\tau \times \varepsilon$ one-to-one into ε, whereas f maps $\alpha! \times \beta$ onto $\beta!$. Let $k(z)$ and $l(z)$ be the primitive recursive functions such that $j(k(z), l(z)) = z$. Put $g(z) = f(k(z), l(z))$ and $\eta = j(\tau \times \varepsilon)$. Then

$$j(\alpha! \times \beta) < \eta = \delta g, \quad gj(\alpha! \times \beta) = \beta!,$$

where g is partial recursive and one-to-one. Hence $j(\alpha! \times \beta) \simeq \beta!$ and $(A+1) \cdot A! = (A+1)!$.

THEOREM T2. $A! \cdot B! \mid (A+B)!$.

PROOF. We first introduce some notations and terminology. For any two disjoint sets η and ϑ and any $p \in \mathfrak{P}_{\eta+\vartheta}$ we define:

$$\eta[p] = \{x \mid x \in \eta \,\&\, p(x) \in \vartheta\},$$
$$\vartheta[p] = \{x \mid x \in \vartheta \,\&\, p(x) \in \eta\},$$
$$\mathfrak{Q}_{\eta,\vartheta} = \{p \mid p \in \mathfrak{P}_{\eta+\vartheta} \,\&\, \eta[p] = \vartheta[p] = o\}.$$

The family $\mathfrak{Q}_{\eta,\vartheta}$ consists therefore of all members of $\mathfrak{P}_{\eta+\vartheta}$ which map η onto itself and ϑ onto itself. The permutation $p \in \mathfrak{P}_{\eta+\vartheta}$ is said to have the property $\Pi_{\eta,\vartheta}$ if

(1) $x, y \in \eta[p] \,\&\, x < y \Rightarrow p(x) < p(y)$,

(2) $x, y \in \vartheta[p] \,\&\, x < y \Rightarrow p(x) < p(y)$,

(3) $x \notin \eta[p] + \vartheta[p] \Rightarrow p(x) = x$.

Thus, a member of $\mathfrak{P}_{\eta+\vartheta}$ has $\Pi_{\eta,\vartheta}$ if it maps $\eta[p]$ and $\vartheta[p]$ on each other in the order-preserving manner, and acts otherwise as the identity; each such permutation p has the property that p^2 equals the identity.

LEMMA. *Let η and ϑ be disjoint, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\eta+\vartheta}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\eta,\vartheta}$ and $\mathfrak{T}$ = the family of all members of $\mathfrak{P}$ which have $\Pi_{\eta,\vartheta}$. Then*

(a) $\mathfrak{Q}$ is a subgroup of $\mathfrak{P}$,

(b) $u \in \mathfrak{P} \Rightarrow \eta[u] \sim \vartheta[u]$,

(c) the members $u, v \in \mathfrak{P}$ belong to the same right coset of $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$ if and only if $\eta[u] = \eta[v]$ and $\vartheta[u] = \vartheta[v]$,

(d) every right coset of $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$ contains exactly one member of $\mathfrak{T}$.

PROOF OF (a). Obvious.

PROOF OF (b). Let $x_0 \in \eta[u]$, then $x_0 \in \eta$ and $u(x_0) \in \vartheta$. Put $u^{n+1}(x_0) = uu^n(x_0)$ for $n \geqq 1$. If $u^n(x_0) \in \vartheta$ for every $n \geqq 1$, $u^n(x_0)$ would generate an infinite subset of πu, contradicting the fact that πu is finite. Hence

$$n_0 = (\mu z)\,[z \geqq 1 \,\&\, u^{z+1}(x_0) \notin \vartheta]$$

exists. Put

$$h(x_0) = u^{n_0}(x_0),$$

then $h(x_0) \in \vartheta[u]$. Thus $h(x)$ maps the finite set $\eta[u]$ into the finite set $\vartheta[u]$ and it is easily seen that h is one-to-one. Similarly one proves that $\vartheta[u]$ can be mapped one-to-one into $\eta[u]$. We conclude that $\eta[u] \sim \vartheta[u]$.

PROOF OF (c). Assume $\mathfrak{Q}u = \mathfrak{Q}v$, i.e., $uv^{-1} \in \mathfrak{Q}$ and $vu^{-1} \in \mathfrak{Q}$. We wish to prove $\vartheta[v] < \vartheta[u]$. Suppose $b \in \vartheta[v]$; put $a = v(b)$. Then $b \in \vartheta$, $a \in \eta$ and $b = v^{-1}(a)$. Hence

$$\left.\begin{array}{r} uv^{-1}(a) = u(b) \\ uv^{-1} \in \mathfrak{Q} \,\&\, a \in \eta \Rightarrow uv^{-1}(a) \in \eta \end{array}\right\} \Rightarrow u(b) \in \eta.$$

From $b \in \vartheta$ and $u(b) \in \eta$ we infer $b \in \vartheta[u]$. Thus $\vartheta[v] < \vartheta[u]$. Using $vu^{-1} \in \mathfrak{Q}$ we can similarly prove $\vartheta[u] < \vartheta[v]$. It follows that $\vartheta[u] = \vartheta[v]$. The relation $\eta[u] = \eta[v]$ can be established likewise. This concludes the proof of the conditional from the left to the right. We proceed to establish the conditional from the right to the left by proving its contrapositive. Suppose u and v do not belong to the same right coset of $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$, i.e., suppose $uv^{-1} \notin \mathfrak{Q}$. Then

$$(3.1) \qquad (\exists x)\left[(x \in \eta \,\&\, uv^{-1}(x) \in \vartheta) \vee (x \in \vartheta \vee uv^{-1}(x) \in \eta)\right].$$

Using the same reasoning as in the proof of (b) we see that if uv^{-1} maps an element of ϑ into η, it also maps an element of η into ϑ. Thus (3.1) implies that $uv^{-1}(x) \in \vartheta$ for some $x \in \eta$, say x_1; we now have $x_1 \in \eta$ and $uv^{-1}(x_1) \in \vartheta$. Putting $v^{-1}(x_1) = z$ we get

$$(3.2) \qquad v(z) \in \eta \,\&\, u(z) \in \vartheta.$$

Either $z \in \eta$ or $z \in \vartheta$; using (3.2) we see that in the former case $z \notin \eta[v]$ and $z \in \eta[u]$, whereas in the latter case $z \in \vartheta[v]$ and $z \notin \vartheta[u]$. Anyhow, either $\eta[u] \neq \eta[v]$ or $\vartheta[u] \neq \vartheta[v]$.

PROOF OF (d). Let $\mathfrak{Q}r$ be a right coset of $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$, then $\eta[r] \sim \vartheta[r]$ by (b). Let p be the permutation such that

(1) p maps $\eta[r]$ onto $\vartheta[r]$ and is strictly increasing on $\eta[r]$,
(2) p maps $\vartheta[r]$ onto $\eta[r]$ and is strictly increasing on $\vartheta[r]$,
(3) $p(x) = x$ for $x \notin \eta[r] + \vartheta[r]$.

Such a permutation p exists, because $\eta[r] \sim \vartheta[r]$; it belongs to $\mathfrak{Q}r$, since $\eta[p] = \eta[r]$ and $\vartheta[p] = \vartheta[r]$; finally, it has $\Pi_{\eta,\vartheta}$. There is clearly only one permutation satisfying the three conditions and every member of $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{Q}r$ must satisfy them. Thus $\mathfrak{Q}r$ contains exactly one member of $\mathfrak{T}$, namely p. This completes the proof of the lemma.

Let α and β be separable isolated sets, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\alpha < \bar{\alpha}$, $\beta < \bar{\beta}$, where $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ are r.e. and disjoint. Put $\gamma = \alpha + \beta$, $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$,

$$\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}_{\bar{\gamma}}, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\gamma}, \quad \bar{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\alpha,\beta},$$
$$\bar{\mathfrak{T}} = \{p \mid p \in \bar{\mathfrak{P}} \,\&\, p \text{ has } \Pi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}\},$$
$$\mathfrak{T} = \{p \mid p \in \mathfrak{P} \,\&\, p \text{ has } \Pi_{\alpha,\beta}\},$$
$$\bar{\lambda} = \{n \mid p_n \in \bar{\mathfrak{Q}}\}, \quad \bar{\tau} = \{n \mid p_n \in \bar{\mathfrak{T}}\}.$$

Thus $\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{Q} \subset \overline{\mathfrak{Q}}$, $\mathfrak{T} \subset \overline{\mathfrak{T}}$, $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{Q}}\,\overline{\mathfrak{T}}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{T}$. If we effectively generate the r.e. sets $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ and simultaneously the sequence $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... of all permutations, we can also effectively generate the sets $\bar{\lambda}$ and $\bar{\tau}$. We may assume without loss of generality that both $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ are infinite (even if α or β is finite). Thus $\overline{\mathfrak{Q}}$ and $\overline{\mathfrak{T}}$ are infinite and there exist one-to-one recursive functions $\bar{q}(n)$ and $\bar{t}(n)$ such that $\bar{\lambda} = \varrho\bar{q}$, $\bar{q}(0) = 0$, $\bar{\tau} = \varrho\bar{t}$, $\bar{t}(0) = 0$. Put

$$u_i = p_{\bar{q}(i)}, \qquad v_k = p_{\bar{t}(k)}.$$

The family $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{Q}}\,\overline{\mathfrak{T}}$ of permutations can now be tabulated as follows:

$\overline{\mathfrak{Q}}$	$\overline{\mathfrak{Q}}v_0$	$\overline{\mathfrak{Q}}v_1$	$\overline{\mathfrak{Q}}v_2$	...
u_0	u_0v_0	u_0v_1	u_0v_2	...
u_1	u_1v_0	u_1v_1	u_1v_2	...
u_2	u_2v_0	u_2v_1	u_2v_2	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...

Since $\bar{q}(0) = \bar{t}(0) = 0$ we have the identity permutation as the upper left hand entry in this table; $\overline{\mathfrak{Q}}$ itself is listed in the first column and $\overline{\mathfrak{T}}$ itself in the first row. The columns are the right cosets of $\overline{\mathfrak{Q}}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$; each column contains exactly one element of $\overline{\mathfrak{T}}$ and that element occurs in the first row. We claim

$$u_iv_k \in \mathfrak{P} \Leftrightarrow u_i \in \mathfrak{Q} \,\&\, v_k \in \mathfrak{T}. \tag{3.3}$$

The conditional from the right to the left is obvious. Now assume $u_iv_k \in \mathfrak{P}$.

$$u_iv_k \in \overline{\mathfrak{Q}}v_k \Rightarrow \bar{\alpha}[u_iv_k] = \bar{\alpha}[v_k],$$

$$u_iv_k \in \mathfrak{P} \Rightarrow \bar{\alpha}[u_iv_k] < \alpha.$$

It follows that $\bar{\alpha}[v_k] < \alpha$; similarly one can prove $\bar{\beta}[v_k] < \beta$. Hence $v_k \in \mathfrak{P}$. Combining this with $u_iv_k \in \mathfrak{P}$ we obtain $u_i \in \mathfrak{P}$. We now see that $u_i \in \overline{\mathfrak{Q}}$ and $u_i \in \mathfrak{P}$ imply $u_i \in \mathfrak{Q}$, while $v_k \in \mathfrak{P}$ and $v_k \in \overline{\mathfrak{T}}$ imply $v_k \in \mathfrak{T}$. This completes the proof of (3.3). Putting

$$\lambda = \{n \mid p_n \in \mathfrak{Q}\}, \qquad \tau = \{n \mid p_n \in \mathfrak{T}\},$$

we can rewrite (3.3) as follows:

$$\text{for } x \in \bar{\lambda},\ y \in \bar{\tau}, \quad p_xp_y \in \mathfrak{P} \Leftrightarrow x \in \lambda \,\&\, y \in \tau. \tag{3.4}$$

There clearly exists a recursive function $f(n)$ such that $p_{f(n)} = p_{k(n)}p_{l(n)}$, where $k(n)$ and $l(n)$ are the functions such that $j(k(n), l(n)) = n$. Let $g(n)$ be the restriction of $f(n)$ to the domain $j(\bar{\lambda} \times \bar{\tau})$. If n ranges over δg, the ordered pair $(k(n), l(n))$ ranges over $\bar{\lambda} \times \bar{\tau}$ and $p_{g(n)}$ over $\overline{\mathfrak{Q}}\,\overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{P}}$. The function $g(n)$ is partial recursive and one-to-one, since $\overline{\mathfrak{Q}}$ is a subgroup of $\overline{\mathfrak{P}}$ and $\overline{\mathfrak{Q}}\,\overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{P}}$. In view of (3.4) we have

$$g(n) \in \gamma! \Leftrightarrow k(n) \in \lambda \,\&\, l(n) \in \tau,$$

$$g(n) \in \gamma! \Leftrightarrow n \in j(\lambda \times \tau).$$

Thus $\gamma! \simeq j(\lambda \times \tau)$. Let $L = \operatorname{Req} \lambda$ and $T = \operatorname{Req} \tau$, then

$$(A+B)! = L \cdot T. \tag{3.5}$$

It follows from the definitions of $\overline{\Omega}$, $\Omega_{\bar{\alpha}}$ and $\Omega_{\bar{\beta}}$ that $\overline{\Omega} \cong \Omega_{\bar{\alpha}} \times \Omega_{\bar{\beta}}$. In fact, if p_x ranges over $\Omega_{\bar{\alpha}}$ and p_y ranges independently over $\Omega_{\bar{\beta}}$, then $p_x p_y$ ranges over $\overline{\Omega}$. Let $h(n)$ be the restriction of the function $f(n)$ to the domain $j(\bar{\alpha}! \times \bar{\beta}!)$. Then $h(n)$ is a partial recursive one-to-one function which maps $j(\bar{\alpha}! \times \bar{\beta}!)$ onto $\bar{\lambda}$ and $j(\alpha! \times \beta!)$ onto λ. Thus $\lambda \simeq j(\alpha! \times \beta!)$, i.e., $L = A!B!$. Combining this with (3.5) we get $A!B! \mid (A+B)!$.

REMARK. The isol T is uniquely determined by $(A+B)!$ and $A!B!$ in view of (2.1). The proof of T2 enables us to define a representative of T in terms of α and β. It is clear that the class Q of all finite sets can be effectively generated without repetitions in a sequence $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ such that $\varrho_0 = o$, and given n both the elements and the cardinality of ϱ_n can be effectively found. In terms of a specific enumeration $\{\varrho_n\}$ of Q with these properties we define:

$$\overline{\Gamma} = \{(\varrho_x, \varrho_y) \mid \varrho_x \sim \varrho_y \,\&\, \varrho_x \subset \bar{\alpha} \,\&\, \varrho_y \subset \bar{\beta}\},$$

$$\Gamma = \{(\varrho_x, \varrho_y) \mid \varrho_x \sim \varrho_y \,\&\, \varrho_x \subset \alpha \,\&\, \varrho_y \subset \beta\}.$$

There clearly exists an effective one-to-one correspondence between $\overline{\Gamma}$ and $\overline{\mathfrak{T}}$ under which Γ corresponds to $\mathfrak{T}$. Put

$$\tau_{\alpha,\beta} = \{n \mid \varrho_{k(n)} \sim \varrho_{1(n)} \,\&\, \varrho_{k(n)} \subset \alpha \,\&\, \varrho_{1(n)} \subset \beta\}.$$

Then $\tau \simeq \tau_{\alpha,\beta}$, hence $\tau_{\alpha,\beta} \in T$.

4. COROLLARIES. In this section we shall discuss some properties of the factorial function in Λ which follow from its definition and the theorems T1 and T2. First of all we show that the proposition

$$1 \leqq k \leqq X \Rightarrow k! \mid X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1)$$

mentioned in [1] [formula (2.15)] can now be proved in a few lines. Assume the hypothesis and put $A = X-k$, $B = k$. Then

$$(X-k)! \cdot k! \mid X!$$

$$X! = X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1) \cdot (X-k)!$$

by T2 and T1 respectively. In view of (2.3) we conclude that $k!$ divides $X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1)$.

P7. $X_1! \cdot \ldots \cdot X_n! \mid (X_1 + \cdots + X_n)!$.

PROOF. T2 and induction.

P8. $(X!)^m \mid (mX)!$.

PROOF. For $m = 0$ the relation reduces to 1 divides 1. For $m \geqq 1$ the relation follows from P7 by taking $n = m$, $X_1 = X_2 = \cdots = X_m = X$.

P9. $Y \leqq X \Rightarrow Y! \cdot (X-Y)! \mid X!$.

PROOF. Under the hypothesis we can express X as $Y+(X-Y)$

Note that P9 implies that $Y!|X!$ for $Y\leqq X$, i.e., (1.2).

DEFINITION. $C(X,Y)=\dfrac{X!}{Y!(X-Y)!}$ for $Y\leqq X$.

Since $Z!\geqq 1$ for all $Z\in\Lambda$ it follows from T2 and (2.1) that $C(X, Y)$ is uniquely determined for any two isols X and Y such that $Y\leqq X$. In case both X and Y are finite, $C(X, Y)$ is the ordinary binomial coefficient. The reader will easily verify

P10. $\begin{cases} C(X,0)=C(X,X)=1 \\ C(X,Y)=C(X,X-Y) \quad \text{for} \quad Y\leqq X. \end{cases}$

P11. $Y+1\leqq X\Rightarrow C(X+1,Y+1)=C(X,Y+1)+C(X,Y)$.

PROOF. Assume the hypothesis. Then all isols involved exist. The equality can now be proved as in the special case that X and Y are finite by using T1, (2.2) and (2.4) instead of the corresponding properties of ordinary numbers. Note that $Y<X$, hence $X-Y>0$. This permits us to multiply numerator and denominator of a fraction by $X-Y$. Since $(X+1)-(Y+1)=X-Y$ we have

$$C(X+1,Y+1)=\frac{(X+1)!}{(Y+1)!(X-Y)!}\cdot$$

The desired equality now follows from

$$C(X,Y+1)+C(X,Y)=\frac{X!(X-Y)+X!(Y+1)}{(Y+1)!\,(X-Y)!}=\frac{(X+1)!}{(Y+1)!(X-Y)!}\cdot$$

The next theorem involves 2^X and X^X. We shall therefore briefly discuss exponentiation in Λ. The function $f(x)$ from ε into ε is called *finite* if it is almost identical zero, i.e., if $\{x|f(x)\neq 0\}$ is finite. Thus every finite function is recursive. With every finite function $f(x)$ we associate the sets

$$\delta_e f=\{x|f(x)\neq 0\} \quad \text{and} \quad \varrho_e f=\{f(x)|f(x)\neq 0\}.$$

The finite function $f(x)$ is *given* if both the elements and the cardinality of $\delta_e f$ are given and also the image under f of each element in $\delta_e f$. The following proposition is proved in [2]. There exists a recursive function $r_n(x)$ of n and x such that

(a) for every n, $r_n(x)$ is a finite function,

(b) $r_0(x)=0$ for every x,

(c) for every finite function $f(x)$ there is exactly one number i such that $f(x)=r_i(x)$, and given $f(x)$, i can be effectively found.

From now on we assume that one such function $r_n(x)$ has been selected once and for all.

DEFINITIONS. $\alpha^\beta=\{n|\,\delta_e r_n\subset\beta\ \&\ \varrho_e r_n\subset\alpha\}$,

$$0^B=\begin{cases} 1 & \text{for} \quad B=0, \\ 0 & \text{for} \quad B\neq 0, \end{cases}$$

$$A^B=\operatorname{Req}\alpha^\beta, \quad \text{for} \quad A\neq 0, \quad 0\in\alpha\in A, \quad \beta\in B.$$

It can be shown that this definition of A^B is unique and that Λ is closed under this operation. The following properties of exponentiation are proved in [2]:

(4.1) $\quad A^B A^C = A^{B+C}; \quad (A^B)^C = A^{BC}; \quad (AB)^C = A^C B^C,$

(4.2) $\quad$ let $A, B, C \geqq 2$; $\quad$ then $\quad A < B \Rightarrow A^C < B^C \,\&\, C^A < C^B,$

(4.3) $\quad$ let $n \geqq 1$; $\quad$ then $X \in \Lambda - \varepsilon \Rightarrow X^n < 2^X.$

THEOREM T3. $X > 3 \Rightarrow 2^X < X! < X^X$.

PROOF. Since the assertion is obvious if X is finite, we restrict our attention to the case that X is infinite.

(1) For every number n one can effectively decide whether $\varrho r_n \subset (0, 1)$. Thus there exists a one-to-one recursive function $s(n)$ such that all finite functions which assume only values in $(0, 1)$ are generated without repetitions in the sequence $r_{s(0)}(x), r_{s(1)}(x), \ldots$. We put $\varrho_n = \{x \mid r_{s(n)}(x) = 1\}$. The function $r_{s(n)}(x)$ is therefore the characteristic function of ϱ_n, and $\{\varrho_n\}$ is a sequence in which all finite sets are generated without repetitions such that given n both the elements and the cardinality of ϱ_n can be effectively found. We may assume without loss of generality that $s(0) = 0$; hence $\varrho_0 = o$. We define $2^\alpha = \{n \mid \varrho_n \subset \alpha\}$; thus $\alpha \in A$ implies $2^\alpha \in 2^A$. Let $\mathfrak{B}$ denote the family of all special functions (see Section 2) and $b_n(x)$ the partial recursive function mentioned in P2. We denote the class of all finite sets which are either empty or contain at least two elements by Q_1. We define a mapping Φ from Q_1 into $\mathfrak{B}$ as follows: $\Phi\langle o\rangle = b_0$; if $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$, where $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $n \geqq 1$ then $\Phi\langle\alpha\rangle = f(x)$, where

$$\delta f = \alpha, \quad f(a_i) = a_{i+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqq i \leqq n-1, \quad f(a_n) = a_0.$$

Let $d(x) = 2x$, $t(x) = 2x + 1$, and $\tau = \varrho t$. Put

$$h(n) = \begin{cases} d(x) & \text{if} \quad \varrho_n \in Q_1 \quad \text{and} \quad \Phi\langle\varrho_n\rangle = b_x, \\ t(x) & \text{if} \quad \varrho_n = (x). \end{cases}$$

Let $\xi \in X$. We now claim:

(a) $h(n)$ is recursive and one-to-one,

(b) $h(2^\xi) < d(\xi!) + t(\xi)$,

(c) $h(2^\xi) \mid \big(d(\xi!) + t(\xi)\big) - h(2^\xi)$,

(d) $\big(d(\xi!) + t(\xi)\big) - h(2^\xi) \neq o$.

Re (a). Left to the reader.

Re (b). Put

$$\eta = \{x \mid (\exists n)\,[\varrho_n \in Q_1 \,\&\, b_x = \Phi\langle\varrho_n\rangle]\},$$

then η is a recursive set. Clearly,

$$\begin{aligned} x \in \xi &\Rightarrow (\exists n)\,[\varrho_n = (x) < \xi] \\ &\Rightarrow (\exists n)\,[n \in 2^\xi \,\&\, h(n) = t(\lambda)] \\ &\Rightarrow t(x) \in h(2^\xi). \end{aligned}$$

Thus $t(\xi) < h(2^\xi)$ and by P3

$$h(2^\xi) = t(\xi) + \{d(x) \mid \delta b_x < \xi \,\&\, x \in \eta\} = t(\xi) + d(\xi! \cdot \eta)$$

which implies (b).

Re (c).

$$h(2^\xi) < \tau + d(\eta)$$
$$\big(d(\xi!) + t(\xi)\big) - h(2^\xi) < d(\xi!) - d(\xi! \cdot \eta) < d(\eta'),$$

where $\tau + d(\eta)$ and $d(\eta')$ are disjoint and recursive. This establishes (c).

Re (d). Let $a, b, c \in \xi$, $a < b < c$. There now exists a number x such that $b_x(c) = b$, $b_x(b) = a$, $b_x(a) = c$, hence

$$d(x) \in \big(d(\xi!) + t(\xi)\big) - h(2^\xi).$$

Combining (a), (b), (c), (d) with

$$2^\xi \in 2^X, \quad d(\xi!) \in X!, \quad d(\xi!) \mid t(\xi), \quad t(\xi) \in X$$

we conclude

(4.4) $$2^X < X! + X.$$

We now prove

(4.5) $$Y \in \Lambda - \varepsilon \Rightarrow 2^{Y+2} < (Y+2)!.$$

For under the hypothesis we have

$$2^{Y+2} = 4 \cdot 2^Y < 4(Y! + Y) \qquad \text{by (4.4)}$$
$$2^{Y+2} < (Y+2) \cdot Y! + (Y+2) \cdot Y! \cdot Y$$
$$2^{Y+2} < (Y+2) \cdot (Y+1) \cdot Y!$$
$$2^{Y+2} < (Y+2)!.$$

The desired result now follows from (4.5), since every $X \in \Lambda - \varepsilon$ can be written in the form $Y+2$, where $Y \in \Lambda - \varepsilon$.

(2) Let again $\mathfrak{B}$ denote the family of all special functions. We write $\mathfrak{C}$ for the family of all finite functions. With every $f \in \mathfrak{B}$ we associate a function $g = \Psi\langle f \rangle$ as follows:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in \delta f, \\ 0 & \text{for} \quad x \notin \delta f. \end{cases}$$

It is clear that Ψ maps $\mathfrak{B}$ into $\mathfrak{C}$. With every $g \in \mathfrak{C}$ we associate a set λg and a function $h = \Xi\langle g \rangle$ as follows:

$$\lambda g = \begin{cases} \varrho_e g & \text{if} \quad g(0) = 0, \\ \varrho_e g + (0) & \text{if} \quad g(0) \neq 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for} \quad x \in \lambda g, \\ \text{undefined for} & x \notin \lambda g. \end{cases}$$

We claim:

$$(4.6)\qquad \begin{cases} \text{If } g\in\mathfrak{C} \text{ and } h=\Xi\langle g\rangle, \\ g\in\Psi\langle\mathfrak{B}\rangle\Leftrightarrow g=\Psi\langle h\rangle \,\&\, h\in\mathfrak{B}. \end{cases}$$

For assume the hypothesis. The conditional from the right to the left is trivial. Now assume $g\in\Psi\langle\mathfrak{B}\rangle$, say $g=\Psi\langle f\rangle$, where $f\in\mathfrak{B}$. We wish to prove $f=h$. Since $f(x)=g(x)$ for $x\in\delta f$ and $f(x)$ is undefined for $x\notin\delta f$, it clearly suffices to prove $\delta f=\lambda g$. Using the fact that f is a special function we have

$$g(0)=0\Rightarrow 0\notin\delta f\Rightarrow 0\notin\varrho f\Rightarrow\varrho f=\varrho_e g$$
$$g(0)\neq 0\Rightarrow 0\in\delta f\Rightarrow 0\in\varrho f\Rightarrow\varrho f=\varrho_e g+(0).$$

This implies $\varrho f=\lambda g$, hence $\delta f=\lambda g$. This completes the proof of (4.6). Thus we see that (a) Ψ maps $\mathfrak{B}$ one-to-one into $\mathfrak{C}$, and (b) given g, we can effectively obtain $h=\Xi\langle g\rangle$ and check whether $g\in\Psi\langle\mathfrak{B}\rangle$ by testing whether h is a special function. Hence there is a one-to-one recursive function $d(n)$ with a recursive range such that $\Psi\langle b_n\rangle=r_{d(n)}$. Put $\delta=\varrho d_n$. Let $\xi\in X$; we may assume without loss of generality that $0\in\xi$. Denote the family of all special functions whose domain and range are included in ξ by $\mathfrak{B}_\xi$ and the family of all finite functions g such that $\delta_e g+\varrho_e g\subset\xi$ by $\mathfrak{C}_\xi$. Since

$$g=\Psi\langle f\rangle\Rightarrow\delta_e g\subset\delta f\,\&\,\varrho_e g\subset\varrho f,$$

we see that Ψ maps $\mathfrak{B}_\xi$ one-to-one into $\mathfrak{C}_\xi$. Let $\vartheta=d(\xi!)$, then $\vartheta\in X!$ by P3; moreover $\vartheta\subset\xi^\xi$. From

$$\vartheta\subset\delta,\quad \xi^\xi-\vartheta\subset\delta',\quad \delta \text{ recursive}$$

we conclude $\vartheta|\xi^\xi-\vartheta$. Put $Y=\mathrm{Req}(\xi^\xi-\vartheta)$, then $X!+Y=X^X$. It remains to be shown that $Y>0$. Let $\{t_n\}$ be an infinite sequence of distinct elements in $\xi-(0)$; let for $n\geqq 1$

$$\begin{cases} r_n^*(y_0)=r_n^*(y_n)=y_0, \\ r_n^*(x)=0 \quad \text{for} \quad x\notin(y_0,y_n). \end{cases}$$

Then $\{r_n^*\}$ is an infinite sequence of distinct functions in $\mathfrak{C}_\xi-\Psi\langle\mathfrak{B}_\xi\rangle$. Hence $\xi^\xi-\vartheta$ is an infinite set and the isol Y is not only greater than zero, but even infinite.

A r.e. set is called *simple* if its complement is immune. For the definition of a hypersimple set the reader is referred to [3, p. 497] or [4, p. 305]. Let S_0 denote the class of all hypersimple sets and S_1 the class of all simple sets. Post proved in [4] that S_0 is non-empty and properly included in S_1. Put

$$\Lambda_0=\{\mathrm{Req}\,\alpha\,|\,\alpha'\in S_0\ \mathbf{v}\ \alpha\in Q\},$$
$$\Lambda_1=\{\mathrm{Req}\,\alpha\,|\,\alpha'\in S_1\ \mathbf{v}\ \alpha\in Q\}.$$

It readily follows from the relations

$$(\alpha+\beta)'=\alpha'\cdot\beta'$$
$$\big(j(\alpha\times\beta)\big)'=j(\varepsilon\times\beta')+j(\alpha'\times\varepsilon)$$
$$(\alpha^\beta)'=\{n\,|\,\delta_e r_n\cdot\beta'\neq o\ \mathbf{v}\ \varrho_e r_n\cdot\alpha'\neq o\}$$

that Λ_1 is closed under addition, multiplication and exponentiation. It is shown in [2] that

(a) Λ_0 is closed under addition, multiplication and exponentiation,

(b) $B \leqq A \,\&\, A \in \Lambda_0 \Rightarrow B \in \Lambda_0$,

(c) $B \leqq A \,\&\, A \in \Lambda_1 \Rightarrow B \in \Lambda_1$.

Thus $[\Lambda_0, +, \cdot]$ is an extension of $[\varepsilon, +, \cdot]$ and $[\Lambda_1, +, \cdot]$ is an extension of $[\Lambda_0, +, \cdot]$. Both Λ_0 and Λ_1 are denumerable, because the classes S_0 and S_1 are denumerable.

Now suppose $X \in \Lambda_1$, then $X^X \in \Lambda_1$. Combining this with the fact that $X! < X^X$ for $X \in \Lambda_1 - \varepsilon$, it follows by (c) that $X! \in \Lambda_1$. Thus Λ_1 is closed under the factorial function. Similarly one can prove using (a), (b) and T3 that Λ_0 is closed under the factorial function.

P12. *There exists a collection of infinite isols in Λ_0 which when ordered by the $<$ relation has order type η*[2]).

PROOF. Let $Y = X!$, where $X \in \Lambda_0 - \varepsilon$. Then $q \mid Y$ for every positive number q and

$$\frac{pY}{q} < \frac{rY}{s} \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

for any four positive numbers p, q, r and s. Thus the collection

$$\Delta = \left\{ \frac{pY}{q} \;\middle|\; p \geqq 1 \,\&\, q \geqq 1 \right\}$$

satisfies the requirements.

References

[1] DEKKER, J. C. E.: Congruences in isols with a finite modulus. Math. Z. **70**, 113–124 (1958). – [2] DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL: Recursive equivalence types, monograph, to be published in 1959 by the University of California Press. – [3] DEKKER, J. C. E.: Two notes on recursively enumerable sets. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 495–501 (1953). – [4] POST, E. L.: Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 284–316 (1944).

Institute for Advanced Study Princeton, U.S.A.

(Eingegangen am 25. Januar 1958)

[2]) This proposition is due to J. MYHILL.

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 263–270 (1958)

Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen

Von
FRIEDRICH KASCH

1. Fragestellung, Voraussetzungen

Eine Zahl ξ heißt bei der Mahlerschen Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen[1]) eine S-Zahl, wenn es positive Zahlen $\varrho, c_1, c_2, c_3, \ldots$ so gibt, daß für jedes ganzzahlige Polynom $F(x) = \sum_i a_i x^i$ vom Grad $n \geqq 1$ und der Höhe $h = \operatorname{Max}_i (|a_i|)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|F(\xi)| \geqq c_n h^{-\varrho n}. \tag{1}$$

Auf Grund des Schubfachschlusses ergibt sich bekanntlich, daß bei einer reellen bzw. komplexen S-Zahl ξ notwendig $\varrho \geqq 1$ bzw. $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ sein muß.

In mehreren Arbeiten ist die Frage nach dem Maß der Menge der S-Zahlen in Abhängigkeit von ϱ untersucht worden. Hierzu besagt zunächst ein Ergebnis von A. J. CHINTSCHIN [1], daß das Maß der Menge der reellen S-Zahlen mit $\varrho = 1$ gleich Null ist. Andererseits zeigte K. MAHLER [6], daß fast alle reellen oder komplexen Zahlen S-Zahlen sind, und zwar bewies er dies für die reellen Zahlen mit $\varrho = 4$ und für die komplexen Zahlen mit $\varrho = \frac{7}{2}$. Richtungweisend für die weitere Entwicklung dieser Frage war die Vermutung von K. MAHLER [6], daß fast alle reellen Zahlen S-Zahlen mit $\varrho = 1 + \varepsilon$ und fast alle komplexen Zahlen S-Zahlen mit $\varrho = \frac{1}{2} + \varepsilon$ zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ seien.

Das Resultat von K. MAHLER wurde zunächst von J. F. KOKSMA [3] verbessert, der zeigte, daß man die Werte $\varrho = 4$ bzw. $\varrho = \frac{7}{2}$ durch 3 bzw. $\frac{5}{2}$ ersetzen kann. Schließlich konnte W. J. LEVEQUE [5] beweisen, daß es auch für die Werte 2 bzw. $\frac{3}{2}$ gültig ist[2]).

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_r(\varrho)$ die Menge der reellen S-Zahlen zu vorgegebenem ϱ in (1) und mit $\mathfrak{M}_k(\varrho)$ die entsprechende Menge der komplexen S-Zahlen. Sei ferner $\mathfrak{M}_r(\varrho, n)$ die Menge der reellen Zahlen ξ, die für feste Werte n und ϱ [und für geeignetes $c_n = c_n(\xi)$] der Ungleichung (1) genügen, und sei $\mathfrak{M}_k(\varrho, n)$ die entsprechende Menge komplexer Lösungen von (1). Dann gilt offenbar

$$\mathfrak{M}_r(\varrho) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_r(\varrho, n), \qquad \mathfrak{M}_k(\varrho) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k(\varrho, n).$$

[1]) Siehe dazu z. B. [8], Kap. III.
[2]) Ein zweiter Beweis für dieses Resultat findet sich in [8], Kap. III.

Sei $\mu(\mathfrak{M})$ das Maß von $\mathfrak{M}$, dann ist aus maßtheoretischen Gründen $\mu(\mathfrak{M}, (\varrho)) = 1$ äquivalent mit $\mu(\mathfrak{M}(\varrho, n)) = 1$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Die Mahlersche Vermutung besagt dann

$$\mu(\mathfrak{M}, (1+\varepsilon, n)) = 1 \tag{2}$$

bzw.

$$\mu(\mathfrak{M}_k(\tfrac{1}{2}+\varepsilon, n)) = 1 \tag{3}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bei dieser Formulierung erhebt sich sofort die Frage, ob man (2) und (3) wenigstens für spezielle Werte von n beweisen könne. Für $n = 1$ ist die Gültigkeit von (2) wohlbekannt und für (3) läßt sie sich sofort verifizieren, sogar für den Wert 0 an Stelle $\frac{1}{2} + \varepsilon$. Von J. KUBILYUS [4] wurde (2) auch für $n = 2$ bewiesen. Er benutzte dabei wesentlich einen Hilfssatz von J. M. VINOGRADOV über trigonometrische Summen, also ein verhältnismäßig tiefliegendes Hilfsmittel. TH. SCHNEIDER schreibt in seinem Buch „Einführung in die transzendenten Zahlen"[3]) über das Resultat von J. KUBILYUS „Einen Anfang zum Beweis dieser (Mahlerschen) Vermutung hat vielleicht J. KUBILYUS gemacht ...".

Es dürfte daher von Interesse sein, für das Resultat von J. KUBILYUS einen ganz einfachen Beweis zu besitzen. Ein solcher Beweis wird im folgenden mitgeteilt. Wesentlich scheint mir dabei zu sein, daß sich dieser Beweis auch auf den komplexen Fall ausdehnen läßt*). Er liefert dort das Resultat: $\mu(\mathfrak{M}_k(\frac{1}{4}+\varepsilon, 2)) = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$, also ein besseres Ergebnis, als es die Mahlersche Vermutung für beliebiges n besagt.

2. Hilfssätze

HILFSSATZ 1. *Sei $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ein Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten und verschiedenen Nullstellen α_1, α_2. Mit $D = D(F)$ werde die Diskriminante von $F(x)$ bezeichnet. Dann gilt für jede komplexe Zahl ξ:*

$$\operatorname{Min}(|\xi - \alpha_1|, |\xi - \alpha_2|) \leq \frac{2}{\sqrt{|D(F)|}} |F(\xi)|.$$

BEWEIS. Sei etwa $\operatorname{Min}(|\xi - \alpha_1|, |\xi - \alpha_2|) = |\xi - \alpha_1|$, dann gilt

$$\sqrt{|D(F)|} = |a_2(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq |a_2|(|\alpha_1 - \xi| + |\xi - \alpha_2|) \leq 2|a_2(\xi - \alpha_2)|.$$

Daraus folgt

$$|\xi - \alpha_1| \leq \frac{2}{\sqrt{|D(F)|}} |a_2(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2)| = \frac{2}{\sqrt{|D(F)|}} |F(\xi)|.$$

HILFSSATZ 2. *Die folgende Summation erstrecke sich über alle Polynome $F(x)$ vom Grad 2, der festen Höhe h und mit verschiedenen Nullstellen. Dann gilt mit einer von h unabhängigen Konstanten γ_0:*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{|D(F)|}} \leq \gamma_0 h. \tag{4}$$

[3]) [8], S. 83.

*) *Zusatz bei der Korr.:* Der Beweis läßt sich auch auf den p-adischen Fall übertragen und liefert auch dort das bestmögliche Resultat.

BEWEIS. Wegen $|D(F)| = |a_1^2 - 4a_0a_2|$ und da mindestens ein Koeffizient gleich $\pm h$ sein muß, gilt

$$\sum \frac{1}{\sqrt{|D(F)|}} \leqq 2 \sum_{\substack{-h \leqq a_0 \leqq h \\ -h \leqq a_2 \leqq h}}' \frac{1}{|h^2 - 4a_0a_2|^{\frac{1}{2}}} + 4 \sum_{\substack{-h \leqq a_1 \leqq h \\ -h \leqq a \leqq h}}' \frac{1}{|a_1^2 - 4ha|^{\frac{1}{2}}}; \tag{5}$$

die erste Summe besitzt den Faktor 2, da $a_1 = \pm h$ sein kann und die zweite den Faktor 4, da $a_0 = \pm h$ und $a_2 = \pm h$ sein können. Der Strich am Summenzeichen soll hier wie im folgenden $h^2 - 4a_0a_2 \neq 0$ bzw. $a_1^2 - 4ha \neq 0$ bedeuten. Betrachten wir jetzt die erste Summe auf der rechten Seite von (5) bei festem $a_0 \neq 0$. Der Ausdruck $|h^2 - 4a_0a_2|$ durchläuft für $-h \leqq a_2 \leqq h$ höchstens $2h+1$ von Null verschiedene Zahlen, von denen je zwei aufeinanderfolgende bis auf höchstens eine Ausnahme alle den Abstand $4|a_0|$ voneinander haben. Die eine Ausnahme kann auftreten, wenn der Ausdruck $h^2 - 4a_0a_2$ das Vorzeichen wechselt. Daher gilt

$$\sum_{-h \leqq a_1 \leqq h}' \frac{1}{|h^2 - 4a_0a_2|^{\frac{1}{2}}} \leqq 2 \sum_{a=0}^{h} \frac{1}{(1 + 4|a_0|a)^{\frac{1}{2}}} \leqq 2 + \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{a=1}^{h} \frac{1}{\sqrt{a}} \leqq 4 \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{|a_0|}}. \tag{6}$$

Damit folgt

$$\sum_{\substack{-h \leqq a_1 \leqq h \\ -h \leqq a_0 \leqq h}}' \frac{1}{|h^2 - 4a_0a_2|^{\frac{1}{2}}} \leqq 4\sqrt{h} \sum_{\substack{-h \leqq a_0 \leqq h \\ a_0 \neq 0}} \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} + \frac{2h+1}{h} \leqq 19h. \tag{7}$$

Aus (6) entnimmt man ferner für die zweite Summe in (5) bei festem a_1:

$$\sum_{-h \leqq a \leqq h}' \frac{1}{|a_1^2 - 4ha|^{\frac{1}{2}}} \leqq 4.$$

Daher erhält man

$$\sum_{\substack{-h \leqq a \leqq h \\ -h \leqq a_1 \leqq h}}' \frac{1}{|a_1^2 - 4ha|^{\frac{1}{2}}} \leqq 4(2h+1) \leqq 12h. \tag{8}$$

Die Abschätzungen (5), (7) und (8) zusammen liefern die Behauptung (4).

Diese beiden Hilfssätze reichen aus, um das Resultat von J. KUBILYUS zu beweisen. Die nächsten Hilfssätze werden für den komplexen Fall gebraucht.

HILFSSATZ 3. *Sei $A(q, m)$ die Anzahl der mod q inkongruenten Lösungen von*

$$x^2 \equiv m \pmod{q}, \tag{9}$$

und sei r^2 der größte gemeinsame quadratische Teiler von q und m. Dann gilt mit einer von q und m unabhängigen Konstanten γ_2

$$A(q, m) \leqq \gamma_2 r q^{\frac{2}{\log\log q}} \text{ [4]}.$$

[4]) Für $q = 1$ ist $q^{\frac{2}{\log\log q}}$ gleich 1 zu setzen; entsprechend im folgenden.

BEWEIS. Setzt man $m' = \frac{m}{r^2}$ und $q' = \frac{q}{r^2}$, dann erhält man aus jeder Lösung x von (9) eine Lösung $x' = \frac{x}{r}$ von

$$x'^2 \equiv m' \pmod{q'}. \tag{10}$$

Umgekehrt liefert jede Lösung x' von (10) eine Lösung $x = rx'$ von (9). Da aus $0 \leqq x < q$ ferner $0 \leqq x' < \frac{q}{r} = rq'$ folgt, hat man die Beziehung $A(q, m) = rA(q', m')$. Ist $q' = 1$, also $q = r^2$, dann gilt $A(q, m) = r$ und die Behauptung ist erfüllt. Im folgenden kann daher $q' > 1$ vorausgesetzt werden. Ist $q' = p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t}$ die Primzahlpotenzzerlegung von q', dann gilt bekanntlich

$$A(q', m') = \prod_{i=1}^{t} A(p_i^{e_i}, m').$$

Ist $(p_i, m') = 1$, dann hat man im Falle $p_i \neq 2$: $A(p_i^{e_i}, m') = 2$ und im Falle $p_i = 2$: $A(p_i^{e_i}, m') \leqq 4$. Sei nun $(p_i, m') \neq 1$, dann muß zunächst $(p_i^{e_i}, m') = p_i$ gelten, da kein quadratischer Faktor auftreten kann. Ist (10) überhaupt lösbar, dann folgt ferner $e_i = 1$. Daraus ergibt sich aber $A(p_i^{e_i}, m') = A(p_i, m') = 1$. Insgesamt folgt $A(q', m') \leqq 2^{t+1}$, wobei also t die Anzahl der verschiedenen Primteiler von q' ist. Sei $d(q')$ die Anzahl aller positiven Teiler von q', dann gilt $2^t \leqq d(q')$. Andererseits besteht die Abschätzung[5])

$$d(q') \leqq \gamma_1 q'^{\frac{2}{\log\log q'}},$$

mit einer von q' unabhängigen Konstanten γ_1. Daher erhält man schließlich

$$A(q, m) = rA(q', m') \leqq \gamma_1 r q'^{\frac{2}{\log\log q'}} \leqq \gamma_2 r q^{\frac{2}{\log\log q}},$$

wobei γ_2 von q und m unabhängig ist[6]).

HILFSSATZ 4[7]). *Voraussetzungen wie in Hilfssatz 2. Dann gilt mit von h unabhängigen Konstanten γ_3 und τ:*

$$\sum \frac{1}{|D(F)|} \leqq \gamma_3 h^{\frac{\tau}{\log\log h}}. \tag{11}$$

BEWEIS. Wir haben die Lösungszahl der diophantischen Gleichung

$$h^2 - 4a_0 a_2 = m$$

bzw.

$$\frac{h^2 - m}{4} = a_0 a_2$$

[5]) Siehe z. B. [7], S. 24, Satz 5.2.

[6]) Die Funktion $x^{\frac{2}{\log\log x}}$ ist für $x \geqq e^e$ monoton wachsend. Daher gilt die letzte Ungleichung für $q' \geqq e^e$. Für die endlich vielen Werte $1 < q' < e^e$ kann die Ungleichung durch Vergrößerung der Konstanten erfüllt werden.

[7]) Auf dem hier eingeschlagenen Weg kann auch $\sum \frac{1}{\sqrt{|D(F)|}} \leqq \gamma h^{1 + \frac{\tau}{\log\log h}}$ bewiesen werden, was an Stelle von Hilfssatz 2 ebenfalls zum Beweis der endgültigen Behauptung im reellen Fall ausreicht.

zu vorgegebenen ganzen Zahlen $h \geqq 1$ und m mit $-3h^2 \leqq m \leqq 5h^2$ in ganzen Zahlen a_0, a_2 zu betrachten. Sie ist nach unserer Bezeichnung gleich $4d\left(\frac{h^2-m}{4}\right)$, falls $\frac{h^2-m}{4}$ eine von 0 und ± 1 verschiedene ganze Zahl ist, d.h. falls $m \neq h^2$ bzw. $m \neq h^2 \pm 4$. Setzt man noch $\left|\frac{h^2-m}{4}\right| = M$, dann gilt zufolge der schon oben benutzten Abschätzung

$$d\left(\frac{h^2-m}{4}\right) = d(M) \leqq \gamma_1 M^{\frac{2}{\log\log M}} \leqq \gamma_2 h^{\frac{4}{\log\log h}}.$$

Daraus folgt

$$(12) \qquad \sum_{\substack{-h \leqq a_0 \leqq h \\ -h \leqq a_2 \leqq h}}{}' \frac{1}{|h^2 - 4a_0a_2|} \leqq 8\gamma_2 h^{\frac{4}{\log\log h}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h^2, \\ m \neq h^2 \pm 4}}^{5h^2} \frac{1}{m} + \frac{6}{h} \leqq \gamma_4 h^{\frac{5}{\log\log h}},$$

wobei γ_4 wie auch die noch folgenden Konstanten $\gamma_5, \gamma_6, \ldots$ von h unabhängig sind.

Sodann haben wir die Lösungszahl der Gleichung

$$(13) \qquad a_1^2 - 4ha = m$$

unter entsprechenden Voraussetzungen wie oben zu bestimmen. Aus Hilfssatz 3 folgt: Die Anzahl der Lösungen von (13) mit $-h \leqq a_1 \leqq h$ ist kleiner oder gleich

$$A(4h, m) \leqq \gamma_5 \tau h^{\frac{2}{\log\log h}}.$$

Daraus folgt, wenn noch $\tau = \tau(m)$ gesetzt wird

$$(14) \qquad \sum_{\substack{-h \leqq a_1 \leqq h \\ -h \leqq a \leqq h}}{}' \frac{1}{|a_1^2 - 4ha|} \leqq 2\gamma_5 h^{\frac{2}{\log\log h}} \sum_{m=1}^{5h^2} \frac{\tau(m)}{m}.$$

Es bleibt noch die rechts stehende Summe abzuschätzen. Zu vorgegebenem $\tau(m) = k_i$ kommen darin höchstens die folgenden Glieder vor:

$$\sum_{i=1}^{5h^2} \frac{k}{ki} \leqq \gamma_6 \log(h+1).$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=1}^{5h^2} \frac{\tau(m)}{m} \leqq d(4h)\, \gamma_6 \log(h+1) \leqq \gamma_7 h^{\frac{3}{\log\log h}}$$

und damit erhält man aus (14)

$$(15) \qquad \sum_{\substack{-h \leqq a_1 \leqq h \\ -h \leqq a \leqq h}}{}' \frac{1}{|a_1^2 - 4ha|} \leqq \gamma_8 h^{\frac{5}{\log\log h}}.$$

Die Abschätzungen (12) und (15) zusammen liefern die Behauptung (11).

3. Beweise

3.1. Wir behandeln zuerst den reellen Fall und zeigen:

Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ hat die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}_r(1+\varepsilon, 2)$ das Maß Null.

Diese Komplementärmenge ist enthalten in der Menge $\mathfrak{N}$ der reellen Zahlen ξ, für die die Ungleichung

$$|F(\xi)| < h^{-2(1+\varepsilon)} \tag{16}$$

unendlich viele Lösungen in Polynomen $F(x)$ vom Grad 2 hat, und es genügt daher $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ zu zeigen. Hat (16) unendlich viele Lösungen, so gibt es auch entweder unendlich viele Lösungen $F(x)$ mit verschiedenen Nullstellen oder unendlich viele Lösungen $F(x)$ mit gleichen Nullstellen. Die Menge der ξ, für die (16) unendlich viele Lösungen mit verschiedenen Nullstellen besitzt, nennen wir $\mathfrak{U}$, die Menge der ξ, für die (16) unendlich viele Lösungen mit gleichen Nullstellen besitzt, sei $\mathfrak{V}$. Dann gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$.

BEHAUPTUNG. $\mu(\mathfrak{U}) = 0$.

Nach der Bezeichnung von Hilfssatz 1 sei $\operatorname{Min}(|\xi - \alpha_1|, |\xi - \alpha_2|) = |\xi - \alpha_1|$, dann folgt aus Hilfssatz 1 und (16):

$$|\xi - \alpha_1| < \frac{2}{\sqrt{|D|}} h^{-2(1+\varepsilon)}. \tag{17}$$

Bezeichnet man zu festem h mit $\mathfrak{U}_h$ die Menge der reellen Zahlen ξ, zu denen es ein $\alpha_1 \neq \alpha_2$ mit (17) gibt, so gilt wegen Hilfssatz 2

$$\mu(\mathfrak{U}_h) \leqq 8h^{-2(1+\varepsilon)} \sum \frac{1}{\sqrt{|D(F)|}} \leqq \gamma_9 h^{-(1+2\varepsilon)}. \tag{18}$$

Der Faktor 8 ergibt sich, weil jedes Polynom zwei Nullstellen hat und die Intervallänge aus (17) zweimal genommen werden muß. Für jedes natürliche r gilt offenbar

$$\mathfrak{U} \leqq \bigcup_{h=r}^{\infty} \mathfrak{U}_h.$$

Da die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} h^{-(1+2\varepsilon)}$ konvergiert, folgt $\mu(\mathfrak{U}) = 0$.

BEHAUPTUNG. $\mu(\mathfrak{V}) = 0$.

Es mögen jetzt unendlich viele Lösungen $F(x)$ von (16) mit $\alpha_1 = \alpha_2$ existieren. Dann kann $F(x)$ in der Form $F(x) = a(bx - c)^2$ geschrieben werden und für die Höhen h von $F(x)$ und h_1 von $bx - c$ gilt $h \geqq h_1^2$. Daher folgt aus (16)

$$|b\xi - c| < h_1^{-2(1+\varepsilon)}. \tag{19}$$

Die Menge der reellen Zahlen ξ, die bei festem h_1 und (sonst) beliebigem b und c diese Gleichung lösen, sei $\mathfrak{V}_{h_1}$. Dann gilt offenbar

$$\mu(\mathfrak{V}_{h_1}) \leqq 4(2h_1 + 1) h_1^{-2(1+\varepsilon)} \leqq \gamma_{10} h_1^{-(1+2\varepsilon)}. \tag{20}$$

Besitzt (16) unendlich viele Lösungen $F(x)=a(bx-c)^2$, so besitzt auch (19) unendlich viele Lösungen $bx-c$. Wie im ersten Fall folgt jetzt $\mu(\mathfrak{B})=0$. Damit haben wir $\mu(\mathfrak{M}_\tau(1+\varepsilon, 2))=1$ für jedes $\varepsilon>0$ vollständig bewiesen.

3.2. Der Beweis für $\mu\left(\mathfrak{M}_h\left(\frac{1}{4}+\varepsilon, 2\right)\right)=1$ für jedes $\varepsilon>0$ wird analog geführt. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ mögen die analoge Bedeutung wie im reellen Fall besitzen. An Stelle von (17) tritt jetzt

$$|\xi-\alpha_1|<\frac{2}{\sqrt{|D|}}h^{-2\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}.$$

Zufolge von Hilfssatz 4 erhält man daraus

$$\mu(\mathfrak{U}_h)\leqq 8\pi h^{-4\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}\sum\frac{1}{|D(F)|}\leqq\gamma_{11}h^{-(1+3\varepsilon)},$$

wobei jetzt an Stelle der Intervalle bei der Abschätzung von $\mu(\mathfrak{U}_h)$ in (18) Kreise mit dem Radius $\frac{2}{\sqrt{|D|}}h^{-2\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}$ getreten sind. Daraus folgt wieder $\mu(\mathfrak{U})=0$. Analog zu (19) gilt jetzt

$$|b\xi-c|<h_1^{-2\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}.$$

Diese Ungleichung hat aber bei nichtreellem $\xi=\xi_1+i\xi_2$ wegen $|b\xi-c|\geqq|b\xi_2|\geqq|\xi_2|$ nur endlich viele Lösungen in linearen Polynomen $bx-c$, woraus sofort $\mu(\mathfrak{B})=0$ folgt.

4. Schlußbemerkung

Es soll hier auf zwei Fragen aufmerksam gemacht werden, die sich im Anschluß an unsere Überlegungen stellen. Zunächst wird man fragen, ob sich die hier mitgeteilten Überlegungen auch auf den Fall $n>2$ ausdehnen lassen. Für Hilfssatz 1 ist das möglich, und man erhält das folgende Resultat, welches eine Verbesserung der entsprechenden Hilfssätze bei I. N. Feldmann[8]) und Th. Schneider[9]) darstellt:

Sei $F(x)$ ein ganzzahliges Polynom von einem Grade $n\geqq 2$ ohne mehrfache Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dann gilt für jede Zahl ξ

$$\operatorname{Min}_i(|\xi-\alpha_i|)\leqq\gamma\frac{h^{n-2}}{\sqrt{|D(F)|}}F|(\xi)|,$$

mit

$$\gamma=(n+1)^{n-2}2^{\frac{n(3n-5)}{2}}.$$

Die Möglichkeit, damit zu einer Verbesserung des im allgemeinen Falle bisher besten Resultates von W. J. Leveque zu gelangen, hängt davon ab, die Summe $\sum\frac{1}{\sqrt{|D(F)|}}$ bzw. $\sum\frac{1}{|D(F)|}$ für festen Grad n und feste Höhe h nichttrivial abzuschätzen[10]).

Die zweite Frage, die sich hier erhebt, besteht darin, ob ein zu dem anfangs erwähnten Resultat von A. Chintschin [1] analoges Resultat auch im komplexen

[8]) [2], Lemma 5.

[9]) [8], S. 78, Hilfssatz 18.

[10]) *Zusatz bei der Korr.:* Siehe dazu die demnächst in den Math. Ann. erscheinende Arbeit von B. Volkmann und dem Verf.: Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen.

Falle gilt. In dieser Hinsicht ist

$$\mu\left(\mathfrak{M}_k\left(\frac{n-1}{2n}, n\right)\right) = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

zu vermuten.

Literatur

[1] CHINTSCHIN, A. J.: Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn PERRON. Math. Z. **22**, 274–284 (1925). – [2] FELDMANN, N. I.: Approximation einiger transzendenter Zahlen I (russ.). Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. matm. **15**, 53–74 (1951). – [3] KOKSMA, J. F.: Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen. Monatshefte für Math. und Physik **48**, 176–189 (1939). – [4] KUBILYUS, J.: Über die Anwendung einer Vinogradowschen Methode auf die Lösung eines Problems aus der metrischen Zahlentheorie (russ.). Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **67**, 783–786 (1949). – [5] LEVEQUE, W. J.: Note on S-Numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 189–190 (1953). – [6] MAHLER, K.: Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann. **106**, 131–139 (1932). – [7] PRACHAR, K.: Primzahlverteilung. Berlin: Springer 1957. – [8] SCHNEIDER, TH.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin: Springer 1957.

Heidelberg, Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 13. Mai 1958)

FAN, K.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 271–280 (1958)

On the Equilibrium Value of a System of Convex and Concave Functions

By
KY FAN

1. Let S denote the $(n-1)$-dimensional simplex formed by all those points $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in the Euclidean n-space E^n whose coordinates satisfy $x_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ and $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. For each index $i = 1, 2, \ldots, n$, let

$$S_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S \mid x_i = 0\}.$$

We shall be concerned with a system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ of $2n$ real-valued functions which are defined on S and satisfy the following conditions:

(a) *Each f_i is continuous and convex*[1]) *on S.*
(b) *Each g_i is continuous, concave and positive on S.*
(c) *$f_i(x) \leqq 0$ for $x \in S_i$.*
(d) *For each $x \in S$, there is an index i for which $f_i(x) > 0$.*

A real number λ will be called an *equilibrium value* of the system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, if there exists a point $x \in S$, called an *equilibrium point*, satisfying the n equations

$$g_i(x) = \lambda f_i(x) \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{1}$$

The purpose of this note is to establish certain properties of the (necessarily unique) equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Our results may be regarded as a non-linear generalization of certain known theorems concerning the maximal eigenvalue of a matrix with positive elements.

2. Throughout this section, the system of functions $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ are assumed to satisfy the conditions (a), (b), (c), (d) previously stated. Besides the notation S, S_i $(1 \leqq i \leqq n)$ already explained, we shall also use the notation $\overset{\circ}{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S \mid x_i > 0 \text{ for } 1 \leqq i \leqq n\}$.

LEMMA 1. *For any two distinct points x, y of S given in this order, there is an index i for which either $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{f_i(y)}{g_i(y)}$, or both $f_i(x)$, $f_i(y)$ are $\leqq 0$.*

Proof. If $x \in S_i$ for some i, then $f_i(x) \leqq 0$ by (c). For this index i, either $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{f_i(y)}{g_i(y)}$, or both $f_i(x)$, $f_i(y)$ are $\leqq 0$, according to whether $f_i(y) > 0$ or $f_i(y) \leqq 0$.

[1]) As usual, a real-valued function f defined on S is said to be *convex*, if $f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$ holds for any two points x, y of S and for any $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ with $\alpha + \beta = 1$. f is said to be *concave* if $-f$ is convex.

Next assume $x \in \mathring{S}$. We can find a point z such that $x = \alpha y + \beta z$ with $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ and $z \in S_i$ for some i. Consider now this index i. By (a), (c), we have $f_i(x) \leqq \alpha f_i(y) + \beta f_i(z) \leqq \alpha f_i(y)$. If $f_i(y) > 0$, then by (b), $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leqq \frac{\alpha f_i(y)}{\alpha g_i(y) + \beta g_i(z)} < \frac{f_i(y)}{g_i(y)}$. If $f_i(y) \leqq 0$, then both $f_i(x)$, $f_i(y)$ are $\leqq 0$.

THEOREM 1. *The system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ has a unique equilibrium value λ and a unique equilibrium point $\hat{x}$. We have*

$$\lambda > 0, \quad \hat{x} \in \mathring{S}, \tag{2}$$

and

$$\frac{1}{\lambda} = \operatorname*{Min}_{x \in S} \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \operatorname*{Max}_{x \in S} \operatorname*{Min}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{f_i(x)}{g_i(x)}. \tag{3}$$

Proof. Let

$$F_i = \left\{ x \in S \mid \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq n} \frac{f_j(x)}{g_j(x)} \right\}, \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Then F_i are closed sets and $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. By (c), we have $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leqq 0$ for $x \in S_i$. But by (d), $\operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq n} \frac{f_j(x)}{g_j(x)} > 0$ for every $x \in S$. Hence $F_i \cap S_i = \emptyset$, where $\emptyset$ denotes the empty set. According to a classical result of SPERNER [*10*], the n closed sets F_i covering the $(n-1)$-dimensional simplex S and satisfying $F_i \cap S_i = \emptyset$ $(1 \leqq i \leqq n)$ must have a point in common. Let $\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Then

$$\frac{f_1(\hat{x})}{g_1(\hat{x})} = \frac{f_2(\hat{x})}{g_2(\hat{x})} = \cdots = \frac{f_n(\hat{x})}{g_n(\hat{x})}.$$

By (d), this common value is positive. If λ denotes the reciprocal of this common value, then $\hat{x}$ satisfies the n equations (1). Hence λ is an equilibrium value and $\hat{x}$ is an equilibrium point.

Since $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ is the set of all equilibrium points, and since $F_i \cap S_i = \emptyset$ $(1 \leqq i \leqq n)$, every equilibrium point is necessarily in $\mathring{S}$. Also by (d) and positiveness of g_i, every equilibrium value is necessarily positive.

Consider now an arbitrary equilibrium value λ and a corresponding equilibrium point $\hat{x}$. From Lemma 1 and $\frac{f_i(\hat{x})}{g_i(\hat{x})} = \frac{1}{\lambda} > 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, we infer that

$$\operatorname*{Min}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{1}{\lambda} < \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \quad \text{for } x \in S,\ x \neq \hat{x}. \tag{4}$$

This implies (3) and therefore the uniqueness of the equilibrium value. At the same time, the uniqueness of the equilibrium value and (4) imply the uniqueness of the equilibrium point.

COROLLARY 1. *Let λ be the equilibrium value and $\hat{x}$ the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Then $x = \hat{x}$ is the only solution $x \in S$ of the system of inequalities*

$$g_i(x) \leqq \lambda f_i(x) \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{5}$$

Also $x=\hat{x}$ is the only solution $x\in S$ of the system of inequalities

$$g_i(x)\geqq\lambda f_i(x) \qquad (1\leqq i\leqq n). \tag{6}$$

Proof. This follows from (4).

Besides the systems of inequalities (5), (6), we may consider the following systems of inequalities:

$$g_i(x)<\varrho f_i(x), \qquad (1\leqq i\leqq n); \tag{7}$$

$$g_i(x)\leqq\varrho f_i(x), \qquad (1\leqq i\leqq n); \tag{8}$$

$$g_i(x)>\varrho f_i(x), \qquad (1\leqq i\leqq n); \tag{9}$$

$$g_i(x)\geqq\varrho f_i(x), \qquad (1\leqq i\leqq n); \tag{10}$$

where ϱ is a real number[2]). By positiveness of g_i and conditions (c) and (d), it is clear that if system (7) [or (8)] has a solution $x\in S$, then ϱ is necessarily positive, and x is necessarily in $\overset{\circ}{S}$. Relation (3) of Theorem 1 can be restated in the following form.

COROLLARY 2. *Let λ be the equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, and let ϱ be a real number. Then $\varrho>\lambda$ ($\varrho\geqq\lambda$, $\varrho<\lambda$, $\varrho\leqq\lambda$), if and only if there exists a point $x\in S$ satisfying* (7), [(8), (9), (10) *respectively*].

COROLLARY 3. *Let $v_1=(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $v_2=(0, 1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $v_n=(0, 0, \ldots, 0, 1)$ be the vertices of the simplex S. Then the equilibrium value λ of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ satisfies the inequalities*

$$\frac{1}{\lambda}<\frac{f_i(v_i)}{g_i(v_i)} \qquad (1\leqq i\leqq n). \tag{11}$$

Proof. Let $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ be the coordinates of the equilibrium point $\hat{x}$. As $\hat{x}\in\overset{\circ}{S}$, we have $\hat{x}_i>0$ $(1\leqq i\leqq n)$. By (c), (d), $f_i(v_j)\leqq 0$ for $i\neq j$; and $f_i(v_i)>0$. Therefore

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j v_j\right)\leqq\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j f_i(v_j)\leqq\hat{x}_i f_i(v_i)$$

and

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{f_i\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j v_j\right)}{g_i\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j v_j\right)}\leqq\frac{\hat{x}_i f_i(v_i)}{\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j g_i(v_j)}<\frac{f_i(v_i)}{g_i(v_i)}.$$

THEOREM 2. *If λ is the equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, then*

$$\frac{1}{\lambda}=\operatorname*{Max}_{\alpha_i>0}\operatorname*{Min}_{x\in S}\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(x)}. \tag{12}$$

[2]) For $\varrho>0$, the functions ϱf_i-g_i are convex. Hence, when $\varrho>0$, system (9) is of the type of inequalities discussed in [4], and (10) is of the type of inequalities studied in [2].

Proof. Let $\hat{x}$ be the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. For any n positive numbers α_i, we have

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\hat{x})}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(\hat{x})} = \frac{1}{\lambda}.$$

In order to prove (12), it suffices to find n positive numbers α_i for which

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)} \geqq \frac{1}{\lambda}. \tag{13}$$

We use the same argument as in [4; p. 620]. For each $x \in S$, let $C(x) = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \mid u_i > \lambda f_i(x) - g_i(x) \text{ for } 1 \leqq i \leqq n\}$. Let $C = \bigcup_{x \in S} C(x)$. Then C is open in E^n. If $x, y \in S$, $u \in C(x)$, $v \in C(y)$, and if $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$, then as the functions $\lambda f_i - g_i$ are convex, we have $\alpha u + \beta v \in C(\alpha x + \beta y) \subset C$. This shows that C is a convex set. By Corollary 2, no point $x \in S$ can satisfy all n inequalities $g_i(x) > \lambda f_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n)$. So the origin $0 = (0, 0, \ldots, 0, 0)$ is not contained in the open convex set C. Therefore there exists a hyperplane H in E^n passing through 0 such that C lies strictly on one side of H. In other words, there are n real numbers α_i such that $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i > 0$ for all $(u_1, \ldots, u_n) \in C$. Then, for any $x \in S$ and for any arbitrary $\varepsilon_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, we have

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\lambda f_i(x) - g_i(x) + \varepsilon_i] > 0. \tag{14}$$

In particular, by taking $x = \hat{x}$, this implies that $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i > 0$ holds for arbitrary $\varepsilon_i > 0$. Hence $\alpha_i \geqq 0$. If we take $x = v_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ and $\varepsilon_i = g_i(v_n)$, then (14) becomes $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(v_n) > 0$. Since $\alpha_i f_i(v_n) \leqq 0$ for $1 \leqq i \leqq n-1$, and $f_n(v_n) > 0$, it follows that $\alpha_n > 0$. Similarly one sees that each $\alpha_i > 0$. From (14), it is clear that these positive numbers α_i have the desired property (13).

COROLLARY 4. *A positive number ϱ is greater than the equilibrium value λ of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, if and only if there exist n positive numbers α_i such that*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\varrho f_i(x) - g_i(x)] > 0 \qquad \textit{for all } x \in S. \tag{15}$$

THEOREM 3. *Let $\gamma_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$. Let λ be the equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Then a real number ϱ is greater than λ, if and only if there exist a point x* (necessarily in $\mathring{S}$) *and $\beta > 0$ such that*

$$\varrho f_i(x) - g_i(x) = \beta \gamma_i \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{16}$$

Proof. Assume $\varrho > \lambda$. By Corollary 4, there exist $\alpha_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ satisfying (15). We may require $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i = 1$. Define n functions h_i on S by

$$h_i(x) = \frac{\alpha_i [\varrho f_i(x) - g_i(x)]}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j [\varrho f_j(x) - g_j(x)]}, \qquad (x \in S,\ 1 \leqq i \leqq n).$$

Then h_i are continuous on S and $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ for all $x \in S$. Let

$$F_i = \{x \in S \mid h_i(x) \geqq \alpha_i \gamma_i\} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

As $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i$ for all $x \in S$, we have $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. If $x \in S_i$, then $f_i(x) \leqq 0$ and $h_i(x) < 0 \leqq \alpha_i \gamma_i$. Hence $F_i \cap S_i = \emptyset$ $(i \leqq i \leqq n)$. Then by SPERNER's covering theorem (already used in the proof of Theorem 1), the n closed sets F_i must have a point in common. For any $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$, we have $h_i(x) = \alpha_i \gamma_i$, or

$$\varrho f_i(x) - g_i(x) = \beta \gamma_i \quad \text{with} \quad \beta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [\varrho f_j(x) - g_j(x)] > 0.$$

Conversely, if, for some real ϱ, there exist $x \in S$ and $\beta > 0$ satisfying (16), then since (16) implies $\varrho f_i(x) \geqq g_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, we have necessarily $\varrho \geqq \lambda$ (Corollary 2) and $x \in \overset{\circ}{S}$ [by condition (c)]. Suppose $\varrho = \lambda$. Then by Corollary 1, x would coincide with the equilibrium point $\hat{x}$ of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, and (16) would become $\lambda f_i(\hat{x}) - g_i(\hat{x}) = \beta \gamma_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. But this is absurd, since $\beta \gamma_i > 0$ for at least one i. Hence $\varrho > \lambda$.

In Theorem 3, when one of the γ_i's is 1 and all the others are 0, then for any given $\varrho > \lambda$, x and β are uniquely determined by (16). This can be easily seen by using Lemma 1.

3. Let $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ be a system of $2n$ functions defined on the $(n-1)$-dimensional simplex S and satisfying the conditions (a), (b), (c), (d). For any fixed index k between 1 and n, we shall consider the system $\{f_1^{(k)}, \ldots, f_{k-1}^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}; g_1^{(k)}, \ldots, g_{k-1}^{(k)}, g_{k+1}^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}\}$ of $2(n-1)$ functions defined on $S_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S \mid x_k = 0\}$ by

$$f_i^{(k)}(x) = f_i(x) \qquad \text{for } x \in S_k \text{ and } i \neq k,$$

$$g_i^{(k)}(x) = g_i(x) \qquad \text{for } x \in S_k \text{ and } i \neq k.$$

It is clear that this system $\{f_1^{(k)}, \ldots, f_{k-1}^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}; g_1^{(k)}, \ldots, g_{k-1}^{(k)}, g_{k+1}^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}\}$ of $2(n-1)$ functions on S_k satisfies the conditions (a), (b), (c), (d). In the following theorem, the role played by the index n can, of course, be played by any index k between 1 and n.

THEOREM 4. *Let λ be the equilibrium value of the system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ on S, and let λ_n be the equilibrium value of the system $\{f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_{n-1}^{(n)}; g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ on S_n. Then*

(i) $\lambda > \lambda_n$.

(ii) *A positive number ϱ is greater than λ_n, if and only if there exists a point $x \in \mathring{S}$ satisfying the $n-1$ equations*

$$\varrho f_i(x) - g_i(x) = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-1). \tag{17}$$

(iii) *A positive number ϱ satisfies the inequalities $\lambda > \varrho > \lambda_n$, if and only if there exists a point $x \in \mathring{S}$ satisfying* (17) *and*

$$\varrho f_n(x) - g_n(x) < 0. \tag{18}$$

Proof. (i) Let $\hat{y} \in S_n$ be the equilibrium point of $\{f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_{n-1}^{(n)}; g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$, i.e.

$$g_i(\hat{y}) = \lambda_n f_i(\hat{y}) \qquad (1 \leqq i \leqq n-1). \tag{19}$$

Since $f_n(\hat{y}) \leqq 0$ and $\lambda_n > 0$, we have

$$g_n(\hat{y}) > \lambda_n f_n(\hat{y}). \tag{20}$$

Then by Corollary 2, $\lambda_n \leqq \lambda$. As $\hat{y} \notin \mathring{S}$, $\hat{y}$ is distinct from the equilibrium point $\hat{x}$ of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Therefore, by Corollary 1, (19), (20) imply that $\lambda_n \neq \lambda$. Hence $\lambda > \lambda_n$.

(ii) Assume $\varrho > \lambda_n$. Let

$$F_i = \{x \in S \mid \varrho f_i(x) - g_i(x) \geqq 0\} \qquad (1 \leqq i \leqq n-1),$$
$$F_n = \{x \in S \mid \varrho f_i(x) - g_i(x) \leqq 0 \text{ for } 1 \leqq i \leqq n-1\}.$$

For $i = 1, 2, \ldots, n-1$, it is clear that $F_i \cap S_i = \emptyset$. As $\varrho > \lambda_n$, we have also $F_n \cap S_n = \emptyset$ (see Corollary 2). Since each F_i is closed and $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$, SPERNER's covering theorem yields $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. Any point $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ is in $\mathring{S}$ and satisfies (17).

To prove the converse, assume that (17) is satisfied by some $\varrho > 0$ and some $x \in \mathring{S}$. Let $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}, 0\right)$ and $z = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Then $x = (1-x_n)y + x_n z$. From (17), we have $\varrho f_i(x) = g_i(x) > 0$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$. As $\varrho > 0$, it follows that $f_i(x) > 0$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$. Since $f_i(z) \leqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ and $0 < x_n < 1$, we have for $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leqq \frac{(1-x_n) f_i(y) + x_n f_i(z)}{(1-x_n) g_i(y) + x_n g_i(z)} < \frac{f_i(y)}{g_i(y)},$$

or

$$\varrho f_i(y) > g_i(y) \qquad (1 \leqq i \leqq n-1).$$

Since $y \in S_n$, this implies $\varrho > \lambda_n$ by Corollary 2.

(iii) Let $\lambda > \varrho > \lambda_n$. By (ii), there is a point $x \in \mathring{S}$ satisfying (17). By Corollary 2, (17) together with $\varrho < \lambda$ imply (18).

Conversely, if there exists a point $x \in \mathring{S}$ satisfying (17) and (18), then by (ii), $\varrho > \lambda_n$. According to Corollary 2, we have $\varrho \leqq \lambda$. Suppose $\varrho = \lambda$. Then by Corollary 1, x would be the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, against (18). Hence $\varrho < \lambda$.

COROLLARY 5. *Let λ_n be the equilibrium value of $\{f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_{n-1}^{(n)}; g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$. Then a positive number ϱ is $> \lambda_n$, if and only if there is a point $x \in \mathring{S}$ satisfying*

$$\varrho f_i(x) - g_i(x) \geqq 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-1). \tag{21}$$

Proof. In the proof of part (ii) of Theorem 4, (17) can be replaced by (21).

COROLLARY 6. *Let λ, λ_n be the equilibrium values of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ and $\{f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_{n-1}^{(n)}; g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ respectively. If $\varrho > \lambda_n$ and $\varrho \neq \lambda$, then for any n real numbers γ_i, not all zero, there is a point $x \in S$ such that*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i [\varrho f_i(x) - g_i(x)] \neq 0. \tag{22}$$

Proof. If $\gamma_n \neq 0$, the point $x \in \mathring{S}$ satisfying (17) [see part (ii) of Theorem 4] will satisfy (22). If $\gamma_n = 0$, then there is an index k between 1 and $n-1$ such that $\gamma_k \neq 0$. Since $\varrho > \lambda_n$, by applying Theorem 3 to the system $\{f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_{n-1}^{(n)}; g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ on S_n, there exists a point $x \in S_n$ such that

$$\varrho f_i(x) - g_i(x) \begin{cases} = 0 & \text{for } 1 \leqq i \leqq n-1 \text{ and } i \neq k \\ > 0 & \text{for } i = k. \end{cases}$$

Then this point x will satisfy (22).

We add two remarks in connection with Theorem 4. If f_n is positive throughout $\mathring{S}$, then for any $\varrho > \lambda_n$, the point $x \in \mathring{S}$ satisfying (17) is unique. This can be easily seen by using Lemma 1.

If each f_i remains non-negative on S, then in parts (ii), (iii) of Theorem 4, the words "a positive number ϱ" can be replaced by "a real number ϱ". Indeed, as f_i are non-negative on S, (17) can be satisfied by some x only when $\varrho > 0$.

4. In this section, we shall apply the above results to matrices with positive elements. Let $A = (a_{ij})$ be a square matrix of order n with positive elements. Define f_i, g_i $(1 \leqq i \leqq n)$ on S by

$$f_i(x) = x_i, \qquad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{23}$$

for $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$. Then clearly conditions (a), (b), (c), (d) are satisfied.

In this case, the first part of Theorem 1 becomes a classical theorem of PERRON, namely: A has a positive eigenvalue λ and a corresponding eigenvector $\hat{x}$ with positive components; λ is the only eigenvalue of A for which there corresponds an eigenvector with non-negative components. It is well known that λ is not less than the absolute value of any other eigenvalue of A, so we shall call λ the *maximal eigenvalue* of A. Relation (3) in Theorem 1

becomes WIELANDT's extremal characterization of the maximal eigenvalue [11]. Theorem 2 reduces to one of the two extremal properties, recently given by BIRKHOFF and VARGA [1; p. 28], of the maximal eigenvalue of A. Theorem 3 includes the following classical result of FROBENIUS [5]: ϱ is greater than the maximal eigenvalue λ of A, if and only if the inverse matrix $(\varrho I - A)^{-1}$ exists and has all its elements positive, where I denotes the identity matrix of order n.

In this special case (23), the equilibrium value λ_k of the system

$$\{f_1^{(k)}, \cdots, f_{k-1}^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \cdots, f_n^{(k)};\ g_1^{(k)}, \cdots, g_{k-1}^{(k)}, g_{k+1}^{(k)}, \cdots, g_n^{(k)}\}$$

on S_k is clearly the maximal eigenvalue of the principal submatrix A_k obtained from A by deleting its k-th row and k-th column. From Corollary 6 and part (iii) of Theorem 4, we derive the following statement: If λ and λ_n are the maximal eigenvalue of A and A_n respectively, and if $\lambda > \varrho > \lambda_n$, then $\varrho I - A$ is non-singular, and all elements on the n-th column of $(\varrho I - A)^{-1}$ are negative. [By considering the transposed matrix, we see that all elements on the n-th row of $(\varrho I - A)^{-1}$ are also negative.] This result has been recently obtained by HOUSEHOLDER [7] and includes the following proposition of the author [3; Theorem 7]: If $\lambda > \varrho > \max_{1 \leqq k \leqq n} \lambda_k$, then $\varrho I - A$ is non-singular, and all elements of $(\varrho I - A)^{-1}$ are negative. The converse of this last proposition (or the converse of HOUSEHOLDER's result) is also true, according to part (iii) of Theorem 4 (see also the remark at the end of § 3).

5. Let $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ be two square real matrices of order n. Let the functions f_i, g_i $(1 \leqq i \leqq n)$ on S be defined by

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \qquad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{24}$$

for $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Then clearly the system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ will satisfy our conditions (a), (b), (c), (d), if and only if the matrices A, B possess the following three properties:

(α) $a_{ij} > 0$ $\quad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n)$.

(β) $b_{ij} \leqq 0$ $\quad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j)$.

(γ) *For any* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, *there is an index* i *for which* $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j > 0$.

The following lemma gives two other forms of condition (γ). For several other equivalent conditions, see [8], [6; p. 338–340], [9], [3; Theorem 5'].

LEMMA 2. *For a square real matrix* $B = (b_{ij})$ *of order* n *with* $b_{ij} \leqq 0$ $(i \neq j)$, *condition* (γ) *is equivalent to each of the following two conditions:*

(γ') B *is non-singular and all elements of the inverse matrix* B^{-1} *are non-negative.*

(γ'') *There exist* n *positive numbers* $\alpha_i > 0$ *such that* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ij} > 0$ *for* $1 \leqq j \leqq n$.

Proof. We first choose a $\varrho \geqq \max_{1 \leqq i \leqq n} b_{ii}$. Let $C = \varrho I - B = (c_{ij})$. Then C is a matrix with non-negative elements.

$(\gamma)\to(\gamma')$: According to (γ), for any $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in S$, there is an index i for which $\varrho x_i > \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$. By taking as x an eigenvector of C corresponding to its maximal eigenvalue, we infer that ϱ must be greater than the maximal eigenvalue of C. Then by a result of FROBENIUS, $\varrho I - C = B$ is non-singular, and all elements of B^{-1} are non-negative.

$(\gamma')\to(\gamma'')$: By (γ'), $\varrho I - C$ is non-singular, and all elements of $(\varrho I - C)^{-1}$ are non-negative. If C^* denotes the transpose of C, then all elements of $(\varrho I - C^*)^{-1}$ are non-negative. Take any vector $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ with all $\beta_i>0$, and let $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=(\varrho I - C^*)^{-1}\beta$. Then we have $\alpha_i>0$ and $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_{ij}=\beta_j>0$.

$(\gamma'')\to(\gamma)$: This follows immediately from

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_{ij}\right)>0,$$

which holds for any $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in S$.

According to this lemma, the real matrices $B=(b_{ij})$ satisfying conditions (β), (γ) are precisely the "M-matrices" introduced and studied by OSTROWSKI [8], [9], also discussed by KOTELYANSKIĬ (see [6; p. 338]).

For f_i, g_i given by (24), the system of equations (1) may be written $Ax=\lambda Bx$ or $B^{-1}Ax=\lambda x$. From (α) and (γ'), all elements of the product matrix $B^{-1}A$ are positive. Hence, in the linear case (24), with A, B satisfying conditions (α), (β), (γ), the equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ is equal to the maximal eigenvalue of the positive matrix $B^{-1}A$, and the equilibrium point is an eigenvector of $B^{-1}A$ corresponding to its maximal eigenvalue. Let A_k, B_k denote the matrices of order $n-1$ obtained from A, B respectively by deleting the k-th row and k-th column. Let λ, λ_k denote the maximal eigenvalues of $B^{-1}A$ and $B_k^{-1}A_k$ respectively. Then, according to Corollary 6 and Theorem 4: A positive number ϱ satisfies the inequalities $\lambda>\varrho>\lambda_k$, if and only if $\varrho B - A$ is non-singular and all elements on the k-th column (also on the k-th row) of $(\varrho B - A)^{-1}$ are negative.

6. For the general case, the problem of determining the equilibrium value and equilibrium point is, of course, much more difficult than the linear case (24). For this task, the remarks given in this section may be useful.

Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be n functions defined on S and satisfying conditions (a), (c), (d). Let g_{ij} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq m)$ be mn continuous, concave, positive functions on S. Let

$$g_i(x)=\operatorname*{Min}_{1\leqq j\leqq m} g_{ij}(x) \qquad (x\in S,\ 1\leqq i\leqq n). \tag{25}$$

For any choice of $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ with $1\leqq j_i\leqq m$, let $\lambda(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ denote the equilibrium value of the system $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_{1j_1}, g_{2j_2}, \ldots, g_{nj_n}\}$. Let λ denote the equilibrium value of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

Since $g_i \leqq g_{ij}$, one sees easily from (3) that $\lambda \leqq \lambda(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ holds for any choice of $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. If $\hat{x}$ is the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, then in view of (25), there is at least one n-tuple $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ such that $g_{ij_i}(\hat{x}) = \lambda f_i(\hat{x})$ for $1 \leqq i \leqq n$. Hence

$$\lambda = \operatorname*{Min}_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \lambda(j_1, j_2, \ldots, j_n), \tag{26}$$

where the minimum is taken over all m^n n-tuples $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ with $1 \leqq j_i \leqq m$.

Furthermore, if the minimum is attained for $j_1 = k_1$, $j_2 = k_2, \ldots, j_n = k_n$, i.e. if $\lambda = \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, then the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_{1k_1}, g_{2k_2}, \ldots, g_{nk_n}\}$ is the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. In fact, let $\hat{y}$ be the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_{1k_1}, g_{2k_2}, \ldots, g_{nk_n}\}$, i.e. $g_{ik_i}(\hat{y}) = \lambda f_i(\hat{y})$ for $1 \leqq i \leqq n$. As $g_i \leqq g_{ik_i}$, we have $g_i(\hat{y}) \leqq \lambda f_i(\hat{y})$ for $1 \leqq i \leqq n$. Then by Corollary 1, $\hat{y}$ must be the equilibrium point of $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

Consider now another situation. Let each of the systems $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ and $\{f_{1j}, f_{2j}, \ldots, f_{nj}; g_{1j}, g_{2j}, \ldots, g_{nj}\}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfy conditions (a), (b), (c), (d). Let their equilibrium values and equilibrium points be designated by λ, $\lambda(j)$ and $\hat{x}$, $\hat{x}(j)$ respectively. If

$$f_{ij}(x) \leqq f_{i,j+1}(x), \qquad g_{ij}(x) \geqq g_{i,j+1}(x), \tag{27}$$

$$f_i(x) = \lim_{j \to \infty} f_{ij}(x), \qquad g_i(x) = \lim_{j \to \infty} g_{ij}(x) \tag{28}$$

hold for all $x \in S$, then it is easily seen that

$$\lambda = \lim_{j \to \infty} \lambda(j), \qquad \lambda(j) \geqq \lambda(j+1), \tag{29}$$

$$\hat{x} = \lim_{j \to \infty} \hat{x}(j). \tag{30}$$

Bibliography

[1] BIRKHOFF, G., and R. S. VARGA: Reactor criticality and non-negative matrices. U. S. Atomic Energy Commission Research and Development Report, WAPD 166 (1957). — [2] FAN, K.: Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations. Math. Z. **68**, 205—216 (1957). — [3] FAN, K.: Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements. Monatshefte für Math. **62**, 219—237 (1958). — [4] FAN, K., I. GLICKSBERG and A. J. HOFFMAN: Systems of inequalities involving convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 617—622 (1957). — [5] FROBENIUS, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin **1908**, 471—476. — [6] GANTMAHER, F. R.: Theory of matrices (Russian). Moscow 1954. — [7] HOUSEHOLDER, A. S.: On matrices with non-negative elements. Monatshefte für Math. **62**, 238—242 (1958). — [8] OSTROWSKI, A.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Commentarii Math. Helvetici. **10**, 69—96 (1937). — [9] OSTROWSKI, A.: Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen. Commentarii Math. Helvetici. **30**, 175—210 (1956). — [10] SPERNER, E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ. **6**, 265—272 (1928). — [11] WIELANDT, H.: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z. **52**, 642—648 (1950).

Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 2. Juni 1958)

ZAREMBA, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 281–282 (1958)

On Necessary Conditions for the Central Limit Theorem

By
S. K. ZAREMBA

A short proof of the most general form of the Central Limit Theorem for independent random variables being now available [3], it may be worth showing how a direct and completely elementary argument leads to the converse proposition, which FELLER [1] had established by means of sophisticated and not quite simple methods. The relevant proposition can be stated as follows:

THEOREM. Let $\{x_k\}$ be a sequence of independent random variables, and $\{a_n\}$ and $\{B_n\}$ numerical sequences with $a_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$; if the distribution of $X_n=a_n^{-1}(x_1+\cdots+x_n)-B_n$ tends to a normal distribution with a zero mean and a unit variance, and if $\{a_n^{-1}x_k\}$ are infinitesimal, i.e. if

$$(1)\qquad \begin{cases} \max\{P[a_n^{-1}|x_1|>\varepsilon], \ldots, P[a_n^{-1}|x_n|>\varepsilon]\}\to 0 \\ \text{for every positive } \varepsilon \text{ when } n\to\infty, \end{cases}$$

then, for every positive number η,

$$(2)\qquad P[|x_1|>\eta a_n]+\cdots+P[|x_n|>\eta a_n]\to 0 \quad \text{when } n\to\infty.$$

PROOF. Assume that the conditions of the theorem are satisfied, while, for a given positive η, (2) does not hold. Without loss of generality, we can assume that the sequence $\{P[x_1>\eta a_n]+\cdots+P[x_n>\eta a_n]\}$ has a positive upper limit Λ, finite or infinite. Let λ be any positive constant smaller than Λ. Clearly, there exists a sub-sequence $\{n(i)\}$ of the sequence $1, 2, \ldots$ for which $P[x_1>\eta a_{n(i)}]+\cdots+P[x_{n(i)}>\eta a_{n(i)}]$ is never smaller than λ. Given this sub-sequence, we form, in any of the various possible ways, a family $\{e_{n,k}\}$ $(n=1,2,\ldots;$ $k=1, \ldots, n)$ of events having the following three properties: (i) For every n, $\{e_{n,1}, \ldots, e_{n,n}\}$ form a set of independent events; (ii) for every n and k, $e_{n,k}$ entails $x_k>\eta a_n$ with certainty; (iii) $P[e_{n(i),1}]+\cdots+P[e_{n(i),n(i)}]=\lambda$ for every i.

Owing to (1), $\max\{P[e_{n(i),1}], \ldots, P[e_{n(i),n(i)}]\}\to 0$ when $i\to\infty$. Hence, in view of (iii), if ν_n is the number of events $e_{n,1}, \ldots, e_{n,n}$ occurring for a given n, the distribution of $\nu_{n(i)}$ is Poissonian in the limit (cf. e.g. [2], p. 234), with

$$(3)\qquad P[\nu_{n(i)}=q]\to \exp(-\lambda)\cdot\lambda^q/q! \qquad \text{when } i\to\infty.$$

Clearly, we can choose an integer r, henceforth regarded as constant, satisfying

$$(4)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\exp(-\lambda)\cdot\min\{1, \lambda^r/r!\}>4(r-1)^{-1}\eta^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp[-(r-1)^2\eta^2/8]> \\ >\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{(r-1)\eta/2}^{+\infty}\exp(-x^2/2)\,dx. \end{cases}$$

Let $j(1), \ldots, j(n)$ be any permutation of the numbers $1, \ldots, n$. Since (1) applies a fortiori to the conditional distributions arising out of the relevant

events $\bar{e}_{n,k}$, complementary to the respective $e_{n,k}$, the maximum, over the various permutations $j(1), \ldots, j(n)$, of $P[a_n^{-1}(x_{j(n-r+1)}+\cdots+x_{j(n)})> \eta|\bar{e}_{n,j(n-r+1)}\cdots\bar{e}_{n,j(n)}]$ tends to 0 when $n\to\infty$. Thus, if m_n is the median of the conditional distribution of X_n given that $\nu_n=0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \min P\left[a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n-r} x_{j(i)} - B_n > m_n - \eta\,|\bar{e}_{n,j(1)}\cdots\bar{e}_{n,j(n-r)}\right] \geqq \tfrac{1}{2},$$

the minimum referring to all the possible permutations $j(1), \ldots, j(n)$. Consequently,

$$\liminf_{n\to\infty} P[X_n > m_n + (r-1)\eta\,|\nu_n = r] \geqq \tfrac{1}{2},$$

and further, in view of (3),

$$\liminf_{i\to\infty} P[X_{n(i)} > m_{n(i)} + (r-1)\eta] \geqq \tfrac{1}{2}\exp(-\lambda)\cdot\lambda^r/r! \tag{5}$$

On the other hand, clearly,

$$\liminf_{i\to\infty} P[X_{n(i)} < m_{n(i)}] \geqq \tfrac{1}{2}\exp(-\lambda). \tag{6}$$

However, for every i at least one of the inequalities $m_{n(i)}+(r-1)\eta \geqq \frac{1}{2}(r-1)\eta$ and $m_{n(i)} \leqq -\frac{1}{2}(r-1)\eta$ must hold, and $\{n(i)\}$ can be replaced, if necessary, by a sub-sequence for which the same inequality is satisfied throughout. But then, if the distribution of $X_{n(i)}$ tends to the assumed limit, the left-hand side of either (5) or (6) cannot exceed the right-hand side of (4), which is thus contradicted. Hence the proof is complete.

The proposition no longer holds if, instead of being independent, $\{x_k\}$ are m-dependent. Indeed, let $\{u_i\}$ be independent and normally distributed with zero means and unit variances, and let

$$P[v_k = (2k)^{\frac{1}{2}}] = (2k)^{-1} \quad \text{and} \quad P[v_k = 0] = 1-(2k)^{-1};$$

finally, make

$$x_{2j-1} = u_{2j-1} + v_j; \qquad x_{2j} = u_{2j} - v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

and

$$a_n = \sqrt{n}; \quad B_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Then $\{x_n\}$ are 1-dependent, $\{a_n^{-1}x_k\}$ are infinitesimal, and X_n is asymptotically normal with unit variance and mean 0, although (2) is not true when $\eta<1$; it might be added that Condition (iii) of Theorem 2 in [3] is still satisfied.

The author wishes to thank Mr. J. D. NORTH, Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd., for his encouragement and his permission to publish the present note.

References

[1] FELLER, W.: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **40**, 521–559 (1935) and 301–312 (1937). – [2] FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York: Wiley & Sons 1950. – [3] ZAREMBA, S. K.: Note on the Central Limit Theorem. Math. Z. **69**, 295–298 (1958).

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Now: University College of Swansea, Wales)

(Eingegangen am 14. Mai 1958)

Benz, W.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 283–296 (1958)

$(8_3, 6_4)$-Konfigurationen in Laguerre-, Möbius- und weiteren Geometrien

Von

Walter Benz

In [3] hat L. Peczar einen Beweis des Miquelschen Satzes (formuliert in Abschnitt 4 der vorliegenden Note) gemeinsam für Laguerre-, Möbius- und weitere Geometrien gegeben. Er stützt sich dabei auf einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$, der einen Körper $\mathfrak{K}$ enthält und in dem die Gleichung $qz = p$, wenn q und p Elemente von $\mathfrak{R}$ sind und q kein Nullteiler ist, stets eine Lösung z hat[1]). Nach von Staudtschem Vorbild führt Peczar mit Hilfe von Doppelverhältnissen Ketten (wir sagen Kreise) ein: Sind w_1, w_2, w_3 verschiedene Elemente aus $\mathfrak{R}$ dergestalt, daß $w_2 - w_3$ nicht Nullteiler ist, so wird unter der Kette $(w_1 w_2 w_3)$ neben dem Element w_1 die Menge aller z verstanden, für die $w_1 - z$ nicht Nullteiler und für die das Doppelverhältnis

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ z & w_3 \end{bmatrix} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} \cdot \frac{w_2 - z}{w_1 - z} \equiv a$$

Element von $\mathfrak{K}$ ist[2]). Auf Grund von Hilfsbetrachtungen über lineare Substitutionen folgt, daß das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Elementen der Kette $(w_1 w_2 w_3)$ in $\mathfrak{K}$ liegt, wenn von vornherein vorausgesetzt wird, daß

---

[1]) Um das auf S. 213 in [3] benutzte Beweisglied, daß jedes von Null verschiedene Element von $\mathfrak{K}$ nicht Nullteiler in $\mathfrak{R}$ ist [vgl. Fußnote [2])], aufrechtzuerhalten, ist (im Sinne von notwendig und hinreichend) noch zu fordern, daß $\mathfrak{R}$ ein Einselement besitzt und daß weiterhin dieses Einselement mit dem Einselement von $\mathfrak{K}$ übereinstimmt. Äquivalent hiermit ist die Forderung, daß mindestens ein von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{K}$ nicht Nullteiler in $\mathfrak{R}$ ist. — Es gibt Ringe mit den im Haupttext genannten Eigenschaften, die kein Einselement besitzen[1a]) und es gibt Ringe mit den im Haupttext genannten Eigenschaften, die ein Einselement besitzen, das jedoch verschieden ist von dem Einselement von $\mathfrak{K}$[1b]).

[1a]) $\mathfrak{R}$ sei der Ring aller geordneten Paare (x, ξ), wo x eine reelle Zahl und $\xi \in \{0, I\}$ ist, mit den Kompositionsvorschriften $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$, wobei sein soll: $0 + 0 = I + I = 0$, $0 + I = I + 0 = I$ und $\alpha\beta = 0$ für alle $\alpha, \beta \in \{0, I\}$. Es sei $\mathfrak{K}$ der (zum Körper der reellen Zahlen isomorphe) Körper aller Paare $(x, 0)$.

[1b]) $\mathfrak{R}$ sei der Ring aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen x, y mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. $\mathfrak{K}$ sei der Körper aller Paare $(x, 0)$. Es ist $(1, 1)$ Einselement von $\mathfrak{R}$, das verschieden ist vom Einselement $(1, 0)$ von $\mathfrak{K}$. In diesem Beispiel ist offenbar jedes von Null verschiedene Element von $\mathfrak{K}$ Nullteiler.

[2]) Für den Fall $a \neq 0$ ergibt sich hieraus, daß $w_1 - w_3$ und $w_2 - z$ nicht Nullteiler in $\mathfrak{R}$ sind, wenn man noch voraussetzt, daß jedes Element $\neq 0$ von $\mathfrak{K}$ nicht Nullteiler in $\mathfrak{R}$ ist [vgl. hierzu die in Fußnote [1]) gemachte Bemerkung].

w_1-w_2 und w_1-w_3 nicht Nullteiler sind. Den Satz von MIQUEL entnimmt PECZAR nun der folgenden Doppelverhältnisidentität

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_5 & z_6 \\ z_8 & z_7 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1 & z_5 \\ z_4 & z_8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_6 & z_2 \\ z_7 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 & z_6 \\ z_8 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_5 & z_2 \\ z_4 & z_7 \end{bmatrix},$$

in der die z_i noch gewissen Bedingungen genügen müssen, um das Auftreten von Nullteilern im Nenner zu vermeiden. Läßt man $\mathfrak{K}$ den Körper der reellen Zahlen sein und $\mathfrak{R}$ resp. den Ring der dualen Zahlen, den Körper der komplexen Zahlen, so hat man den Satz von MIQUEL resp. in der Laguerre-, in der Möbius-Geometrie.

Das Ergebnis von PECZAR kann schon gewonnen werden (vgl. unsere Nr. 4), wenn man für $\mathfrak{R}$ — wie wir das im Vorliegenden stets tun wollen — allgemeiner einen kommutativen Ring zuläßt, der einen Körper $\mathfrak{K}$ so enthält, daß das Einselement von $\mathfrak{K}$ auch Einselement von $\mathfrak{R}$ ist: Die regulären Elemente von $\mathfrak{R}$ (d.h. die Elemente von $\mathfrak{R}$, die ein Inverses in $\mathfrak{R}$ besitzen) übernehmen dann diejenige Rolle, die bisher die Nichtnullteiler innehatten.

In der vorliegenden Note wird vornehmlich eine andere — in Laguerre-, Möbius- und weiteren Geometrien geltende — $(8_3, 6_4)$-Konfiguration, der sog. Büschelsatz (formuliert in 5), behandelt. Bemerkenswert ist hier die Feststellung, daß es — in zu präzisierendem Sinne — keine zur Doppelverhältnisidentität von PECZAR analoge Identität gibt, die den Büschelsatz beweist (Satz 2). Eine weitere — hiermit zusammenhängende — Besonderheit ist die: Der Satz von MIQUEL gilt in allen Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$, der Büschelsatz nicht. Wohl gilt der Büschelsatz in allen Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$, für die $(\mathfrak{R}:\mathfrak{K}) = 2$ erfüllt ist (Satz 3). Damit ist ein gemeinsamer Beweis des Büschelsatzes in Laguerre-, Möbius- und natürlich unendlich vielen weiteren, paarweise nichtisomorphen, Geometrien erbracht.

Mit dem in 8 eingeführten Begriff des L-Ringes in bezug auf einen Körper gelingt es schließlich, die Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ zu kennzeichnen, die dem Büschelsatz genügen (Satz 4). Diese Kennzeichnung wurde für den Fall, daß $\mathfrak{R}$ kommutativer Körper ist, bereits in [*1*] geleistet.

1. Im folgenden seien stets (wenn nichts anderes gesagt ist) $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{K}$ ein in $\mathfrak{R}$ enthaltener Körper; wir verlangen, daß das Einselement von $\mathfrak{K}$ auch Einselement von $\mathfrak{R}$ ist. Die Menge der regulären Elemente von $\mathfrak{R}$ (also der Elemente, die ein Inverses in $\mathfrak{R}$ besitzen), wird mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet. $\mathfrak{r}$ bildet gegenüber der Multiplikation eine Gruppe, die die multiplikative Gruppe $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ umfaßt. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ heißen im folgenden Punkte. Eine Punktmenge $\mathfrak{m}$, $|\mathfrak{m}| \geqq 2$[3]), heiße *eigentlich*, wenn zu je zwei verschiedenen ihrer Elemente die Differenz regulär ist. Enthält die eigentliche Punktmenge $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ genau n verschiedene Punkte, n endlich, so heiße $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ein *eigentliches Punkte-n-tupel*. Jedem geordneten eigentlichen Punktequadrupel A, B, C, D

[3]) Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge, so wird mit $|\mathfrak{M}|$ ihre Mächtigkeit bezeichnet.

wird ein *Doppelverhältnis* $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ zugeordnet: dies sei das Element

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \frac{A-C}{B-C}\,\frac{B-D}{A-D},$$

das offensichtlich regulär ist.

Zu jedem eigentlichen Punktetripel A, B, C wird eine Punktmenge (ABC) definiert. (ABC) enthalte die Punkte A, B, C und weiterhin genau die Punkte X, für die A, B, C, X ein eigentliches Punktequadrupel und für die $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}$ ist[4,5]). Die Mengen (ABC) heißen *Kreise*. Die Punktmenge $\{P, Q, \ldots\}$ heißt *konzyklisch*, wenn sie insgesamt einem Kreise angehört. Ist P ein Punkt und ist k ein Kreis mit $P \in k$, so werden die üblichen Redewendungen benutzt: *Der Punkt P liegt auf dem Kreis k, der Kreis k geht durch den Punkt P*, usf.

2. Ist $\mathfrak{K}$ der reelle Zahlkörper, $\mathfrak{R}$ der komplexe, so liegt die gewöhnliche Kreisgeometrie vor.

Ist $\mathfrak{K}$ der reelle Zahlkörper, $\mathfrak{R}$ der Ring der dualen Zahlen, so liegt die Laguerre-Geometrie vor. Dabei sind (vgl. [3]) die Punkte mit den Speeren — bis auf eine Klasse gleichsinnig paralleler — zu identifizieren und die Kreise mit den Zykeln. Die gleiche Algebra $\mathfrak{R}:\mathfrak{K}$ beschreibt auch eine Parabelgeometrie (vgl. PECZAR, a.a.O.).

Bildet man den Ring $x + y\eta$ über den reellen Zahlen x, y mit $\eta^2 = +1$, so kommt man zu einer Hyperbelgeometrie.

Der Bereich der definierten Geometrien umfaßt weitere anschauliche Geometrien.

3. Über Kreise, eigentliche Punktmengen und Doppelverhältnisse gelten die folgenden Eigenschaften:

(1) *Die verschiedenen Punkte eines Kreises bilden insgesamt eine eigentliche Punktmenge.*

Beweis. Es sei $k = (ABC)$ ein Kreis. Besteht der Kreis k nur aus drei oder nur aus vier verschiedenen Punkten, so ist nichts zu beweisen. Seien also X, Y untereinander und von A, B, C verschiedene Punkte auf k. Zu zeigen ist $X - Y \in \mathfrak{r}$. Es gilt

$$x \equiv (A-C)(B-C)^{-1}(B-X)(A-X)^{-1} \in \mathfrak{K}$$

und auch

$$y \equiv (A-C)(B-C)^{-1}(B-Y)(A-Y)^{-1} \in \mathfrak{K}.$$

---

[4]) Es könnte offenbar auch $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}^*$ geschrieben werden.

[5]) Schwächer kann man (ABC) auch so definieren: (ABC) enthalte neben den Punkten A, B, C genau die Punkte X, für die $A - X$ regulär und für die $\dfrac{A-C}{B-C}\,\dfrac{B-X}{A-X} \in \mathfrak{K}$ ist. ($B - X$, $C - X \in \mathfrak{r}$ kann dann gefolgert werden.)

Da alle benutzten Differenzen in $\mathfrak{r}$ liegen, ist $x, y \in \mathfrak{r}$, d.h. $y \neq 0$ und somit

$$\mathfrak{R} \ni y^{-1}x = (A-Y)(B-Y)^{-1}(B-X)(A-X)^{-1}.$$

Weiter ist wegen $B-Y, A-X \in \mathfrak{r}$:

$$z = (A-B)(Y-B)^{-1}(Y-X)(A-X)^{-1}$$

bildbar; man hat

$$\begin{aligned} z &= [(A-Y)+(Y-B)](Y-B)^{-1}[(B-X)+(Y-B)](A-X)^{-1} \\ &= -y^{-1}x + (A-Y)(A-X)^{-1} + (B-X)(A-X)^{-1} + (Y-B)(A-X)^{-1} \\ &= -y^{-1}x + 1 \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Es ist sogar $z \neq 0$, d.h. $z \in \mathfrak{R}^*$: Sonst wäre

$$Y-X = (Y-B)(A-B)^{-1} \cdot (A-B)(Y-B)^{-1}(Y-X)(A-X)^{-1} \cdot (A-X) = 0,$$

d.h. $Y = X$, was nicht sein sollte. —

Nun gilt wegen $\mathfrak{R}^* \subseteqq \mathfrak{r}$, d.h. wegen $z \in \mathfrak{r}$,

$$Y - X = (Y-B)(A-B)^{-1}z(A-X) \in \mathfrak{r}, \quad \text{q.e.d.}$$

Der folgende Satz veranschaulicht den Begriff der eigentlichen Punktmenge. Man denke dabei an die bereits in der Laguerre-Geometrie vorkommende Tatsache, *daß durch zwei verschiedene Punkte nicht notwendig ein Kreis geht.* (Zwei verschiedene, gleichsinnig parallele Speere können durch keinen Zykel verbunden werden.)

(2) *Dann und nur dann ist die Punktmenge* $\mathfrak{m}$, $|\mathfrak{m}| \geqq 3$, *eigentlich, wenn je zwei verschiedene ihrer Punkte konzyklisch sind.*

Beweis. Sind je zwei verschiedene Punkte X, Y der Menge $\mathfrak{m}$, $|\mathfrak{m}| \geqq 3$, konzyklisch, so folgt aus (1) $Y - X \in \mathfrak{r}$. Damit ist $\mathfrak{m}$ eigentlich. — Ist umgekehrt die Punktmenge $\mathfrak{m}$, $|\mathfrak{m}| \geqq 3$, eigentlich und sind X, Y, Z beliebige verschiedene Punkte aus $\mathfrak{m}$, so ist $X, Y \in (XYZ)$.

(3) a) *Ist* A, B, C, D *ein eigentliches Punktequadrupel, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{-1}; \quad \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{-1}; \quad \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$$

und ferner

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}.$$

b) *Ist* A, B, C, D, E *ein eigentliches Punktequintupel, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ E & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix}.$$

Gelegentlich benötigen wir das folgende Korrolar zu (3):

(4) a) *Ist A, B, C, D ein eigentliches Punktequadrupel und ist* $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}$, *so gilt*

$$\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}.$$

b) *Ist A, B, C, D, E ein eigentliches Punktequintupel und ist*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}, \quad \text{so gilt auch} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ E & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}.$$

Wie bereits angemerkt, gilt in der Laguerre-Geometrie nicht, daß durch drei verschiedene Speere stets genau ein Zykel geht. Allgemein hat man

Satz 1. *Durch drei verschiedene Punkte geht höchstens ein Kreis. Ferner: Durch drei verschiedene Punkte geht stets dann und nur dann genau ein Kreis, wenn $\mathfrak{R}$ Körper ist.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes wird auf Grund von (4) wie Satz 1_2 in [*1*] bewiesen. Zum zweiten Teil: Ist $\mathfrak{R}$ Körper und sind A, B, C verschiedene Punkte, so geht — da $\{A, B, C\}$ gewiß eigentlich ist — (ABC) durch A, B, C. — Geht umgekehrt durch drei verschiedene Punkte stets genau ein Kreis, so muß $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} \cup \{0\}$, d.h. es muß $\mathfrak{R}$ Körper sein: Wäre nämlich n ein von 0 verschiedenes Element aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{r}$, so müßte durch die drei verschiedenen Punkte $0, 1, n$ ein Kreis gehen. Damit wäre nach (1) die Menge $\{0, 1, n\}$ eigentlich, was $n = n - 0 \in \mathfrak{r}$ ergäbe.

(5) *Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte eines Kreises k, so ist* $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}$.

Beweis. Da durch drei verschiedene Punkte höchstens ein Kreis geht, ist $(ABC) = k$. Wegen $D \in k = (ABC)$ ist damit $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}$.

4. Wir wenden uns hier dem Satz von MIQUEL zu auf der in der Einleitung angekündigten allgemeinen Grundlage. Der Beweis des Miquelschen Satzes von PECZAR kann unverändert übernommen werden.

Satz von Miquel[6]. *Lassen sich acht verschiedene Punkte, von denen je zwei gemeinsam auf mindestens einem Kreise liegen*[7], *so den Eckpunkten eines Würfels zuordnen, daß es fünfmal vorkommt, daß den Eckpunkten einer Seitenebene des Würfels vier konzyklische Punkte entsprechen, so ist dies auch bei den Eckpunkten der sechsten Seitenebene der Fall* (Fig. 1).

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der folgenden Identität

$$\text{(M)} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ H & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & B \\ G & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ D & G \end{bmatrix}.$$

[6]) Formuliert nach VAN DER WAERDEN, SMID [*4*].

[7]) Eine solche Voraussetzung kann nicht entbehrt werden, wie bereits der Fall der Laguerre-Geometrie lehrt: Sei $A = -\frac{2}{7} + \frac{2\sqrt{6}}{7}\varepsilon$, $B = 5 - \varepsilon$, $C = 4 + \varepsilon$, $D = -1$, $E = 1 + \varepsilon$, $F = 1 - \varepsilon$, $G = 2 + \varepsilon$, $H = 2 - \varepsilon$. Hier sind zwar die Quadrupel $ABCD$, $AEHD$, $FBCG$, $AFCH$, $EBGD$ konzyklisch, hingegen nicht $EFGH$, da E, F gleichsinnig parallele Speere sind wegen $E - F = 2\varepsilon$.

In der Tat: Liegen fünf der angeschriebenen Doppelverhältnisse in $\mathfrak{R}^*$, so auch gewiß das sechste, da $\mathfrak{R}^*$ Gruppe ist.

5. Eine weitere $(8_3, 6_4)$-Konfiguration ist der **Büschelsatz**. Er lautet[8]): *Gegeben seien vier Paare von insgesamt acht verschiedenen, paarweise konzyklischen, Punkten. Aus den vier Punktepaaren kann man durch Zusammenstellung je zweier verschiedener Paare sechs Punktequadrupel herstellen. Kommt es dann vor, daß fünf dieser Punktequadrupel konzyklisch sind auf insgesamt mindestens vier verschiedenen Kreisen, so ist auch das letzte Punktequadrupel konzyklisch* (Fig. 2).

Bei geeigneter Bezeichnung der Punkte kann der Büschelsatz äquivalent auch so formuliert werden: *Es seien* $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ *acht verschiedene Punkte, von denen je zwei gemeinsam auf mindestens einem Kreise liegen. Es seien* $AA'BB'$, $AA'C_1C_1'$, $AA'C_2C_2'$, $BB'C_1C_1'$, $BB'C_2C_2'$ *konzyklische Punktequadrupel, nicht aber* $AA'BC_1$, $AA'BC_2$, $AA'C_1C_2$. *Dann ist auch das Punktequadrupel* $C_1C_1'C_2C_2'$ *konzyklisch.*

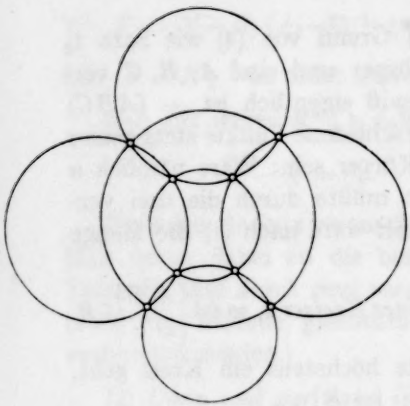

Fig. 1

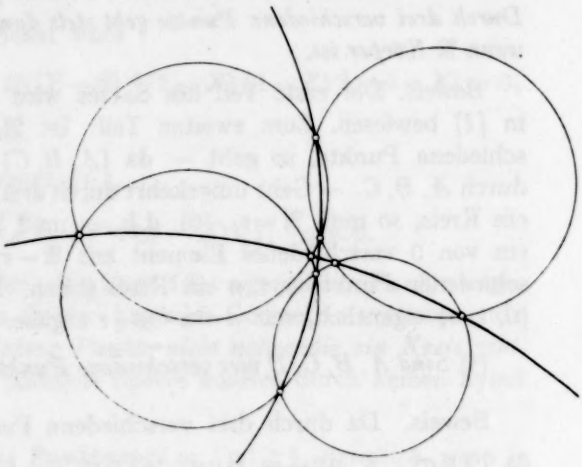

Fig. 2

Zunächst sei gezeigt, daß es keine ähnlich einfache Identität wie (M) gibt, die den Büschelsatz beweist:

Satz 2. *Es sei* $\Omega(\mathfrak{R})$ *die Menge aller geordneten, eigentlichen Punkte-8-tupel*

$$\sigma^{(8)} = (A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2')$$

über $\mathfrak{R}$. *Es gibt dann keinen Ausdruck* Φ, *der durch endlich-oftmaliges Ausführen der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation aus*

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B' & B \end{bmatrix}, \ldots^{9}), \quad \begin{bmatrix} A & A' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} A & A' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} B & B' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} B & B' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots$$

[8]) Formuliert nach VAN DER WAERDEN, SMID [4].

[9]) Mit den Punkten ... sind jeweils die permutierten Doppelverhältnisse des zuvor angeschriebenen Doppelverhältnisses gemeint. Man beachte dabei die Identitäten (3).

zusammengesetzt ist und der für jedes $\sigma^{(8)}$ *— unabhängig von* $\mathfrak{R}$ *— mit einem Doppelverhältnis* $\begin{bmatrix} C_1 & C_1' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots$ *übereinstimmt.*

Beweis. Angenommen, es gäbe doch einen Ausdruck Φ, der für alle $\sigma^{(8)} \in \Omega(\mathfrak{R})$ — unabhängig von $\mathfrak{R}$ — ein Doppelverhältnis $\begin{bmatrix} C_1 & C_1' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots$ ergäbe. Wir nehmen für $\mathfrak{R}$ speziell den Körper der reellen Zahlen und für $\mathfrak{K}$ den der rationalen her. Nimmt man dann acht verschiedene reelle Zahlen $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ so, daß

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B' & B \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} A & A' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} A & A' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} B & B' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} B & B' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots$$

rationale Größen sind, so müßte — gemäß dem Aufbau von Φ — auch $\begin{bmatrix} C_1 & C_1' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}, \ldots$ rational sein. Dies ist aber nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{2+3\sqrt{2}}{7}, \quad C_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad A' = -1, \quad B' = 2,$$

$$C_1' = \frac{2-3\sqrt{2}}{7}, \quad C_2' = \frac{4-6\sqrt{3}}{23}.$$

Dann sind die Größen

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B' & B \end{bmatrix} = \frac{1}{2}, \begin{bmatrix} A & A' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix} = -1, \begin{bmatrix} A & A' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}, \begin{bmatrix} B & B' \\ C_1' & C_1 \end{bmatrix} = -1, \begin{bmatrix} B & B' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix} = -4$$

rational; hingegen ist

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_1' \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix} = 49 - 20\sqrt{6}$$

irrational.

6. Den weiteren Erörterungen stellen wir die folgenden Hilfssätze voran:

HILFSSATZ 1. *Ist* $A, A', B, B', C_1, C_1', C_2, C_2'$ *ein eigentliches Punkte-8-tupel, so gilt*

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2' \\ C_1' & C_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A' & C_1' \\ A & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & C_2 \\ A & C_2' \end{bmatrix},$$

wenn gesetzt ist

$$m = 1 - \frac{1}{b_2}\left(b_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + b_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) + \frac{b_1}{b_2},$$

$$b_i = \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma_i = \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Beweis. Es ist

$$m=\left(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)+\frac{b_1}{b_2}\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

und weiter mit

$$\frac{b_1}{b_2}=\begin{bmatrix}A' & A\\ C_1 & C_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ C_2' & C_2\end{bmatrix},$$

$$1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=1-\begin{bmatrix}A' & A\\ C_1 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ B & C_2\end{bmatrix}=1-\begin{bmatrix}A' & A\\ C_1 & C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_2\\ C_1 & A\end{bmatrix}$$

und entsprechend

$$1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\begin{bmatrix}A' & C_1\\ C_2 & A\end{bmatrix}$$

gilt

$$m=\begin{bmatrix}A' & C_2\\ C_1 & A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A' & A\\ C_1 & C_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ C_2' & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_1\\ C_2 & A\end{bmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{bmatrix}A' & C_2\\ C_1 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_2\\ A & C_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ C_2 & C_1'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_2\\ C_1 & C_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ C_2 & C_1'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ A' & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ C_2 & C_1'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ A' & C_1'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ C_1 & C_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_2'\end{bmatrix};$$

weiterhin ergibt explizites Anschreiben

$$\begin{bmatrix}A' & A\\ C_1 & C_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ C_2' & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_1\\ C_2 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_2\\ A & C_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ C_2 & C_1'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_2'\\ A & C_1'\end{bmatrix}$$

Damit ist

$$m\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & C_2\\ A & C_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2'\\ C_2 & C_1'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & C_1'\\ A & C_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A' & C_2'\\ A & C_1'\end{bmatrix}=1$$

nach (3), was die Behauptung unmittelbar ergibt.

HILFSSATZ 2. *Ist $\gamma\in\mathfrak{r}-\mathfrak{R}$ und hat $\gamma^2+a\gamma+b=0$ eine Lösung $a, b\in\mathfrak{R}$, so ist diese Lösung eindeutig bestimmt. Ferner ist $b\neq 0$. [Ist genau in dieser Weise einem $\gamma\in\mathfrak{r}-\mathfrak{R}$ eindeutig ein — geordnetes — Paar (a, b) von Elementen aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet, so schreiben wir $\gamma\to(a, b)$.]*

Beweis. Hätte man noch $\gamma^2+a'\gamma+b'=0$ für $(a', b')\neq(a, b)$ und $a', b'\in\mathfrak{R}$, so wäre $(a-a')\gamma=(b'-b)$ und also doch $(a', b')=(a, b)$ wegen $\gamma\notin\mathfrak{R}$. — Wäre nun $b=0$, so würde $\gamma(\gamma+a)=0$ wegen $\gamma\in\mathfrak{r}$ ergeben $\gamma=-a\in\mathfrak{R}$.

HILFSSATZ 3. *Ist A, A', B, B', C, C' ein eigentliches Punkte-6-tupel und gilt*

$$\begin{bmatrix}A' & A\\ B & B'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ C & C'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B' & B\\ C & C'\end{bmatrix}\in\mathfrak{R}$$

und ferner

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} A' & A \\ C & B \end{bmatrix} \notin \mathfrak{R},$$

so genügt γ einer Gleichung

$$\gamma^2 + a\gamma + b = 0$$

mit Größen a, b aus $\mathfrak{R}$. Insbesondere ist $b = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C & C' \end{bmatrix}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ C' & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C' & C \end{bmatrix} = u\gamma, \quad u \in \mathfrak{R}^*,$$

wenn $u = \begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C' & C \end{bmatrix}$ gesetzt ist.

Weiterhin erkennt man vermittels expliziten Anschreibens

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' & A \\ A' & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B' & C \\ B & C' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & B' \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & C \\ A & B \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} A' & C \\ A & B \end{bmatrix}$$

mit einer Größe $v \in \mathfrak{R}^*$.

Addiert man die beiden Gleichungen auf und beachtet man dabei (3), sowie

$$\begin{bmatrix} A' & C \\ B & A \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ B & C \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{bmatrix} A' & C \\ A & B \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}}$$

(da A', C, B, A ein eigentliches Punktequadrupel ist, sind die Größen

$$\gamma = \begin{bmatrix} A' & A \\ C & B \end{bmatrix}, \quad 1 - \frac{1}{\gamma} = \begin{bmatrix} A' & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

regulär), so ist

$$1 = u\gamma + v \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}}$$

bzw. weiter

$$\gamma^2 + \frac{v - u - 1}{u}\gamma + \frac{1}{u} = 0$$

wegen $u \neq 0$.

Wegen Hilfssatz 2 sind die Größen

$$\frac{v - u - 1}{u} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{u} = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C & C' \end{bmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

HILFSSATZ 4. *Es besitze $\mathfrak{R}$ einen involutorischen Automorphismus $a \to \bar{a}$, der genau die Elemente von $\mathfrak{K}$ als Fixpunkte besitzt. Ist dann γ ein Element aus*

$\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$, *so gilt*

$$\gamma \to (-\gamma-\bar{\gamma}, \gamma\bar{\gamma}).$$

Sind γ_1, γ_2 *Elemente aus* $\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$ *und ist* $\gamma_i \to (a_i, b_i)$, $i=1, 2$, *so gilt*

$$b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\in\mathfrak{K}.$$

Beweis. Sei $\gamma\in\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$ und sei $a=-(\gamma+\bar{\gamma})$, $b=\gamma\bar{\gamma}$. Wegen $a=\bar{a}$, $b=\bar{b}$ ist $a, b\in\mathfrak{K}$. Wegen Hilfssatz 2 und $\gamma^2-(\gamma+\bar{\gamma})\gamma+\gamma\bar{\gamma}=0$ ist dann $\gamma\to(-\gamma-\bar{\gamma}, \gamma\bar{\gamma})$. Ist nun $\gamma_1, \gamma_2\in\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$, so gilt mit dem gerade Bewiesenen

$$b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\bar{\gamma}_1\gamma_2+\bar{\gamma}_2\gamma_1.$$

Wegen $\overline{\bar{\gamma}_1\gamma_2+\bar{\gamma}_2\gamma_1}=\bar{\gamma}_1\gamma_2+\bar{\gamma}_2\gamma_1$ ist alles bewiesen. Genau so einfach zeigt man

HILFSSATZ 5. *Es sei* $\mathfrak{K}$ *von Charakteristik* 2. *Gilt dann* $\gamma^2\in\mathfrak{K}$ *für jedes* $\gamma\in\mathfrak{R}$, *so hat man für jedes Element* $\gamma\in\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$, $\gamma\to(0, \gamma^2)$. *Sind* γ_1, γ_2 *Elemente aus* $\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$ *und ist* $\gamma_i\to(a_i, b_i)$, $i=1, 2$, *so gilt* $b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=0$.

7. Nicht in allen Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ gilt der Büschelsatz: dies zeigte der Beweis von Satz 2, wenn man für $\mathfrak{K}$ den Körper der rationalen und für $\mathfrak{R}$ den der reellen Zahlen nimmt. Gezeigt wurde dies auch bereits in [1], wo allerdings in der Diskussion ein weiterer Punkt ∞ auftrat[10]). Bevor wir nun die Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ kennzeichnen, in denen der Büschelsatz gilt, wenden wir uns dem Sonderfall zu, daß $\mathfrak{R}$ zusätzlich (neben den in dieser Arbeit stets gemachten Voraussetzungen) ein hyperkomplexes System vom Rang 2 über $\mathfrak{K}$ ist. Dieser Sonderfall umfaßt die Möbius-, die Laguerre-Geometrie und auch die von HOFFMAN [2] untersuchten Geometrien neben unendlich vielen weiteren, paarweise nichtisomorphen, Geometrien.

Satz 3. *Die Geometrien* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$, *für die zusätzlich* $(\mathfrak{R}:\mathfrak{K})=2$ *ist, genügen dem Büschelsatz.*

Beweis. Es seien $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ acht verschiedene Punkte, von denen je zwei konzyklisch sind. Nach (2) liegt also ein eigentliches Punkte-8-tupel vor. Sind dann $AA'BB'$, $AA'C_1C_1'$, $AA'C_2C_2'$, $BB'C_1C_1'$, $BB'C_2C_2'$ konzyklische Punktequadrupel, nicht aber $AA'BC_1$, $AA'BC_2$, $AA'C_1C_2$, so ist zu zeigen, daß auch $C_1C_1'C_2C_2'$ ein konzyklisches Punktequadrupel ist. Zunächst ist $\gamma_i\equiv\begin{bmatrix}A' & A\\ C_i & B\end{bmatrix}\notin\mathfrak{K}$, da sonst die Kreise $(A'AB)$, $(A'AC_i)$ übereinstimmten. Hilfssatz 3 angewandt auf die eigentlichen Punkte-6-tupel A, A', B, B', C_i, C_i', $i=1, 2$, erkennt man, daß gilt $\gamma_i\to(a_i, b_i)$ für ein gewisses $a_i\in\mathfrak{K}$ und für $b_i=\begin{bmatrix}A' & A\\ B' & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & A\\ C_i & C_i'\end{bmatrix}\in\mathfrak{K}$. — Sei nun $1, \vartheta$ eine Basis von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{K}$. Dann ist $\vartheta^2=r+s\vartheta$ für Größen $r, s\in\mathfrak{K}$. Hat man nun nicht

[10]) In [1] waren für $\mathfrak{R}$ nur kommutative Körper zugelassen. Dadurch fielen die Geometrien $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ mit „Laguerre-Charakter" heraus nach Satz 1.

gleichzeitig $s=0$ und Charakteristik $\mathfrak{K}=2$, so ist

$$p+q\vartheta \to p+q(s-\vartheta)$$

ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$, der genau die Elemente von $\mathfrak{K}$ festläßt. Ist gleichzeitig Charakteristik $\mathfrak{K}=2$ und $s=0$, so gilt für jedes $\gamma\in\mathfrak{R}$ sicherlich $\gamma^2\in\mathfrak{K}$. In jedem Falle ist (vermittels der Hilfssätze 4, 5)

$$b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\in\mathfrak{K}.$$

Dann beweist Hilfssatz 1 den Büschelsatz.

8. Definition. *Das Elementepaar γ_1, γ_2 heiße speziell, wenn gilt*

(a) $\gamma_1, \gamma_2\in\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$, $\quad\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\notin\mathfrak{K}$.

(b) *Es gibt Größen a_i und b_i aus $\mathfrak{K}$ mit $\gamma_i\to(a_i, b_i)$ für $i=1, 2$.*

(c) *Es gibt Größen k, ϱ mit*

c_1) $0, 1, b_1, b_2\neq k\in\mathfrak{K}$,

c_2) $1\neq\varrho\in\mathfrak{r}$,

c_3) $1-\varrho\sigma\in\mathfrak{r}$ *für alle* σ *aus* $\left\{1, k, \gamma_1, \gamma_2, k\frac{\gamma_1}{b_1}, k\frac{\gamma_2}{b_2}\right\}$[11]).

c_4) *Es ist* $\gamma_1-\gamma_2\in\mathfrak{r}$, $\quad\frac{\gamma_1}{b_1}-\frac{\gamma_2}{b_2}\in\mathfrak{r}$ *und weiterhin jeweils für* $i=1, 2$

$$1-\gamma_i\sigma\in\mathfrak{r} \quad \text{für alle } \sigma \text{ aus } \left\{1, \frac{k}{b_i}, \frac{1}{k}, \frac{1}{b_i}\right\}^{12}).$$

Definition. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und es sei $\mathfrak{K}$ ein Körper. $\mathfrak{R}$ heiße ein L-Ring in bezug auf $\mathfrak{K}$, wenn gilt*

(L_1) $\mathfrak{K}\subseteqq\mathfrak{R}$.

(L_2) *Das Einselement von $\mathfrak{K}$ ist auch Einselement von $\mathfrak{R}$.*

(L_3) *Für jedes spezielle Elementepaar γ_1, γ_2 gilt*

$$b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\in\mathfrak{K}^{13}),$$

wo b_i durch $\gamma_i\to(a_i, b_i)$ festgelegt ist, $i=1, 2$.

---

[11]) Man beachte $b_i\neq 0$, $i=1, 2$, wegen Hilfssatz 2.

[12]) Ist $\mathfrak{R}$ Körper und besitzt $\mathfrak{K}$ wenigstens sechs verschiedene Elemente, so ist jedes Elementepaar γ_1, γ_2 aus $\mathfrak{R}-\mathfrak{K}$, welches (b) genügt und für das $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\notin\mathfrak{K}$ gilt, speziell: Man braucht nur für k irgendein Element aus $\mathfrak{K}-\{0, 1, -1, b_1, b_2\}$ zu nehmen und $k=\varrho$ zu setzen. (Dabei wird hier auch $k\neq -1$ vorausgesetzt, da sonst $1-\varrho k=0\notin\mathfrak{r}$ wäre.)

[13]) Für den Sonderfall $(\mathfrak{R}:\mathfrak{K})=2$ hatte man $b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\in\mathfrak{K}$ sogar für jedes Elementepaar $\gamma_1, \gamma_2\in\mathfrak{r}-\mathfrak{K}$ mit $\gamma_i\to(a_i, b_i)$. (Hier ist also $\mathfrak{R}$ L-Ring in bezug auf $\mathfrak{K}$.) Benötigt wird die Aussage aber nur für spezielle Elementepaare.

Damit kommen wir zu

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und $\mathfrak{K}$ ein in $\mathfrak{R}$ enthaltener Körper, dessen Einselement auch Einselement von $\mathfrak{R}$ ist. Es gilt: Die Geometrie $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ genügt dann und nur dann ausnahmslos dem Büschelsatz, wenn $\mathfrak{R}$ L-Ring in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{R}$ L-Ring in bezug auf $\mathfrak{K}$ und seien $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ acht verschiedene Punkte, von denen je zwei konzyklisch sind. Nach (2) liegt damit ein eigentliches Punkte-8-tupel vor. Sind dann $AA'BB'$, $AA'C_1C_1'$, $AA'C_2C_2'$, $BB'C_1C_1'$, $BB'C_2C_2'$ konzyklische Punktequadrupel, nicht aber $AA'BC_1$, $AA'BC_2$, $AA'C_1C_2$[14]), so ist also zu zeigen, daß $C_1C_1'C_2C_2'$ ein konzyklisches Punktequadrupel ist. Man hat $\gamma_i \equiv \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} \notin \mathfrak{K}$, da die Kreise $(A'AB)$, $(A'AC_i)$ verschieden sind. Wir weisen nach, daß γ_1, γ_2 ein spezielles Elementepaar ist. (a) ist evident, weil A', A, B, C_i, $i = 1, 2$, eigentliche Punktequadrupel sind und weil $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \begin{bmatrix} A' & A \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \notin \mathfrak{K}$ ist. (b): Hilfssatz 3 angewandt auf die eigentlichen Punkte-6-tupel A, A', B, B', C_i, C_i', $i = 1, 2$, erkennt man, daß gilt $\gamma_i \to (a_i, b_i)$ für ein gewisses $a_i \in \mathfrak{K}$ und für

$$b_i = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}.$$

Für (c) setze man $k = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix}$ und $\varrho = \frac{A - B}{A' - B}$. Zu c_1): Für jedes eigentliche Punktequadrupel P, Q, R, S ist gewiß $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} \neq 0$ wegen $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} \in \mathfrak{r}$. Damit ist $k \neq 0$. Im Falle $k = 1$ wäre $0 \neq \begin{bmatrix} A' & B \\ B' & A \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix} = 1 - k = 0$. Im Falle $k = b_i = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix}$ wäre $\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix} = 1$, was auf $\begin{bmatrix} A' & C_i' \\ C_i & A \end{bmatrix} = 0$ führte.

c_2): Sicherlich ist $\varrho \in \mathfrak{r}$. Im Falle $\varrho = 1$ wäre $A - B = A' - B$, d. h. $A = A'$. Es folgt c_2) aus

$$1 - \varrho = \frac{A - A'}{B - A'}, \qquad 1 - \varrho k = \frac{A' - A}{A' - B'},$$

$$1 - \varrho\gamma_i = \frac{A' - A}{A' - C_i}, \qquad 1 - \varrho k \frac{\gamma_i}{b_i} = \frac{A' - A}{A' - C_i'}.$$

c_4): Es ist

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = \gamma_1\left(1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & A \\ B & C_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \gamma_1\left(1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}\right) = \gamma_1 \begin{bmatrix} A' & C_1 \\ C_2 & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{r}.$$

[14]) Es wird nicht behauptet, daß es eigentliche Punkte-8-tupel mit den genannten Eigenschaften gibt.

Weiter gilt

$$\frac{\gamma_1}{b_1} - \frac{\gamma_2}{b_2} = \frac{\gamma_1}{b_1}\left(1 - \frac{b_1}{b_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

$$= \frac{\gamma_1}{b_1}\left(1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_1 & C_1' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C_2' & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\gamma_1}{b_1}\left(1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_2' & C_1' \end{bmatrix}\right) = \frac{\gamma_1}{b_1}\begin{bmatrix} A' & C_1' \\ C_2' & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{r}.$$

Schließlich ist

$$1 - \gamma_i = \begin{bmatrix} A' & B \\ C_i & A \end{bmatrix}, \quad 1 - \gamma_i \frac{k}{b_i} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i' & C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B \\ C_i' & A \end{bmatrix},$$

$$1 - \frac{\gamma_i}{k} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C_i & A \end{bmatrix},$$

$$1 - \frac{\gamma_i}{b_i} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i' & C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C_i' & A \end{bmatrix}.$$

Da also γ_1, γ_2 ein spezielles Elementepaar ist und da $\mathfrak{R}$ L-Ring in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist, hat man $b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \in \mathfrak{K}$. Mit Hilfssatz 1 ist nun C_1, C_1', C_2, C_2' ein konzyklisches Punktequadrupel. Damit gilt der Büschelsatz.

Sei nun umgekehrt in der Geometrie $(\mathfrak{K}, \mathfrak{R})$ stets der Büschelsatz erfüllt. Sei γ_1, γ_2 ein spezielles Elementepaar und seien a_i, b_i, k, ϱ Größen mit den Eigenschaften (b), (c). Wir konstruieren ein eigentliches Punkte-8-tupel: Sei

$$A = 0, \quad A' = 1, \quad B = 1 - \frac{1}{1-\varrho}, \quad B' = 1 - \frac{1}{1-\varrho k},$$

$$C_i = 1 - \frac{1}{1-\varrho\gamma_i}, \quad C_i' = 1 - \frac{1}{1-\varrho k\frac{\gamma_i}{b_i}}.$$

In der Tat sind die Differenzen je zweier verschiedener Punkte regulär, wie man (a), (b), (c) (s. Def. des speziellen Elementepaares) entnimmt. Weiter sind $AA'BB'$, $AA'C_1C_1'$, $AA'C_2C_2'$, $BB'C_1C_1'$, $BB'C_2C_2'$ konzyklische Punktequadrupel, hingegen nicht $AA'BC_1$, $AA'BC_2$, $AA'C_1C_2$:

Einmal ist

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix} = \frac{A'-B}{A-B}\frac{A-B'}{A'-B'} = k \in \mathfrak{K}, \quad \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix} = \frac{A'-C_i'}{A-C_i'}\frac{A-C_i}{A'-C_i} = \frac{b_i}{k} \in \mathfrak{K},$$

$$\begin{bmatrix} B' & B \\ C_i' & C_i \end{bmatrix} = \frac{B'-C_i}{B-C_i}\frac{B-C_i'}{B'-C_i'} = \frac{-(b_i+\gamma_i^2)+\gamma_i\left(k+\frac{b_i}{k}\right)}{-(b_i+\gamma_i^2)+\gamma_i(1+b_i)} = \frac{a_i+\left(k+\frac{b_i}{k}\right)}{a_i+(1+b_i)} \in \mathfrak{K}^{15}),$$

wenn man bei der letzteren Gleichung $\gamma_i \to (a_i, b_i)$, d.h. $\gamma_i^2 + a_i\gamma_i + b_i = 0$ beachtet. Zum anderen ist

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} = \frac{A'-B}{A-B}\frac{A-C_i}{A'-C_i} = \gamma_i \notin \mathfrak{K} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} A' & A \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \notin \mathfrak{K}$$

[15]) Man braucht sich nicht zu überzeugen, daß die benutzten Nenner regulär sind, da dort von vornherein ja nur reguläre Größen $B - C_i$, $B' - C_i'$ auftreten.

nach (a). Da der Büschelsatz gilt, muß also $C_1C_1'C_2C_2'$ ein konzyklisches Quadrupel sein. Beachtet man jetzt noch

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ B' & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & C_i' \end{bmatrix} = k\,\frac{b_i}{k} = b_i,$$

so folgt aus Hilfssatz 1

$$m = 1 - \frac{1}{b_2}\left(b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) + \frac{b_1}{b_2} \in \mathfrak{R}$$

bzw. weiter, da $b_i \neq 0$ ist,

$$b_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + b_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \in \mathfrak{R}.$$

Damit ist also $\mathfrak{R}$ L-Ring in bezug auf $\mathfrak{R}$.

Literatur

[1] BENZ, W.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. J. reine angew. Math. **199**, 56–90 (1958). – [2] HOFFMAN, A. J.: Chains in the projective line. Duke Math. J. **18**, 827–830 (1951). – [3] PECZAR, L.: Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze. Mh. Math. **54**, 210–220 (1950). – [4] VAN DER WAERDEN, B. L., u. L. J. SMID: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre-Geometrie. Math. Ann. **110**, 753–776 (1935).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. April 1958)

NARAIN, R.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 297–299 (1959)

A Fourier Kernel

By

ROOP NARAIN

1. A function $K(x)$ by means of which an arbitrary function $f(x)$, subject to appropriate conditions, is capable of being represented as a repeated integral

$$f(x) = \int_0^\infty K(xu) \int_0^\infty K(uy) f(y)\, dy\, du, \tag{1.1}$$

has been called a *Fourier kernel* by HARDY and TITCHMARSH ([1], p. 116). Usually (1.1) is written as a pair of reciprocal integral equations

$$g(x) = \int_0^\infty K(xy) f(y)\, dy, \tag{1.2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty K(xy) g(y)\, dy. \tag{1.3}$$

The classical examples $K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$ and $K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ give rise to the Fourier Cosine transform and Fourier Sine transform respectively. Another example of Fourier kernels which contain one parameter is supplied by the Hankel transform in which

$$K(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x), \quad \nu \geqq -\tfrac{1}{2}.$$

Fox [2] has discovered and discussed a number of very general transforms in which $K(x)$ is expressed as linear combination of generalized hypergeometric functions.

The object of this paper is to obtain a new Fourier kernel which involves $p+q$ parameters.

2. Let $\mathfrak{M}(s)$ be the Mellin transform of $K(x)$, i.e.

$$\mathfrak{M}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} K(x)\, dx, \tag{2.1}$$

then it has been proved by WATSON ([3], p. 157) that *a necessary and sufficient condition that $K(x)$ may be a Fourier kernel is that*

$$\mathfrak{M}(s)\, \mathfrak{M}(1-s) = 1. \tag{2.2}$$

Consider the function

$$\sqrt{2}\, G^{q,p}_{2p,2q}\left(\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{2p} \\ b_1, \ldots, b_{2q} \end{matrix}\right),$$

where G denotes the MEIJER'S G-function ([4], p. 206). The Mellin transform of this is

$$\mathfrak{M}(s) = \sqrt{2}\int_0^\infty x^{s-1} G^{q,p}_{2p,2q}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{2p}\\ b_1,\ldots,b_{2q}\end{matrix}\right) dx$$

$$= 2^{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} G^{q,p}_{2p,2q}\left(x\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{2p}\\ b_1,\ldots,b_{2q}\end{matrix}\right) dx.$$

Evaluating this by a known integral ([5], p. 337), we get

$$\mathfrak{M}(s) = 2^{s-\frac{1}{2}}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(1-a_j-\frac{s}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(1-b_{q+j}-\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_{p+j}+\frac{s}{2}\right)},$$

$$-\min \operatorname{Re}(b_j) < \operatorname{Re}\left(\frac{s}{2}\right) < 1-\max \operatorname{Re}(a_j).$$

This will satisfy the functional relation (2.2) if

$$\frac{2^{s-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(1-a_j-\frac{s}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(1-b_{q+j}-\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_{p+j}+\frac{s}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{2^{\frac{1}{2}-s}\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}-a_j+\frac{s}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{1}{2}-b_{q+j}+\frac{s}{2}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}+a_{p+j}-\frac{s}{2}\right)}=1.$$

This relation admits of a solution if $a_j+a_{p+j}=\frac{1}{2}$, $(j=1,\ldots,p)$ and $b_j+b_{q+j}=\frac{1}{2}$, $(j=1,\ldots,q)$. Hence we have

$$\sqrt{2}\,G^{q,p}_{2p,2q}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\frac{1}{2}-a_1,\ldots,\frac{1}{2}-a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\frac{1}{2}-b_1,\ldots,\frac{1}{2}-b_q\end{matrix}\right)$$

as a function which plays the role of a Fourier kernel involving $p+q$ parameters.

Note that ([6], p. 220)

$$2\beta^{\frac{1}{2}} G^{q,p}_{2p,2q}\left(\beta x^2\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\frac{1}{2}-a_1,\ldots,\frac{1}{2}-a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\frac{1}{2}-b_1,\ldots,\frac{1}{2}-b_q\end{matrix}\right)$$

and

$$2\lambda x^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} G^{p,q}_{2p,2q}\left(x^{2\lambda}\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\frac{1}{2}-a_1,\ldots,\frac{1}{2}-a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\frac{1}{2}-b_1,\ldots,\frac{1}{2}-b_q\end{matrix}\right)$$

are also Fourier kernels.

3. With the above Fourier kernel, a new reciprocal transform may be introduced in the form

$$g(x) = \sqrt{2}\int_0^\infty G^{q,p}_{2p,2q}\left(\frac{x^2y^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\frac{1}{2}-a_1,\ldots,\frac{1}{2}-a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\frac{1}{2}-b_1,\ldots,\frac{1}{2}-b_q\end{matrix}\right) f(y)\,dy \tag{3.1}$$

and a systematic study of it can be made as in the Hankel transform. Clearly (3.1) implies

$$f(x) = \sqrt{2}\int_0^\infty G^{q,p}_{\frac{1}{2},2q}\left(\frac{x^2y^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\frac{1}{2}-a_1,\ldots,\frac{1}{2}-a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\frac{1}{2}-b_1,\ldots,\frac{1}{2}-b_q\end{matrix}\right) g(y)\,dy. \tag{3.2}$$

The Hankel transform

$$g(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\,J_\nu(xy)\,f(y)\,dy$$

is a particular case of (3.1) for if we consider $\sqrt{2}\,G^{1,0}_{0,2}\left(\frac{x^2}{4}\,\middle|\,b_1, b_2\right)$, then ([5], p. 380), with $b_1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu$ and $b_2 = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu$,

$$\sqrt{2}\,G^{1,0}_{0,2}\left(\frac{x^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu,\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right) = \sqrt{x}\,J_\nu(x).$$

References

[1] Hardy, G. H., and E. C. Titchmarsh: A class of Fourier kernel. Proc. London Math. Soc., Ser. II **35**, 116–155 (1933). — [2] Fox, C.: A generalization of the Fourier Bessel integral transform. Proc. London Math. Soc., Ser. II **29**, 401–452 (1929). — [3] Watson, G. N.: General transforms. Proc. London Math. Soc., Ser. II **35**, 156–199 (1933). — [4] Bateman Project: Higher transcendental functions. **1** (1953). — [5] Bateman Project: Tables of integral transforms. **1** (1954). — [6] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals (1948).

Department of Mathematics, University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 20. Mai 1958)

KLINGENBERG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 300–309 (1959)

Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermiteschen Mannigfaltigkeiten

Von
WILHELM KLINGENBERG

1. Resultate

1.1. Sei M^n eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. M^n bestimmt das Hauptfaserbündel E aller Bezugssysteme über M^n mit der Strukturgruppe $GL(n, \boldsymbol{R})$, der allgemeinen linearen Gruppe über den reellen Zahlen. Die Faser über einem Punkt p von M^n besteht also aus der Menge der Systeme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ von n linear unabhängigen Tangentialvektoren e_i in p. Die Projektionsabbildung $\pi: E \to M^n$ ordnet einem Bezugssystem $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ in einem Punkt p von M^n den Punkt p zu. Die Gruppe $GL(n, \boldsymbol{R})$ operiert auf jeder Faser von E effektiv und transitiv. Vgl. zu diesen Begriffen STEENROD [12], HIRZEBRUCH [9] und, unserer Fragestellung besonders gut angepaßt, NOMIZU [11].

Sei nun G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \boldsymbol{R})$. Unter einem *G-Bündel (von Bezugssystemen) E_G über M^n* verstehen wir eine Reduktion von E zu einem Hauptfaserbündel mit G als Strukturgruppe. Das heißt: E_G ist ein Hauptfaserbündel über M^n mit G als Strukturgruppe, und es ist eine differenzierbare Injektion f von E_G in E gegeben mit folgenden Eigenschaften: f ist verträglich mit den Operationen von G auf E_G und auf E, und f induziert auf dem Basisraum M^n die Identität. Man kann sich also E_G in E eingebettet vorstellen derart, daß im Tangentialraum eines jeden Punktes p von M^n eine Teilmenge von Bezugssystemen ausgezeichnet ist, auf der G effektiv und transitiv operiert. Vgl. zu diesen Begriffen STEENROD [12], HIRZEBRUCH [9] und vor allem NOMIZU [11]. Wir bemerken ausdrücklich, daß wir uns nicht für die Äquivalenzklassen von Faserbündeln interessieren, wie STEENROD und HIRZEBRUCH l.c. es tun, sondern für die Faserbündel selber.

Falls z.B. $G = O(n)$, die orthogonale Gruppe, oder $G = O^k(n)$, die orthogonale Gruppe einer indefiniten quadratischen Form mit einer Signatur $k > 0$, so ist ein G-Bündel E_G gleichbedeutend mit einer definiten oder indefiniten Riemannschen Metrik auf M^n. Denn sei etwa $G = O(n)$. Zu gegebenem E_G erhält man eine Riemannsche Metrik auf M^n, indem man diejenigen Bezugssysteme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, die zu E_G gehören, als orthonormiert bezeichnet. Umgekehrt definieren die orthonormierten Bezugssysteme einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ein $O(n)$-Bündel über M^n.

Wir fragen nun, für welche abgeschlossenen Untergruppen G von $GL(n, \boldsymbol{R})$ es in einem G-Bündel E_G stets einen kanonischen, d.h. durch die Struktur von E_G irgendwie ausgezeichneten, linearen Zusammenhang gibt; zum Begriff linearer Zusammenhang in einem G-Bündel E_G vgl. Abschnitt 2 und NOMIZU [11].

Falls z. B. $G = GL(n, \boldsymbol{R})$, so ist unter den linearen Zusammenhängen von E_G keiner ausgezeichnet. Falls dagegen G eine der orthogonalen Gruppen $O(n)$ oder $O^k(n)$ ist, oder eine der zugehörigen speziellen orthogonalen Gruppen $SO(n)$ und $SO^k(n)$, so existiert in einem G-Bündel E_G stets ein wohlbestimmter linearer Zusammenhang, nämlich der durch die Christoffel-Symbole beschriebene Levi-Civita-Zusammenhang. Er ist unter den linearen Zusammenhängen in E_G durch die Eigenschaft charakterisiert, daß für ihn die Torsion verschwindet. Wir bemerken, daß die genannten orthogonalen Gruppen gerade diejenigen reellen Formen der komplexen orthogonalen Gruppe $O(n, \boldsymbol{C})$ repräsentieren, die Untergruppe von $(GL, n, \boldsymbol{R})$ sind[1].

Es war nun eine Entdeckung von H. WEYL [*13*], [*14*], daß die genannten orthogonalen Gruppen sich durch diese Eigenschaft kennzeichnen lassen. Genauer: Die genannten orthogonalen Gruppen sind die einzigen Untergruppen G von $GL(n, \boldsymbol{R})$, für die es zu jedem G-Bündel E_G genau einen linearen Zusammenhang gibt, der keine Torsion hat. WEYL gelangte auf diese Weise zu einer Kennzeichnung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (mit definiter oder indefiniter Metrik) unter allen Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang. WEYL selber maß diesem Ergebnis eine gewisse naturphilosophische Bedeutung zu, was sich schon in dem Titel der Arbeit [*13*] andeutet. Entsprechend dieser Tendenz wird dieser Problemkreis neuerdings gelegentlich als Weylsches Raumproblem bezeichnet.

Die vorstehende Formulierung von WEYLs Ergebnis geht, abgesehen von der modernen Terminologie, auf E. CARTAN [*1*], [*2*] zurück. Es ist CARTANs Verdienst, die oft schwer zu verstehenden Überlegungen von WEYL auf ihren mathematischen Inhalt reduziert zu haben. Zusammenfassend gilt also der folgende Satz:

THEOREM 1 (WEYL-CARTAN). *Sei M^n eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. G bezeichne eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \boldsymbol{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist eine der orthogonalen Gruppen $O(n)$, $O^k(n)$, $SO(n)$, $SO^k(n)$ oder, was damit gleichbedeutend ist, G ist eine in $GL(n, \boldsymbol{R})$ enthaltene reelle Form der komplexen orthogonalen Gruppe $O(n, \boldsymbol{C})$*[1].

(b) *Für jedes G-Bündel E_G von Bezugssystemen über M^n gibt es genau einen linearen Zusammenhang, dessen Torsionsformen verschwinden.*

Für den Beweis dieses Theorems verweisen wir auf CARTANs Arbeiten [*1*] und [*2*]. Wir bemerken hier nur folgendes: Daß (a) (b) impliziert, ist wohlbekannt; es ist gleichbedeutend damit, daß für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit die Christoffel-Symbole wohlbestimmt sind. Der Schluß von (b) auf (a) dagegen beruht wesentlich auf folgendem

LEMMA 1 (CARTAN). *Eine irreduzible abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \boldsymbol{R})$ der Dimension $n(n-1)/2$ ist eine der in Theorem 1 genannten orthogonalen Gruppen.*

---

[1] Für n gerade gibt es eine reelle Form von $O(n, \boldsymbol{C})$, die nicht Untergruppe von $GL(n, \boldsymbol{R})$ ist, nämlich den Typ (D III) bei CARTAN [*4*], 405.

Zum Beweis dieses Lemmas benutzt CARTAN [1], [2] die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen und ihrer linearen Darstellungen. Einen Eindruck von den dabei vorkommenden Schlüssen gewinnt man, wenn man sich den unten folgenden Beweis unseres Lemmas 2 ansieht, den wir nach CARTANs Vorbild führen.

1.2. Sei M^{2n} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$ mit einer fastkomplexen Struktur. Das heißt, es ist eine Reduktion des $GL(2n, \mathbb{R})$-Bündels E von Bezugssystemen über M^{2n} zu einem $GL(n, C)$-Bündel E^* gegeben, wobei $GL(n, C)$, die allgemeine lineare Gruppe über den komplexen Zahlen, als eine Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ aufgefaßt wird; vgl. zu dieser Definition HIRZEBRUCH [9]. Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, C)$. Unter einem *G-Bündel E_G^* (von Bezugssystemen) über der fastkomplexen Mannigfaltigkeit M^{2n}* verstehen wir eine Reduktion des Bündels E^* zu einem Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe G.

Falls z.B. $G = U(n)$, die unitäre Gruppe, oder $G = U^k(n)$, die unitäre Gruppe einer indefiniten Hermitischen Form mit einer Signatur $k > 0$, so ist ein G-Bündel E_G^* über M^{2n} nichts anderes als eine definite oder indefinite Hermitische Metrik auf der fastkomplexen Mannigfaltigkeit M^{2n}.

Wir fragen nun, für welche abgeschlossenen Untergruppen G von $GL(n, C)$ zu jedem G-Bündel E_G^* über einer fastkomplexen Mannigfaltigkeit M^{2n} ein durch die vorgegebene Struktur irgendwie ausgezeichneter linearer Zusammenhang existiert. Falls G die volle Gruppe $GL(n, C)$ ist, so existiert nicht ein solcher kanonischer Zusammenhang in E_G^*. Falls dagegen $G = U(n)$ ist, so gibt es einen kanonischen Zusammenhang in E_G^*; er ist festgelegt durch die Forderung, daß in den Torsionsformen des Zusammenhanges die Terme vom gemischten Typ [auch Terme vom Typ (1.1) genannt] verschwinden sollen, vgl. CHERN [5].

Die unitäre Gruppe $U(n)$ ist die kompakte reelle Form der Lieschen Gruppe $GL(n, C)$. Es stellt sich heraus, daß auch für den Fall, daß G eine nicht kompakte reelle Form von $GL(n, C)$ ist, es in einem G-Bündel E_G^* genau einen linearen Zusammenhang gibt mit der Eigenschaft, daß die gemischten Terme der Torsionsformen verschwinden, vgl. LIBERMANN [10]. Es ist nun das Hauptergebnis dieser Note, daß dieses die reellen Formen der Gruppe $GL(n, C)$ kennzeichnet:

THEOREM 2. *Sei M^{2n} eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$. G bezeichne eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, C)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist eine reelle Form von $GL(n, C)$.*

(b) *In jedem G-Bündel E_G^* von Bezugssystemen über M^{2n} gibt es genau einen linearen Zusammenhang, für den die gemischten Terme der Torsionsformen verschwinden.*

Wir stellen Repräsentanten für die reellen Formen von $GL(n, C)$ kurz zusammen, vgl. CARTAN [4]. Zunächst zerfällen wir $GL(n, C)$ in die lokaldirekte Summe

$$GL(n, C) = SL(n, C) \oplus C^*. \tag{1}$$

Hier repräsentiert C^*, die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen, das zusammenhängende Zentrum von $GL(n, C)$, und $SL(n, C)$ ist die spezielle lineare Gruppe über den komplexen Zahlen.

Die reellen Formen von C^* sind R^*, die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen, und T, der 1-dimensionale Torus. Die reellen Formen von $SL(n, C)$ sind $SU(n)$, die spezielle unitäre Gruppe, $SU^k(n)$, die spezielle unitäre Gruppe einer indefiniten Hermitischen Form mit einer Signatur $k>0$, $SL(n, R)$, die spezielle lineare Gruppe über den reellen Zahlen, und, für $n=2p$, $SL(p, K)$, die spezielle lineare Gruppe über den Quaternionen. Die reellen Formen von $GL(n, C)$ erhält man, indem man eine reelle Form von $SL(n, C)$ mit einer reellen Form von C^* kombiniert.

Mit Hilfe von Theorem 2 läßt sich nun leicht eine Charakterisierung der Hermiteschen Mannigfaltigkeiten angeben, von der im Titel der Arbeit die Rede ist. Von den verschiedenen Möglichkeiten hierzu wählen wir die folgende: Für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit M^{2n} läßt sich das $GL(n, C)$-Bündel E^* stets zu einem $U(n)$-Bündel reduzieren, jedoch im allgemeinen nicht zu einem G-Bündel mit G eine nicht kompakte reelle Form von $GL(n, C)$; die Möglichkeit zu einer solchen Reduktion impliziert nämlich, daß gewisse charakteristische Klassen von M^{2n} spezielle Werte annehmen, vgl. HIRZEBRUCH [9], STEENROD [12]. Wenn wir also eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit M^{2n} *allgemein* nennen, wenn ihre charakteristischen Klassen nicht die genannten speziellen Werte annehmen, so liefert Theorem 2 eine Kennzeichnung der $U(n)$-Bündel über allgemeinen M^{2n} und *damit eine Kennzeichnung der Hermiteschen Strukturen auf allgemeinen M^{2n} unter den G-Bündeln E_G^* über M^{2n}.*

1.3. Im Laufe des Beweises von Theorem 2 werden wir folgendes Lemma beweisen, das auch von selbständigem Interesse sein dürfte:

LEMMA 2. *Eine irreduzible abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, C)$ der reellen Dimension n^2 ist eine reelle Form von $GL(n, C)$.*

Umgekehrt ist bekanntlich jede reelle Form von $GL(n, C)$ irreduzibel und von der Dimension n^2. Das Lemma 2 spielt in dem Beweis von Theorem 2 eine ähnliche Rolle wie das Lemma 1 in dem Beweis von Theorem 1.

2. Grundlegende Begriffe und Definitionen

2.1. Der Hauptgegenstand dieser Note ist der Beweis von Theorem 2. Bevor wir jedoch in den Beweis eintreten, stellen wir einige grundlegende Begriffe über lineare Zusammenhänge in Faserbündeln zusammen, vgl. EHRESMANN [8], CHERN [6], NOMIZU [11].

Wir betrachten ein G-Bündel E_G von Bezugssystemen über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n der reellen Dimension n, wobei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, R)$ sein soll. M^n ist von einer Familie von Koordinatenumgebungen U überdeckt, deren jede einen lokalen Schnitt

$$s_U : U \to \pi^{-1}(U) \tag{2}$$

besitzt. Hier haben wir mit $\pi: E_G \to M^n$ die Projektion des G-Bündels E_G bezeichnet. Durch s_U ist jedem Punkt p von U ein Bezugssystem

$$(e_i)_{1 \leq i \leq n} \tag{3}$$

im Tangentialraum von p zugeordnet. Die zu den Vektoren (3) dualen 1-Formen auf U bezeichnen wir mit $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Ein linearer Zusammenhang bezüglich s_U ist nun gegeben durch eine (n, n)-Matrix

$$(\omega_i^j)_{1 \leq i,j \leq n} \tag{4}$$

von 1-Formen auf U derart, daß die Werte dieser Matrix zu der Lie-Algebra $\mathfrak{G}$ der Strukturgruppe G gehören. Genauer: Bezüglich der Basis (3) besitzt die Liesche Gruppe G und folglich auch die Lie-Algebra $\mathfrak{G}$ eine lineare Darstellung durch (n, n)-Matrizen. Die Forderung lautet nun: Die Werte der Matrix (4) sollen dieser linearen Darstellung von $\mathfrak{G}$ angehören.

Sei nun V eine zweite Koordinatenumgebung mit dem lokalen Schnitt s_V. Die dadurch bestimmten Bezugssysteme seien mit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ bezeichnet. Der lineare Zusammenhang bezüglich s_V sei durch die Formen-Matrix

$$(\varphi_i^j)_{1 \leq i,j \leq n} \tag{5}$$

gegeben. Dann gilt für die Punkte von $U \cap V$ folgende Beziehung zwischen den Elementen von (4) und (5):

$$\Sigma \varphi_i^j a_j^k = \Sigma a_i^j \omega_j^k + d a_i^k \tag{6}$$

Hierin repräsentiert

$$(a_i^j)_{1 \leq i,j \leq n} \tag{7}$$

die lineare Transformation $s_V \circ s_U^{-1}$, die das Bezugssystem (e_i) in das Bezugssystem (f_i) überführt.

Die Bedeutung der Formen (4) besteht in folgendem: Durch die Formen (4) ist ein Differential

$$d e_i = \Sigma \omega_i^j e_j \tag{8}$$

der Basisvektoren (3) über U erklärt. Sei nun c eine Kurve in U. Dann wird (8) ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung entlang c. Ein Vektor im Anfangspunkt von c bestimmt damit einen Vektor im Endpunkt von c. Diese Operation heißt Parallelverschiebung des Vektors entlang c. Die Beziehung (6) ist nun nichts anderes, als daß in den Punkten von $U \cap V$ die Differentialgleichung (8) und die Differentialgleichung $d f_i = \Sigma \varphi_i^j f_j$ äquivalent sind. Damit ist dann die Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl der lokalen Schnitte, und die Kurve c kann sich durch beliebige Koordinatenumgebungen erstrecken.

Sei nun ein linearer Zusammenhang bezüglich s_U durch die Formen (4) gegeben. Die Torsionsformen ϑ^i dieses Zusammenhanges sind dann definiert durch

$$\vartheta^i = d\omega^i - \Sigma \omega^j \wedge \omega_j^i. \tag{9}$$

Den Werten $(\vartheta^i)_{1\leq i\leq n}$ dieser Formen ist der Vektor $\Sigma\vartheta^i e_i$ im Tangentialraum zugeordnet. Aus (6) folgt leicht, daß dieser Vektor unabhängig ist von der Wahl des Schnittes s_U über U. Die in Theorem 1 ausgesprochene Bedingung, daß dieser Vektor verschwinden soll, hat also einen Sinn.

2.2. Es sei M^{2n} eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$. Mit E^* bezeichnen wir das $GL(n, C)$-Bündel über M^{2n}. Die Faser $\pi^{-1}(p)$ über einem Punkt p von M^{2n} besteht aus der Menge der R-linearen Abbildungen des komplexen Vektorraums C^n auf den Tangentialraum T_p an M^{2n} in p. Eine jede solche Abbildung $C^n \to T_p$ kann durch $2n$ Vektoren

$$(e_i)_{1\leq i\leq n};\quad (e_{i+n})_{1\leq i\leq n} \tag{10}$$

in T_p repräsentiert werden derart, daß die Abbildung durch

$$(u^i)_{1\leq i\leq n} \to \Sigma u^j e_j + \Sigma \bar{u}^j e_{j+n} \tag{11}$$

gegeben ist. Die Vektoren e_i und e_{i+n} aus (10) sind dabei nicht reelle Vektoren, sondern nur ihre Linearkombinationen $g_i = (e_i + e_{i+n})$ und $g_{i+n} = \sqrt{-1}\,(e_i - e_{i+n})$ sind es, wie man aus der Identität

$$2(\Sigma u^j e_j + \Sigma \bar{u}^j e_{j+n}) = \Sigma (u^j + \bar{u}^j) g_j + \Sigma \sqrt{-1}\,(u^j - \bar{u}^j) g_{j+n}$$

entnimmt.

Die Wirkung eines Elements $(a_i^j) \in GL(n, C)$ auf ein Bezugssystem (10) ist durch

$$e_i \to \Sigma a_i^j e_j;\quad e_{i+n} \to \Sigma \bar{a}_i^j e_{j+n} \tag{12}$$

gegeben.

Die zu den Vektoren (10) dualen 1-Formen bezeichnen wir mit

$$(\omega^i)_{1\leq i\leq n};\quad (\omega^{i+n})_{1\leq i\leq n}. \tag{13}$$

Wegen (11) gilt für deren Werte die Beziehung $\omega^{i+n} = \bar{\omega}^i$.

2.3. Wir betrachten nun ein G-Bündel E_G^* von Bezugssystemen über der fastkomplexen Mannigfaltigkeit M^{2n}, G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, C)$. Eine Faser von E_G^* kann dabei repräsentiert werden durch eine Menge von Bezugssystemen (10), auf denen die Strukturgruppe G auf die in (12) angegebene Weise operiert. Diese Operation ist jeweils auf den ersten n und auf den letzten n Basiselementen (10) der Faser effektiv und einfach transitiv.

Einen linearen Zusammenhang definieren wir wiederum mit Hilfe von Koordinatenumgebungen U und lokalen Schnitten s_U (2) über U. Bezüglich s_U ist der Zusammenhang dann durch eine (n, n)-Matrix (4) von 1-Formen gegeben, deren Werte auf die oben beschriebene Weise der durch s_U vermittelten linearen Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{G}$ von G angehören. Wenn dann für eine zweite Koordinatenumgebung V und zugehörigen Schnitt s_V der Zusammenhang durch eine Matrix (5) gegeben ist, so gilt für die Punkte von $U \cap V$ wiederum die Relation (6) mit (7).

Ebenso wie in **2.1** ist durch einen linearen Zusammenhang in E_G^* eine Parallelverschiebung von Vektoren längs Kurven c in M^{2n} definiert, die unabhängig ist von der Wahl der lokalen Schnitte s_U.

Die Torsionsformen ϑ^i eines Zusammenhangs in E_G^* sind durch (9) definiert. Jedem Wertesystem $(\vartheta^i)_{1\leq i\leq n}$ dieser Formen ist der Vektor

$$\Sigma \vartheta^j e_j + \Sigma \vartheta^{j+n} e_{j+n} \tag{14}$$

im Tangentialraum zugeordnet. Dieser Vektor ist wiederum unabhängig von der Wahl des lokalen Schnitts s_U.

Die 2-Formen lassen sich in zwei Summanden zerlegen, die man den reinen und den gemischten Term nennt. Der reine Term ist eine Linearkombination aus den Formen $\omega^j \wedge \omega^k$ und $\omega^{j+n} \wedge \omega^{k+n}$ und der gemischte Term ist eine Linearkombination aus den Formen $\omega^j \wedge \omega^{k+n}$. Diese Zerlegung einer 2-Form auf einer fastkomplexen Mannigfaltigkeit ist unabhängig von dem lokalen Schnitt s_U, mit dessen Hilfe die Formen ω^i und ω^{i+n} definiert sind, vgl. etwa HIRZEBRUCH [9]. Ihr entspricht eine Zerlegung der vektorwertigen Form (14) in zwei Terme, deren Komponenten ausschließlich aus reinen bzw. gemischten 2-Formen bestehen. Folglich hat die in Theorem 2 auftretende Bedingung, daß die gemischten Terme der Torsionsformen verschwinden sollen, einen Sinn.

3. Beweis von Theorem 2

3.1. Wir betrachten die Bedingung, daß der gemischte Term der Torsionsformen ϑ^i verschwinden soll:

$$\Sigma \omega^j \wedge \omega_j^i \equiv d\omega^i \,(\mathrm{mod}\, \omega^k \wedge \omega^l, \omega^{k+n} \wedge \omega^{l+n}) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Wir setzen $r = \dim \mathfrak{G} = \dim G$, wo $\mathfrak{G}$ die Lie-Algebra von G ist. Alle Dimensionen sind über den reellen Zahlen zu verstehen.

r ist also die Anzahl der (reell) linear unabhängigen 1-Formen ω_j^i (4), die den Zusammenhang über U bestimmen. Jede dieser Formen ω_j^i ist durch ihre $2n$ Komponenten bezüglich der Formen ω^i, ω^{i+n} (13) bestimmt.

In einem Punkt p von U repräsentieren die Gln. (15) $2n^3$ reell unabhängige lineare Gleichungen für die $2nr$ Komponenten von (ω_i^j). Auf der rechten Seite von (15) stehen die Komponenten der gemischten Terme von $d\omega^i$. Offenbar können diese Komponenten beliebig vorgeschriebene Werte annehmen, wenn wir nur den lokalen Schnitt s_U in der Umgebung von $p \in U$ geeignet modifizieren, unter Festhaltung des Wertes von s_U in p. Dabei mag es sich als notwendig erweisen, daß wir für diese Modifikation von s_U aus dem gegebenen G-Bündel E_G^* hinausgehen müssen in das $GL(n, C)$-Bündel E^*, in das wir uns stets das Bündel E_G^* eingebettet denken. Es ist dann klar, wie wir das G-Bündel E_G^* zu einem neuen G-Bündel $E_G^{*\prime} \subset E^*$ über U abzuändern haben, so daß $E_G^{*\prime}$ die Modifikation von s_U als Schnitt über U besitzt. Da nun die Gln. (15) für *jedes* G-Bündel über M^{2n} gelten sollen, erkennen wir, daß in der Tat die Werte auf der rechten Seite von (15) beliebig vorgeschrieben werden können.

Indem wir nun noch bemerken, daß die Gln. (15) nach den Unbekannten, nämlich den Komponenten der ω_j^i, aufgelöst sind, erhalten wir folgendes Ergebnis: *Die Gln.* (15) *haben dann und nur dann für jedes G-Bündel eine Lösung, wenn* $2n^3 = 2nr$, *d.h.* $r = \dim G = n^2$.

Da eine reelle Form G von $GL(n, C)$ gerade die Dimension n^2 hat, *haben wir gezeigt, daß in Theorem 2 die Aussage* (a) *die Aussage* (b) *impliziert.*

Andererseits haben wir gezeigt

SATZ 1. *Die Bedingung* (b) *in Theorem 2 impliziert*

$$\dim G = n^2. \tag{16}$$

Hieraus folgt die Aussage (a) im Falle $n = 1$, da die Untergruppen der Dimension 1 von $GL(1, C)$ in der Tat reelle Formen von $GL(1, C)$ sind. *Wir setzen daher künftig* $n \geqq 2$ *voraus.*

SATZ 2. *Aus der Bedingung* (b) *in Theorem 2 folgt, daß G irreduzibel ist.*

Angenommen, G und folglich $\mathfrak{G}$ seien nicht irreduzibel. Das heißt, daß für eine geeignete Wahl des lokalen Schnitts ein q, $1 \leqq q \leqq n-1$, existiert, so daß

$$\omega_\alpha^\varrho = 0, \quad 1 \leqq \alpha \leqq q, \quad q+1 \leqq \varrho \leqq n. \tag{17}$$

(Dabei mag es notwendig sein, daß wir mit dem modifizierten Schnitt aus dem G-Bündel E_G^* hinauszugehen haben, wobei wir uns E_G^* in E^* eingebettet denken. Wie wir oben schon einmal ausgeführt haben, läßt sich dann aber ein neues G-Bündel $E_G^{*\prime}$ angeben, dem der modifizierte Schnitt angehört.) Im Falle (17) besitzen nun aber die Gln. (15) für $i = \varrho$ keine Lösung, da die linke Seite von (15) keinen Term der Form $\omega^\alpha \wedge \omega^{k+n}$ enthält, während auf der rechten Seite von (15) solche Terme vorkommen, jedenfalls, nachdem man das G-Bündel E_G^* in der Umgebung von p, unter Festhaltung seines Wertes im Punkte p, geeignet modifiziert hat. Damit ist Satz 2 bewiesen.

3.2. Auf Grund der Sätze 1 und 2 ist der Beweis von Theorem 2 auf einen Beweis von Lemma 2 in **1.3** zurückgeführt. Der Rest der Note ist dieser Aufgabe gewidmet.

Wir zerlegen die Gruppe $GL(n, C)$ gemäß (1) in die einfache Gruppe $SL(n, C)$ mit

$$\dim SL(n, C) = 2n^2 - 2 \tag{18}$$

und in das 2-dimensionale Zentrum C^*. Alle Dimensionen verstehen sich über den reellen Zahlen. Wir betrachten nun die Untergruppe H von G, die in $SL(n, C)$ enthalten ist:

$$H = G \cap SL(n, C). \tag{19}$$

Mit G ist auch H irreduzibel. Aus (16), (18) und $\dim GL(n, C) = 2n^2$ folgt

$$\dim H = m, \quad n^2 - 2 \leqq m \leqq n^2. \tag{20}$$

Mit K bezeichnen wir die Komplexifikation von H in $GL(n, C)$:

$$K = \text{complexif}(H). \tag{21}$$

K ist offenbar eine komplexe irreduzible Untergruppe von $SL(n, C)$.

Aus (20) folgt für die reelle Dimension von K

$$\dim K \geqq n^2 - 2. \tag{22}$$

SATZ 3. *Eine irreduzible komplexe Untergruppe K von $SL(n, C)$ der reellen Dimension $\geqq n^2-2$ ist einfach* $(n \geqq 2)$.

Für den Beweis verwenden wir folgende wohlbekannte Tatsache, vgl. etwa DYNKIN [7]: Eine irreduzible Untergruppe K von $SL(n, C)$ ist äquivalent mit einem Tensorprodukt

$$K_1 \otimes \cdots \otimes K_h, \tag{23}$$

wobei jedes der K_i eine irreduzible einfache Untergruppe von $SL(n_i, C)$ ist mit

$$\Pi n_i = n, \quad n_i \geqq 2 \quad (i = 1, \ldots, h). \tag{24}$$

Folglich haben wir

$$\dim K_i = r_i \leqq 2n_i^2 - 2 \quad (i = 1, \ldots, h). \tag{25}$$

Aus (22) bis (25) ergibt sich

$$n_1^2 \cdot \cdots \cdot n_h^2 - 2 \leqq \dim K = r_1 + \cdots + r_h \leqq 2(n_1^2 + \cdots + n_h^2) - 2h. \tag{26}$$

Angenommen es wäre $h > 1$, d.h. K nicht einfach. Wir können $n_i \leqq n_1$ $(i = 1, \ldots, h)$ annehmen. Aus (26) erhalten wir

$$\begin{aligned} n_1^2(4^{h-1} - 2) &\leqq n_1^2(n_2^2 \cdot \cdots \cdot n_h^2 - 2) \\ &\leqq 2(n_2^2 + \cdots + n_h^2) - 2(h-1) \leqq 2(h-1)n_1^2 - 2(h-1). \end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Damit ist Satz 3 bewiesen.

3.3. Auf Grund von Satz 3 ist unsere nächste Aufgabe festzustellen, welche einfachen komplexen Gruppen K der reellen Dimension $\geqq n^2-2$ eine irreduzible lineare Darstellung vom Grade n besitzen. Dabei benutzen wir einige wohlbekannte Tatsachen über irreduzible lineare Darstellungen einfacher Liescher Gruppen, vgl. CARTAN [1], WEYL [15], DYNKIN [7].

A. *K sei vom Typ A_{r-1}, $r \geqq 2$.* Falls wir die lineare Darstellung vom niedrigsten Grade nehmen, so ist dieser Grad r, also $K = SL(n, C)$. Eine beliebige andere lineare Darstellung des Typs A_{r-1} hat wenigstens den Grad $r(r-1)/2$, also $n \geqq r(r-1)/2$. Andererseits folgt aus (22)

$$\dim K = 2r^2 - 2 \geqq n^2 - 2,$$

und diese Ungleichungen implizieren $r = n = 3$, also wiederum $K = SL(n, C)$.

B. *K sei vom Typ B_r, $r \geqq 2$.* Der Grad einer linearen Darstellung des Typs B_r ist wenigstens $2r+1$, also $n \geqq 2r+1$. Andererseits ist $\dim K = 4r^2 - 2r \geqq n^2 - 2$. Diese Ungleichungen sind jedoch unverträglich für $r \geqq 2$.

C. *K sei vom Typ C_r, $r \geqq 3$.* Die lineare Darstellung niedrigsten Grades von C_r ist die komplexe symplektische Gruppe $Sp(r, C)$. Der Grad dieser Darstellung ist $2r$. Die Ungleichungen $n = 2r$ und $\dim K = 4r^2 + 2r \geqq n^2 - 2$ (22) sind miteinander verträglich. Der Grad jeder anderen linearen Darstellung

des Typs C_r ist mindestens $r(2r-1)-1$. Die Ungleichungen $n \geqq r(2r-1)-1$ und $\dim K = 4r^2+2r \geqq n^2-2$ sind nicht mit $r \geqq 3$ verträglich.

D. *K sei vom Typ D_r, $r \geqq 4$.* Die entsprechenden Ungleichungen lauten hier $n \geqq 2r$ und $\dim K = 4r^2-2r \geqq n^2-2$. Dies ist jedoch nicht verträglich mit $r \geqq 4$.

E. *K sei eine der fünf einfachen Ausnahmegruppen.* Man verifiziert mit Hilfe der zitierten Ergebnisse sehr leicht, daß keine dieser Gruppen eine lineare Darstellung vom Grade n besitzt und gleichzeitig der Bedingung (22) genügt.

Zusammenfassend haben wir also bewiesen:

SATZ 4. *Die einzige einfache komplexe Untergruppe K von $SL(n, C)$, $n \geqq 2$, mit einer reellen Dimension $\geqq n^2-2$ ist, außer $SL(n, C)$, für $n = 2r$ die komplexe symplektische Gruppe $Sp(r, C)$.*

Vgl. hierzu auch CARTAN [3].

3.4. Wir kehren jetzt zur Gruppe H (19) zurück, deren Komplexifikation (21) die Gruppe K ist. Da K einfach ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten: $H = K$ oder H eine reelle Form von K.

Im ersten Falle haben wir aus Satz 4 $\dim H = 2n^2-2$ oder n^2+2, $n \geqq 2$; beides widerspricht jedoch der Ungleichung (20).

Folglich ist H eine reelle Form von K und aus Satz 4 und (20) ergibt sich $K = SL(n, C)$ und $\dim H = n^2-1$. Aus (19) ergibt sich damit, daß G in der Tat eine reelle Form von $GL(n, C)$ ist.

Literatur

[1] CARTAN, E.: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, Nony, Paris 1894. — [2] CARTAN, E.: Sur un théorème fondamental de M. H. WEYL dans la théorie de l'espace métrique. C. R. Acad. Sci. Paris **175**, 82–85 (1922). — [3] CARTAN, E.: Sur un théorème fondamental de M. H. WEYL. J. Math. Pures Appl. **2**, 167–192 (1923). — [4] CARTAN, E.: Sur certaines formes riemanniennes remarquable des géométries à groupe fondamentale simple. Ann. Sci. École Norm. Sup. **44**, 345–467 (1927). — [5] CHERN, S. S.: Characteristic classes of Hermitian manifolds. Ann. of Math. **47**, 85–121 (1946). — [6] CHERN, S. S.: Topics in differential geometry. Princeton: The Institute for Advanced Study 1951. — [7] DYNKIN, E. B.: Maximal subgroups of the classical groups. Trudy Moscov Mat. Obšč. **1**, 39–166 (1952). — Amer. Math. Soc. Transl. (2) **6** (1957). — [8] EHRESMANN, C.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, 29–55. — [9] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Berlin 1956. — [10] LIBERMANN, P.: Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières. Bull. Soc. Math. France **83**, 195–224 (1955). — [11] NOMIZU, K.: Lie groups and differential geometry. The Mathematical Society of Japan, 1956. — [12] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton 1951. — [13] WEYL, H.: Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung. Math. Z. **12**, 114–146 (1922). — [14] WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923. — [15] WEYL, H.: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. Math. Z. **23**, 271–309 (1925); **24**, 328–376, 377–395, 789–791 (1926).

Göttingen, Mathematisches Institut

(Eingegangen am 18. Juni 1958)

THRON, W. J.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 310–344 (1959)

Zwillingskonvergenzgebiete für Kettenbrüche $1+K(a_n/1)$, deren eines die Kreisscheibe $|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2$ ist*)

Von

W. J. THRON

§ 1. Einleitung

In dieser Arbeit[1]) werden Kettenbrüche

$$1+\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\cdots, \tag{1.1}$$

deren Elemente a_n komplexe Zahlen sind, untersucht. Und zwar befassen wir uns mit der Bestimmung von Zwillingskonvergenzgebieten, von denen das eine Gebiet die Kreisscheibe $|z| \leqq \varrho^2$ ist. Das heißt, wir suchen Gebiete G_ϱ, so daß die zwei Bedingungen

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2$$

und

$$a_{2n} \in G_\varrho$$

für alle $n \geqq 1$ die Konvergenz des Kettenbruches (1.1) gewährleisten.

Schon 1865 findet man das erste Resultat dieser Art. WORPITZKY [8] bewies, daß $|a_n| \leqq \frac{1}{4}$ für alle $n \geqq 1$ eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches (1.1) ist. Im Jahre 1936 kam das damals überraschende Ergebnis von LEIGHTON und WALL [3], daß $|a_{2n-1}| \leqq \frac{1}{4}$ und $|a_{2n}| \geqq \frac{25}{4}$ für die Konvergenz von (1.1) genüge.

1943 gelang es mir [6], allerdings mit Hilfe von funktionentheoretischen Mitteln, zu beweisen, daß

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i| \geqq \varrho + \varepsilon,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Konstante sein darf, für $\varrho < 1$ hinreichend für die Konvergenz von (1.1) ist. In dieser Arbeit bewies ich auch, daß für alle $\varrho > 0$ die Bedingungen

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i| \geqq \varrho \tag{1.2}$$

*) This research was supported by the United States Air Force under Contract No. AF 49 (638)-100 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

[1]) Herr O. PERRON hat freundlicherweise diese Arbeit in verschiedenen Stadien ihrer Entwicklung durchgesehen und Verbesserungsvorschläge gemacht. Diese haben an vielen Stellen ihren Niederschlag gefunden. Der Verfasser möchte ihm dafür hier aufs herzlichste danken.

bestmögliche sind. Das heißt, daß, wenn man $|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2$ voraussetzt, die Elemente g des Gebietes G_ϱ notwendigerweise die Ungleichungen $|g^{\frac{1}{2}} \pm i| \geqq \varrho$ erfüllen müssen.

Im nächsten Jahr erzielten COWLING, LEIGHTON und ich [2] auch für $\varrho > 1$ ein Resultat, und zwar:

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad |a_{2n}| \geqq 2(\varrho^2 - \cos \arg a_{2n}) + \varepsilon.$$

Auch dies wurde mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, nämlich dem Satz von STIELTJES-VITALI, erreicht.

1956 konnten SINGH und ich [5] das Problem für $\varrho < 1$ endgültig, und zwar auf elementarem Wege erledigen. Die Arbeit enthält einen Fehler, der aber leicht zu beseitigen ist. Wir bewiesen, daß die Bedingung (1.2) für die Konvergenz von (1.1) hinreichend ist, daß also das ε in meinem Ergebnis von 1943 ausgelassen werden kann. Kurz nach dem Erscheinen unseres Resultats beschäftigte sich auch Herr WALL [7] in einer Arbeit, die hauptsächlich einer anderen Frage gewidmet war, mit dem hier zu behandelnden Problem. Er bewies unter Zuhilfenahme der Theorie der positiv definiten Kettenbrüche, daß für $\varrho \leqq 1$ und

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad |a_{2n}| \geqq (1 + \varrho)^2 + \varepsilon$$

Konvergenz stattfindet. Dies brachte allerdings nichts Neues. Er erwähnt auch ein unveröffentlichtes 1950 erzieltes Resultat von Herrn COPP [1], der für $\varrho < 1$ das obige Ergebnis ohne das ε erhielt.

Die Arbeit von WALL regte Herrn PERRON [4] an, sich mit diesem Problem zu beschäftigen. Er gab einen elementaren Beweis für das Resultat von COPP und stellte sich die weitere Aufgabe zu bestimmen, was für $\varrho > 1$ noch über den Kettenbruch ausgesagt werden könne. Es stellte sich heraus, daß der ganze Kettenbruch im allgemeinen nicht mehr konvergiert. Es konvergiert aber noch der gerade Teil des Kettenbruches.

Im ersten Teil dieser Arbeit zeigen wir nun, daß die Bedingung (1.2) zusammen mit der zusätzlichen Bedingung

$$|a_{2n}| \geqq \varrho^2 - 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{1.3}$$

für $\varrho = 1$ die Konvergenz des Kettenbruches und für $\varrho > 1$ die Konvergenz des geraden Teils gewährleisten. Die von SINGH und mir entwickelte Methode läßt sich leider nicht auf die hier neu zu behandelnden Fälle übertragen. Die hier benutzte modifizierte Beweismethode kann aber auch auf den dort behandelten Fall angewandt werden. Es erschien mir deshalb lohnend alle aus den Bedingungen (1.2) und (1.3) folgenden Sätze zusammen und ausführlich abzuleiten, nicht zuletzt auch um den oben erwähnten Fehler zu korrigieren und um die bedeutenden Unterschiede, die sich für $\varrho < 1$ und $\varrho \geqq 1$ ergeben, klar aufzuzeigen.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit den Konsequenzen der Annahme

$$|a_{2n-1}| \leqq r, \quad |a_{2n}| \geqq 2(r - \cos \arg a_{2n}), \quad r > 1. \tag{1.4}$$

Es stellt sich heraus, daß die Bedingung (1.4) für die Konvergenz des Kettenbruches (1.1) hinreichend ist, daß das ε in dem von COWLING, LEIGHTON und mir stammenden Satz also weggelassen werden kann. An Hand von Gegenbeispielen zeigen wir auch, daß das erzielte Resultat ein bestmögliches ist. Überraschenderweise ist die Konvergenz in diesem Fall nicht immer gleichmäßig. Gleichmäßige Konvergenz erhält man nur, wenn man

$$|a_{2n-1}| \leqq r, \quad |a_{2n}| \geqq 2(r - \cos \arg a_{2n}) + \varepsilon$$

annimmt.

Die für die Konvergenzsätze benutzten Beweise sind in allen Fällen elementar. Dies ist nicht nur vom ästhetischen Standpunkt ein Vorteil, sondern macht es auch möglich die Gleichmäßigkeit der Konvergenz, soweit sie besteht, festzustellen. Auf eine genauere Analyse des Grades der Annäherung der Näherungsbrüche an den Wert des Kettenbruches, für die die Grundlagen zur Verfügung stehen, haben wir der Kürze halber verzichtet.

Teil I

§ 2. Zwei fundamentale Hilfssätze

Wir beginnen mit dem Beweis einer Ungleichung, die in beiden Teilen dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielt.

HILFSSATZ 1. *Es sei* $a \geqq 0$, $k \geqq 0$ *und nicht gleichzeitig* $a = 0$, $k = 1$, *dann gilt die Ungleichung*

$$\left|1 + \frac{a e^{i\alpha}}{1 + k e^{i\varphi}}\right| \geqq \frac{a^2 + 2a\cos\alpha + 1 - k^2}{|1 - k^2 + a e^{i\alpha}| + ka}.$$

Ferner gibt es immer ein $\varphi = \varphi(a, \alpha, k)$, *für das Gleichheit stattfindet.*

Beweis. Die Menge aller $1/(1 + k e^{i\varphi})$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, ist das Bild des Kreises $|z - 1| = k$ unter der linear gebrochenen Transformation $1/z$. Sie ist deshalb, für $k \neq 1$, selbst ein Kreis. Die reelle Achse steht senkrecht zu dem Kreis $|z - 1| = k$. Unter der Transformation $1/z$ geht sie in sich selbst über. So steht die reelle Achse auch senkrecht zu dem gesuchten Kreis. Folglich liegt sein Mittelpunkt auf ihr. Die Strecke $[1/(1+k), 1/(1-k)]$ ist also ein Durchmesser des zu bestimmenden Kreises, ihre Länge ist gleich zweimal dem Radius des Kreises und sein Mittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke. So erhält man für den gesuchten Kreis die Gleichung

$$\left|z + \frac{1}{k^2 - 1}\right| = \frac{k}{|k^2 - 1|}.$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$\frac{1}{1 + k e^{i\varphi}} = \frac{-1 - k e^{i\varphi'}}{k^2 - 1}$$

gesetzt werden kann. Es gilt also für $k \neq 1$

$$\left|1 + \frac{a e^{i\alpha}}{1 + k e^{i\varphi}}\right| = \left|\frac{k^2 - 1 - a e^{i\alpha} - k a e^{i(\varphi' + \alpha)}}{k^2 - 1}\right| \geqq \left|\frac{|1 - k^2 + a e^{i\alpha}| - ka}{k^2 - 1}\right|,$$

wobei für $\varphi' = -\alpha + \arg(k^2 - 1 - a e^{i\alpha})$ Gleichheit stattfindet. Weiter ist

$$\frac{k a - |1 - k^2 + a e^{i\alpha}|}{k^2 - 1} = \frac{k^2 a^2 - |1 - k^2 + a e^{i\alpha}|^2}{(k^2 - 1)(k a + |1 - k^2 + a e^{i\alpha}|)}$$
$$= \frac{-(k^2 - 1)^2 + 2a\cos\alpha (k^2 - 1) + (k^2 - 1) a^2}{(k^2 - 1)(k a + |1 - k^2 + a e^{i\alpha}|)}$$
$$= \frac{1 - k^2 + 2a\cos\alpha + a^2}{k a + |1 - k^2 + a e^{i\alpha}|}.$$

Damit ist der Hilfssatz für $k \neq 1$ bewiesen. Er gilt auch für $k = 1$. In diesem Fall haben wir zu zeigen, daß

$$\left|1 + \frac{a e^{i\alpha}}{1 + e^{i\varphi}}\right| \geqq \frac{a^2 + 2a\cos\alpha}{2a} = \frac{a}{2} + \cos\alpha$$

ist. Um dies zu tun vergleichen wir die Quadrate der beiden Seiten, nämlich

$$1 + \frac{2a(\cos\alpha + \cos(\alpha - \varphi))}{2(1 + \cos\varphi)} + \frac{a^2}{2(1 + \cos\varphi)}$$

und

$$\frac{a^2}{4} + a\cos\alpha + \cos^2\alpha.$$

Wir ziehen den zweiten Ausdruck von dem ersten ab und erhalten für die Differenz nach leichter Rechnung

$$\left(\sin\alpha + \frac{a}{2}\tan\varphi/2\right)^2.$$

Da dieser Ausdruck nicht negativ sein kann, ist der Beweis des Hilfssatz 1 auch für $k = 1$ erbracht.

Wir führen nun

$$t_n(z) = 1 + a_n/z$$

ein und wenden uns dem zweiten Hilfssatz zu.

HILFSSATZ 2. *Die Elemente a_{2n} mögen der Bedingung (1.2) genügen; wenn dann $0 \leqq k \leqq \varrho$ gilt, so ist für $|z - 1| \leqq k$, wenn nicht gleichzeitig $z = a_{2n} = 0$ ist,*

$$|t_{2n}(z)| \geqq \begin{cases} \dfrac{2\varrho - \varrho^2 - k}{1 - k}, & \text{für } 0 < \varrho < 1, \\ \dfrac{\varrho^2 + k}{1 + k}, & \text{für } 1 \leqq \varrho. \end{cases}$$

Das Gleichheitszeichen gilt mindestens für

$$a_{2n} = -(1 - \varrho)^2, \quad z = 1 - k, \quad \text{falls } \varrho < 1 \text{ ist}$$

und für

$$a_{2n} = \varrho^2 - 1, \quad z = 1 + k, \quad \text{falls } \varrho \geqq 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Daß für die angegebenen Werte Gleichheit stattfindet, errechnet man ohne Schwierigkeit direkt.

Der Rand des durch Bedingung (1.2) definierten Variationsgebietes G_ϱ für die a_{2n} besteht aus den Punkten

$$a_{2n} = (i + \varrho e^{i\vartheta})^2,$$

wo ϑ die Werte $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ durchläuft wenn $\varrho < 1$ ist, während für $\varrho \geqq 1$ nur die Werte $\vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \pi - \vartheta_0$ angenommen werden. Die Konstante ϑ_0 ist durch die Bedingungen

$$\sin\vartheta_0 = -1/\varrho, \quad \cos\vartheta_0 = (\varrho^2 - 1)^{\frac{1}{2}}/\varrho$$

definiert. Es ist also $(i + \varrho e^{i\vartheta_0})^2 = \varrho^2 - 1$.

Wir halten nun $z \neq 0$ fest (der Fall $z = 0$, $a_{2n} \neq 0$ ist trivial), und zwar sei zunächst $|z - 1| = k$, also $z = 1 - k e^{i\varphi}$. Betrachten wir dann $1 + a_{2n}/z$ als eine Funktion von a_{2n}, so nimmt $|1 + a_{2n}/z|$ seinen kleinsten Wert für einen Punkt a_{2n} auf dem Rande des Gebietes G_ϱ an, vorausgesetzt, daß für a_{2n} im Innern von G_ϱ immer $1 + a_{2n}/z \neq 0$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $a_{2n} \neq -z$ oder $1 + a_{2n} \neq k e^{i\varphi}$. Nun gilt

$$|1 + a_{2n}| > |1 + (i + \varrho e^{i\vartheta})^2| = \varrho\,|2i + \varrho e^{i\vartheta}|.$$

Es ist also

$$|1 + a_{2n}| > \begin{cases} \varrho(2 - \varrho) > \varrho \geqq k & \text{für } 0 < \varrho < 1, \\ \varrho\,|i + \sqrt{\varrho^2 - 1}| = \varrho^2 \geqq k & \text{für } 1 \leqq \varrho. \end{cases}$$

Damit ist $1 + a_{2n}/z \neq 0$ bewiesen und es ist

$$|t_{2n}(z)| \geqq \left| 1 + \frac{(i + \varrho e^{i\vartheta})^2}{1 + k e^{i\varphi}} \right|$$

also unter Benutzung von Hilfssatz 1

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{|i + \varrho e^{i\vartheta}|^4 + 2\Re(i + \varrho e^{i\vartheta})^2 + 1 - k^2}{|1 - k^2 + (i + \varrho e^{i\vartheta})^2| + k\,|i + \varrho e^{i\vartheta}|^2},$$

wenn nicht $a_{2n} = 0$ (also $\varrho = 1$) und $k = 1$ gleichzeitig gelten. In diesem Fall beweist man den Hilfssatz aber sofort direkt, so daß wir von jetzt ab annehmen können, daß nie gleichzeitig $a_{2n} = 0$, $\varrho = k = 1$ gilt.

Nun ist

$$|i + \varrho e^{i\vartheta}|^2 = 1 + 2\varrho\sin\vartheta + \varrho^2$$

und

$$\begin{aligned} 2\Re(i + \varrho e^{i\vartheta})^2 &= -2 - 4\varrho\sin\vartheta + 2\varrho^2\cos 2\vartheta \\ &= -(1 + 2\varrho\sin\vartheta)^2 - 1 + 2\varrho^2. \end{aligned}$$

Setzen wir also

$$x = 2 + 2\varrho\sin\vartheta,$$

wo für $\varrho \geqq 1$ $0 \leqq x \leqq 2(1 + \varrho)$ und für $\varrho < 1$ $2(1 - \varrho) \leqq x \leqq 2(1 + \varrho)$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &|i + \varrho e^{i\vartheta}|^4 + 2\Re(i + \varrho e^{i\vartheta})^2 + (1 - k^2) \\ &\quad = (x + \varrho^2 - 1)^2 - (x - 1)^2 - 1 + 2\varrho^2 + 1 - k^2 \\ &\quad = 2x\varrho^2 + \varrho^4 - k^2. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$D = |1 - k^2 + (i + \varrho e^{i\vartheta})^2|,$$

so ist

$$D^2 = |2\varrho i e^{i\vartheta} + \varrho^2 e^{2i\vartheta} - k^2|^2 = |2\varrho i + \varrho^2 e^{i\vartheta} - k^2 e^{-i\vartheta}|^2$$
$$= (\varrho^2 - k^2)^2 + 4\varrho^2 k^2 \sin^2\vartheta + 4(\varrho^2 + k^2)\varrho \sin\vartheta + 4\varrho^2.$$

Da $2\varrho \sin\vartheta = x - 2$ ist, erhält man dann

$$D^2 = (\varrho^2 - k^2)^2 + 2(\varrho^2 - k^2)x + k^2 x^2.$$

Diesen Ausdruck nennen wir auch gelegentlich $D^2(x)$. Es folgt, daß

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{2x\varrho^2 + \varrho^4 - k^2}{D + k(x - 1 + \varrho^2)} \tag{2.1}$$

ist. Die rechte Seite dieser Ungleichung bezeichnen wir jetzt mit $m(x)$. Es ist also

$$m(x) = \frac{2x\varrho^2 + \varrho^4 - k^2}{D + k(x - 1 + \varrho^2)}.$$

Weiter führen wir für den Zähler von $m(x)$ die Abkürzung E ein, dann gilt

$$D^2 - k^2(x - 1 + \varrho^2)^2 = (\varrho^2 - k^2)^2 + 2(\varrho^2 - k^2)x + k^2 x^2 - k^2 x^2 -$$
$$- 2xk^2(\varrho^2 - 1) - k^2(\varrho^2 - 1)^2$$
$$= 2\varrho^2 x(1 - k^2) + (\varrho^4 - k^2)(1 - k^2)$$
$$= (1 - k^2)E.$$

Als nächstes zeigen wir, daß für die in Betracht kommenden Werte von x, der Ausdruck E immer positiv ist. Für $\varrho < 1$ ist $x \geqq 2(1 - \varrho)$, so daß

$$E \geqq 4\varrho^2(1 - \varrho) + \varrho^4 - k^2 = \varrho^2(2 - \varrho)^2 - k^2 > \varrho^2 - k^2 \geqq 0$$

ist. Für $\varrho \geqq 1$ ist $x \geqq 0$ und deshalb

$$E \geqq \varrho^4 - k^2 \geqq \varrho^2 - k^2 \geqq 0.$$

Wenn nicht $a_{2n} = 0$ und $\varrho = k = 1$ gleichzeitig gelten, muß in der obigen Ungleichungskette mindestens einmal wirkliche Ungleichung stattfinden, es ist also auch in diesem Fall $E > 0$.

Nun beweisen wir, daß die Funktion $m(x)$ in dem in Betracht kommenden Intervall immer mit wachsendem x zunimmt, außer wenn $\varrho = k$ ist. Dann ist $m(x) \equiv \varrho$. Es ist

$$mD + km(x + \varrho^2 - 1) = E.$$

Hieraus erhält man sofort

$$m^2[D^2 - k^2(x + \varrho^2 - 1)^2] = -2km(x + \varrho^2 - 1)E + E^2.$$

Nun ist aber $D^2 - k^2(x + \varrho^2 - 1)^2 = (1 - k^2)E$ und $E > 0$; so kann man schreiben

$$m^2(1 - k^2) = -2km(x + \varrho^2 - 1) + E.$$

Da $dE/dx = 2\varrho^2$ ist, folgt weiter, daß

$$2mm'(1-k^2) = -2km'(x+\varrho^2-1) - 2km + 2\varrho^2$$

ist und

$$\begin{aligned} m' &= \frac{\varrho^2 - km}{(1-k^2)m + k(x+\varrho^2-1)} \\ &= \frac{\varrho^2 D + \varrho^2 k(x+\varrho^2-1) - kE}{(1-k^2)E + k^2(x+\varrho^2-1)^2 + k(x+\varrho^2-1)D} \\ &= \frac{\varrho^2 D - k(\varrho^2 x + \varrho^2 - k^2)}{D^2 + k(x+\varrho^2-1)D}. \end{aligned}$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist sicher positiv, denn es ist ja $D>0$ und $x+\varrho^2-1 \geqq \varrho^2-1$ für $\varrho \geqq 1$ und

$$x+\varrho^2-1 \geqq 2(1-\varrho) - (1-\varrho^2) = (1-\varrho)^2$$

für $\varrho<1$. Um zu beweisen, daß der Zähler nicht negativ ist, betrachten wir

$$\begin{aligned} \varrho^4 D^2 - k^2(\varrho^2 x + \varrho^2 - k^2)^2 &= \varrho^4(\varrho^2-k^2)^2 + 2\varrho^4 x(\varrho^2-k^2) + \varrho^4 k^2 x^2 - \\ &\quad - k^2(\varrho^2-k^2)^2 - 2\varrho^2 k^2 x(\varrho^2-k^2) - \varrho^4 k^2 x^2 \\ &= (\varrho^2-k^2)^2(\varrho^4 - k^2 + 2\varrho^2 x) = (\varrho^2-k^2)^2 E. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\min m(x) = \begin{cases} m(2-2\varrho) & \text{für } 0<\varrho<1, \\ m(0) & \text{für } 1 \leqq \varrho. \end{cases}$$

Wir berechnen nun D^2 für $x = 2-2\varrho$:

$$\begin{aligned} D^2(2-2\varrho) &= (\varrho^2-k^2)^2 + 4(1-\varrho)(\varrho^2-k^2) + 4k^2(1-\varrho)^2 \\ &= (2\varrho - \varrho^2 - k^2)^2. \end{aligned}$$

Es ist also $D = 2\varrho - \varrho^2 - k^2$, da dies für $\varrho<1$ die positive Wurzel ist. So erhält man

$$\begin{aligned} m(2-2\varrho) &= \frac{4\varrho^2(1-\varrho) + \varrho^4 - k^2}{2\varrho - \varrho^2 - k^2 + k(2-2\varrho+\varrho^2-1)} \\ &= \frac{(2\varrho-\varrho^2)^2 - k^2}{(1-k)(2\varrho-\varrho^2+k)} = \frac{2\varrho-\varrho^2-k}{1-k}. \end{aligned}$$

Weiter ist $D(0) = \varrho^2 - k^2$, also

$$m(0) = \frac{\varrho^4 - k^2}{\varrho^2 - k^2 - k + k\varrho^2} = \frac{\varrho^4 - k^2}{(1+k)(\varrho^2-k)} = \frac{\varrho^2+k}{1+k}.$$

Diese Werte gelten auch für $\varrho = k$; damit ist der Hilfssatz für $|z-1| = k$ bewiesen. Ist aber $|z-1| = k' < k$, so ist

$$t_{2n}(z) \geqq \begin{cases} \dfrac{2\varrho-\varrho^2-k'}{1-k'} = 1 - \dfrac{(1-\varrho)^2}{1-k'} > 1 - \dfrac{(1-\varrho)^2}{1-k} & \text{für } \varrho<1, \\ \dfrac{\varrho^2+k'}{1+k'} = 1 + \dfrac{\varrho^2-1}{1+k'} > 1 + \dfrac{\varrho^2-1}{1+k} & \text{für } \varrho \geqq 1. \end{cases}$$

Damit ist der Hilfssatz 2 nun vollständig bewiesen.

Als erste Anwendung betrachten wir den Fall $k=\varrho$, dann haben wir

$$|t_{2n}(z)| \geqq \varrho, \quad \text{für } |z-1| \leqq \varrho. \tag{2.2}$$

Der Fall $a_{2n}=0$, $z=0$ ist auch hier ausgeschlossen. Ohne komplizierte Hilfsmittel sieht man auch sofort, daß

$$|t_{2n-1}(z)-1| \leqq \varrho, \quad \text{für } |z| \geqq \varrho \tag{2.3}$$

ist.

§ 3. Die ineinandergeschachtelten Kreisscheiben

Wir führen jetzt

$$T_n(z) = T_{n-1}\left(t_n(z)\right), \quad T_1(z) = t_1(z) \tag{3.1}$$

ein. Dann ist

$$T_n(z) = \frac{A_{n-1}(z-1)+A_n}{B_{n-1}(z-1)+B_n}, \tag{3.2}$$

wo A_n und B_n die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches (1.1) sind und deshalb den Formeln

$$\begin{cases} A_0=1, & A_1=1+a_1, & A_n=A_{n-1}+a_nA_{n-2}, & n\geqq 2, \\ B_0=1, & B_1=1, & B_n=B_{n-1}+a_nB_{n-2}, & n\geqq 2 \end{cases} \tag{3.3}$$

genügen.

Es sei $f(z)$ eine Funktion einer komplexen Variabeln und W ein Bereich in der Ebene der komplexen Zahlen, dann wollen wir unter $f(W)$ die Menge aller $f(z)$ mit $z\in W$ verstehen. Bezeichnet man nun mit Z_1 die Menge aller z mit $|z|\geqq\varrho$ und mit Z_2 die Kreisscheibe $|z-1|\leqq\varrho$, dann kann man die Ergebnisse von (2.2) und (2.3) auch folgendermaßen formulieren:

$$t_{2n-1}(Z_1) \subset Z_2,$$
$$t_{2n}(Z_2) \subset Z_1.$$

Durch vollständige Induktion erhält man sofort

$$T_{2n}(Z_2) \subset Z_2,$$
$$T_{2n-1}(Z_1) \subset Z_2.$$

Wir führen nun die Bezeichnungen $K_{2n}=T_{2n}(Z_2)$ und $K_{2n-1}=T_{2n-1}(Z_1)$ ein. Die Gebiete K_n sind dann das Innere oder Äußere von Kreisen. Da sie alle in der Kreisscheibe Z_2 enthalten sind, sind sie alle Kreisscheiben. Ihre Radien wollen wir mit R_n bezeichnen. Da

$$K_{2n} = T_{2n}(Z_2) = T_{2n-1}\left(t_{2n}(Z_2)\right) \subset T_{2n-1}(Z_1) = K_{2n-1}$$

und

$$K_{2n+1} = T_{2n+1}(Z_1) = T_{2n}\left(t_{2n+1}(Z_1)\right) \subset T_{2n}(Z_2) = K_{2n}$$

ist, sind die Kreisscheiben K_n ineinander eingeschachtelt. Ihre Radien bilden eine monoton nicht wachsende Folge.

Im Fall $\varrho \leqq 1$ hat man nun $1 \in Z_1$, $1 \in Z_2$ und deshalb $A_n/B_n = T_n(1) \in K_n$. Nun ist aber $K_n > K_{n+m}$, $m > 0$ und folglich auch $A_{n+m}/B_{n+m} \in K_n$. Es gilt also die Ungleichung

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+m}}{B_{n+m}} \right| \leqq 2R_n.$$

Die Konvergenz der Folge $\{A_n/B_n\}$, d.h. die Konvergenz des Kettenbruches, kann also dadurch bewiesen werden, daß gezeigt wird, daß $\lim R_n = 0$ ist.

Wenn $\varrho > 1$ ist, dann gilt noch $1 \in Z_2$, so daß man wieder $A_{2n}/B_{2n} = T_{2n}(1) \in K_{2n}$ hat. Ähnlich wie oben ergibt sich nun

$$\left| \frac{A_{2n}}{B_{2n}} - \frac{A_{2(n+m)}}{B_{2(n+m)}} \right| \leqq 2R_{2n}$$

und die Konvergenz des geraden Teils des Kettenbruches folgt, wenn $\lim R_n = 0$ ist. Über den ungeraden Teil des Kettenbruches kann aber in diesem Fall keine Aussage mehr gemacht werden.

Wir kommen jetzt zur Berechnung von R_n. Es sei C eine rektifizierbare Kurve und f eine in einer C enthaltenden offenen Menge holomorphe Funktion. Dann ist

$$l(f(C)) = \int_C |f'(z)|\,|dz|,$$

wo $l(f(C))$ die Länge der Kurve $f(C)$ bedeutet. Auf unseren Fall angewandt besagt die Formel, daß

$$2\pi R_n = l(C_n) = \int_{D_n} |T_n'(z)|\,|dz|$$

ist. Hier ist C_n der Rand der Kreisscheibe K_n, während D_n für gerades n der Kreis $|z-1| = \varrho$ und für ungerades n der Kreis $|z| = \varrho$ ist. Für $|T_n'(z)|$ errechnet man leicht

$$|T_n'(z)| = \frac{\left| \prod_{m=1}^{n} a_m \right|}{|B_{n-1}(z-1) + B_n|^2}.$$

Wir bestimmen nun erst R_{2n-1}. Wir nehmen an, daß $B_{2n-2} \neq 0$ ist. Wenn das nicht der Fall ist, erhält man die Formel (3.4) sofort direkt. Den Ausdruck $-B_{2n-2} + B_{2n-1}$ ersetzen wir gemäß (3.3) durch $a_{2n-1}B_{2n-3}$ und schreiben

$$g e^{i\gamma} = a_{2n-1} B_{2n-3}/B_{2n-2}.$$

Da $z = \varrho e^{i\vartheta}$ ist, ergibt sich

$$2\pi R_{2n-1} \left| B_{2n-2}^2 \Big/ \prod_{m=1}^{2n-1} a_m \right| = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\, d\vartheta}{|\varrho e^{i\vartheta} + g e^{i\gamma}|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\, d\vartheta}{\varrho^2 + g^2 + 2g\varrho\cos(\vartheta - \gamma)}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{\varrho\, d\varphi}{\varrho^2 + g^2 + 2g\varrho\cos\varphi} = \frac{2\pi\varrho}{\varrho^2 - g^2}.$$

So erhält man

$$R_{2n-1}=\frac{\varrho\left|\prod_{m=1}^{2n-1}a_m\right|}{|\varrho^2|B_{2n-3}|^2-|a_{2n-1}B_{2n-3}|^2|}. \tag{3.4}$$

In R_{2n} müssen wir $z=1+\varrho e^{i\vartheta}$ setzen. B_{2n}/B_{2n-1} schreiben wir als $be^{i\beta}$. Ist $B_{2n-1}=0$ dann beweist man die zu erzielende Formel (3.5) ohne Schwierigkeit direkt. Andernfalls ist

$$2\pi R_{2n}\left|B_{2n-1}^2\Big/\prod_{m=1}^{2n}a_m\right|=\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\,d\vartheta}{|\varrho e^{i\vartheta}+be^{i\beta}|^2}.$$

Analog der vorigen Entwicklung kommt man so zu

$$R_{2n}=\frac{\varrho\left|\prod_{m=1}^{2n}a_m\right|}{||B_{2n}|^2-\varrho^2|B_{2n-1}|^2|}. \tag{3.5}$$

Aus den Formeln (3.4) und (3.5) folgt nun

$$\frac{R_{2n}}{R_{2n-1}}=\frac{|a_{2n}||\varrho^2|B_{2n-3}|^2-|B_{2n-1}-B_{2n-3}|^2|}{||B_{2n-1}+a_{2n}B_{2n-3}|^2-\varrho^2|B_{2n-1}|^2|}.$$

Hier haben wir gemäß den Formeln (3.3) $a_{2n-1}B_{2n-3}$ durch $B_{2n-1}-B_{2n-2}$ und B_{2n} durch $B_{2n-1}+a_{2n}B_{2n-2}$ ersetzt. Wenn $B_{2n-2}\neq 0$ ist, erhält man also

$$\frac{R_{2n}}{R_{2n-1}}=\frac{|a_{2n}|\left|\varrho^2-\left|1-\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|}{\left|\left|a_{2n}+\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2-\varrho^2\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|}. \tag{3.6}$$

In diesem Ausdruck spielt der Quotient B_{2n-1}/B_{2n-2} eine wichtige Rolle. Wir wenden uns deshalb jetzt seiner genaueren Untersuchung zu.

§ 4. Abschätzung von $\max\left|B_{2n-1}/B_{2n-2}-1\right|$

Aus den Fundamentalformeln (3.3) folgt sofort, daß

$$\frac{B_n}{B_{n-1}}=1+\frac{a_n}{1}+\cdots+\frac{a_2}{1}$$

ist. Es gilt also

$$\frac{B_n}{B_{n-1}}=t_n\left(t_{n-1}(\ldots t_2(1)\ldots)\right).$$

Durch wiederholte Anwendung der Formeln (2.2) und (2.3) erhält man dann, wenn die Elemente a_n den Bedingungen (1.2) genügen

$$\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}-1\right|\leqq\varrho,\qquad\left|\frac{B_{2n}}{B_{2n-1}}\right|\geqq\varrho.$$

Daraus ergibt sich, daß $B_{2n-2}\neq 0$ ist. Die Formel (3.6) kann also benützt werden. Im Fall $\varrho<1$ verschwindet auch B_{2n-1} nicht. Für $\varrho\geqq 1$ ist $B_{2n-1}=0$

allerdings möglich, dann muß eben B_{2n}/B_{2n-1} als der unendlich ferne Punkt in der komplexen Zahlenebene gedeutet werden. Da $B_{2n-2} \neq 0$, kommt die Form 0/0 ja glücklicherweise nicht vor.

Für $\varrho \geqq 1$ ist die nur unter Zuhilfenahme von Bedingung (1.2) erzielte Abschätzung von $t_{2n}(z)$ für das Folgende nicht mehr ausreichend. Wir verlangen, daß auch die zusätzliche Bedingung (1.3) erfüllt ist, und beweisen:

HILFSSATZ 3. *Die Elemente a_{2n} mögen den Bedingungen* (1.2) *und* (1.3) *genügen, ferner sei $\varrho \geqq 1$ und $0 \leqq k \leqq \varrho$, dann ist für $|z-1| \leqq k$*

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{\varrho^4 + 2\varrho^2\varepsilon - k^2}{D_\varepsilon + k(\varrho^2 - 1 + \varepsilon)},$$

wo

$$D_\varepsilon^2 = (\varrho^2 - k^2)^2 + 2(\varrho^2 - k^2) + k^2\varepsilon^2$$

ist. Das Gleichheitszeichen gilt mindestens für

$$a_{2n}^* = \left(\frac{\varepsilon}{2} i + \sqrt{\varrho^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right)^2, \qquad z = 1 + k e^{i\varphi_\varepsilon},$$

wo φ_ε von k, ϱ und ε abhängt.

Beweis. Das Minimum von $|t_{2n}(z)|$ liegt wieder auf dem Rande des durch (1.2) und (1.3) bestimmten Gebietes G'_ϱ. Der Rand besteht diesmal aus zwei Stücken, die von der Form

$$a_{2n} = (i + \varrho e^{i\vartheta})^2, \qquad \vartheta_\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \vartheta_\varepsilon$$

und

$$a_{2n} = (\varrho^2 - 1 + \varepsilon) e^{i\psi}, \quad |\psi| \leqq \psi_\varepsilon$$

sind. Für ihre Schnittpunkte gilt die Gleichung

$$|a_{2n}| = 1 + 2\varrho \sin\vartheta + \varrho^2 = \varrho^2 - 1 + \varepsilon.$$

Es ist also $\varrho \sin\vartheta_\varepsilon = -(1 - \varepsilon/2)$, so daß die Schnittpunkte die Form

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} i \pm \sqrt{\varrho^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right)^2$$

haben. Die Konstante ψ_ε brauchen wir nicht explizit zu bestimmen.

Aus unseren Ausführungen zum Beweis des Hilfssatz 2 folgt nun, daß das Minimum von $|t_{2n}(z)|$ auf dem ersten Randstück auf den Schnittpunkten mit dem zweiten Randstück erreicht wird. Führen wir wieder $x = 2 + 2\varrho \sin\vartheta$ ein, so erhalten wir für $\vartheta = \vartheta_\varepsilon$ den Wert $x = \varepsilon$. Es ist also nach Formel (2.1) für dieses Randstück

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{\varrho^4 + 2\varrho^2\varepsilon - k^2}{D_\varepsilon + k(\varrho^2 - 1 + \varepsilon)},$$

wo

$$D_\varepsilon^2 = (\varrho^2 - k^2)^2 + 2(\varrho^2 - k^2)\varepsilon + k^2\varepsilon^2$$

ist. Daß für $a_{2n} = a_{2n}^*$ Gleichheit für ein geeignet gewähltes φ wirklich eintreten kann, folgt aus Hilfssatz 1.

Wir müssen nun auch für das zweite Randstück beweisen, daß auf ihm das Minimum $|t_{2n}(z)|$ bei a_{2n}^* liegt. Zu diesem Zweck gehen wir auf den Ausdruck

$$F = \frac{a^2 + 2a\cos\alpha + 1 - k^2}{|1 - k^2 + a e^{i\alpha}| + ka}$$

des ersten Hilfssatzes zurück und stellen fest, daß F bei festem a und k mit zunehmendem $|\alpha|$ abnimmt; denn es ist ja

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{-a\sin\alpha\, W}{|1 - k^2 + a e^{i\alpha}|\,(|1 - k^2 + a e^{i\alpha}| + ka)^2},$$

wo

$$W = 2ka\,|1 - k^2 + a e^{i\alpha}| + (1 - k^2 + a\cos\alpha)^2 + a^2(k^2 + \sin^2\alpha),$$

also immer positiv ist. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wir definieren jetzt

$$k_n = \max\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}} - 1\right|.$$

Dann ist bestimmt $k_n \leqq \varrho$. Weiter gilt folgender Hilfssatz:

HILFSSATZ 4. *Die Elemente a_n mögen den Bedingungen* (1.2) *und für $\varrho \geqq 1$ auch noch den zusätzlichen Bedingungen* (1.3) *genügen. Dann strebt $\prod_{m=1}^{n}(1 + \varrho - k_m)$ monoton wachsend gegen Unendlich.*

Beweis. Wir setzen

$$\omega_\varrho(k) = \begin{cases} \dfrac{2\varrho - \varrho^2 - k}{1 - k} & \text{für } 0 < \varrho < 1, \\ \dfrac{\varrho^4 + 2\varrho^2\varepsilon - k^2}{D_\varepsilon + k(\varrho^2 - 1 + \varepsilon)} & \text{für } 1 \leqq \varrho. \end{cases}$$

Dann ist

$$k_n = \max\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}} - 1\right| = \max\left|a_{2n-1}\Big/\frac{B_{2n-2}}{B_{2n-3}}\right| = \varrho^2\Big/\min\left|1 + \frac{a_{2n-2}}{B_{2n-3}/B_{2n-4}}\right|,$$

also nach Hilfssatz 2 oder 3 (je nachdem ob $\varrho < 1$ oder $\varrho \geqq 1$ ist) mit $k = \max|B_{2n-3}/B_{2n-4} - 1| = k_{n-1}$

$$k_n = \varrho^2/\omega_\varrho(k_{n-1}).$$

Jetzt führen wir

$$u = \varrho - k \quad \text{und} \quad u_n = \varrho - k_n$$

ein. So erhält man

$$u_n = \varrho - \varrho^2/\omega_\varrho(\varrho - u_{n-1}) = g_\varrho(u_{n-1}). \tag{4.1}$$

Als nächstes beweisen wir: Wenn

$$g(u) = \frac{u}{1 + u\,h(u)} \tag{4.2}$$

ist, wo $0<h(u)<M$ und $h(u)$ stetig für $0<u\leqq u_1$ ist und wenn

$$u_{n+1}=g(u_n)$$

definiert ist, dann strebt $\prod_{m=1}^{n}(1+u_m)$ monoton wachsend gegen Unendlich.

Aus (4.2) folgt, daß für $0<u\leqq u_1$ immer $0<g(u)<u$ gilt. Es ist also $u_{n+1}=g(u_n)>0$ und $u_{n+1}=g(u_n)<u_n$. Die Folge $\{u_n\}$ hat deshalb einen Grenzwert λ. Dieser muß den Bedingungen $0\leqq\lambda<u_1$ und $g(\lambda)=\lambda$ genügen. Das ist aber nur möglich wenn $\lambda=0$ ist. Die Folge $\{u_n\}$ strebt also monoton abnehmend dem Grenzwert 0 zu. Nun ist

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+u_n h(u_n).$$

Es folgt, daß

$$\frac{u_1}{u_{n+1}}=\prod_{m=1}^{n}(1+u_m h(u_m))<\prod_{m=1}^{n}(1+M u_m)$$

ist. Dann muß aber $\prod_{m=1}^{n}(1+u_m)$ mit zunehmendem n gegen ∞ wachsen. Der Hilfssatz 4 ist also bewiesen, wenn es gelingt zu zeigen, daß die Funktion g_ϱ den Bedingungen (4.2) genügt.

Zuerst stellen wir fest, daß gemäß unserer Definition und den Formeln (3.3) $k_1=0$ und deshalb $u_1=\varrho-k_1=\varrho$ ist. Wir berechnen nun die Funktion g_ϱ für $\varrho<1$. Es ist

$$g_\varrho(u)=\varrho-\frac{\varrho^2(1-k)}{2\varrho-\varrho^2-k}=\varrho-\frac{\varrho^2(1-\varrho+u)}{\varrho+u-\varrho^2}=\frac{u}{1+u/(\varrho-\varrho^2)}.$$

Die Funktion h ist also in diesem Fall die positive Konstante $1/(\varrho-\varrho^2)$.

Für den Fall $\varrho\geqq 1$ berechnen wir zuerst

$$D_\varepsilon^2=(\varrho^2-k^2)^2+2\varepsilon(\varrho^2-k^2)+\varepsilon^2k^2;$$

wegen $k=\varrho-u$ geht das über in

$$\begin{aligned}&=u^2(2\varrho-u)^2+\varepsilon(2-\varepsilon)u(2\varrho-u)+\varepsilon^2\varrho^2\\&=\left(\varepsilon\varrho+\frac{(2-\varepsilon)u(2\varrho-u)}{2\varrho}\right)^2+\frac{u^2(2\varrho-u)^2(4\varrho^2-(2-\varepsilon)^2)}{4\varrho^2}.\end{aligned}$$

Also ist

$$D_\varepsilon-\left[\varepsilon\varrho+\frac{(2-\varepsilon)u(2\varrho-u)}{2\varrho}\right]=\frac{u^2(2\varrho-u)^2(4\varrho^2-(2-\varepsilon)^2)}{4\varrho^2\left(D_\varepsilon+\left[\varepsilon\varrho+\frac{(2-\varepsilon)u(2\varrho-u)}{2\varrho}\right]\right)}.$$

Hier setzen wir

$$\Gamma=\frac{(2\varrho-u)^2(\varrho^2-(1-\varepsilon/2)^2)}{D_\varepsilon+\varepsilon\varrho+\frac{(2-\varepsilon)u(2\varrho-u)}{2\varrho}},$$

weisen darauf hin, daß für $0<u\leqq\varrho$ der Wert von Γ positiv und nach oben begrenzt ist, und erhalten sodann

$$\varrho^2D_\varepsilon=\varrho^3\varepsilon+2\varrho^2u-\varrho^2\varepsilon u-u^2\varrho+\frac{\varepsilon}{2}u^2\varrho+u^2\Gamma.$$

Wir wenden uns jetzt g_ϱ zu. Es ist

$$\begin{aligned} g_\varrho &= \varrho - \frac{\varrho^2 [D_\varepsilon + k(\varrho^2 - 1 + \varepsilon)]}{\varrho^4 + 2\varrho^2\varepsilon - k^2} \\ &= \varrho - \frac{\varrho^2 [D_\varepsilon + (\varrho - u)(\varrho^2 - 1 + \varepsilon)]}{\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varrho^2\varepsilon + u(2\varrho - u)} \\ &= \frac{\varrho^3\varepsilon - \varrho^2 D_\varepsilon + u(\varrho^4 - \varrho^2 + \varepsilon\varrho^2 + 2\varrho^2 - u\varrho)}{\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varrho^2\varepsilon + u(2\varrho - u)} \\ &= \frac{+ u\left(-2\varrho^2 + \varrho^2\varepsilon + u\varrho - \frac{\varepsilon}{2}u\varrho - u\Gamma + \varrho^4 + \varrho^2 + \varepsilon\varrho^2 - u\varrho\right)}{\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varrho^2\varepsilon + u(2\varrho - u)} \\ &= \frac{u\left(\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varepsilon\varrho^2 - \frac{\varepsilon}{2}u\varrho - u\Gamma\right)}{\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varrho^2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}u\varrho - u\Gamma + u\left(2\varrho - u + \frac{\varepsilon}{2}\varrho + u\Gamma\right)} \\ &= \frac{u}{1 + u h_\varrho(u)}. \end{aligned}$$

Diesmal ist

$$h_\varrho(u) = \frac{2\varrho - u + \frac{\varepsilon}{2}\varrho + u\Gamma}{\varrho^4 - \varrho^2 + 2\varrho^2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}u\varrho - u\Gamma}.$$

Der Zähler von h_ϱ ist bestimmt für $0 < u \leqq \varrho$ positiv und hat eine obere Grenze; es muß also nur noch der Beweis erbracht werden, daß der Nenner größer als eine positive Konstante ist. Der Nenner von h_ϱ ist aber gleich dem Zähler von g_ϱ dividiert durch u. Wir können bei unserer Abschätzung also folgendermaßen vorgehen:

$$\begin{aligned} \varrho^4 - \varrho^2 + 2\varepsilon\varrho^2 - \frac{\varepsilon}{2}u\varrho - u\Gamma &= \frac{\varrho}{u}[\varrho^2\varepsilon + u(\varrho^3 + \varrho + \varrho\varepsilon - u) - \varrho D_\varepsilon] \\ &= \frac{\varrho/u\,[\{\varrho^2\varepsilon + u(\varrho^3 + \varrho + \varrho\varepsilon - u)\}^2 - \varrho^2 D_\varepsilon^2]}{\varrho^2\varepsilon + u(\varrho^3 + \varrho + \varrho\varepsilon - u) + \varrho D_\varepsilon} = \frac{A}{B}. \end{aligned}$$

Da

$$D_\varepsilon^2 = u^2(2\varrho - u)^2 + \varepsilon(2 - \varepsilon)u(2\varrho - u) + \varepsilon^2\varrho^2$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} A = \varrho[u\{&(\varrho^3 + \varrho + \varrho\varepsilon - u)^2 - \varrho^2(2\varrho - u)^2\} \\ &+ 2\varrho^2\varepsilon(\varrho^3 - \varrho + \varrho\varepsilon) + \varrho^2\varepsilon^2(2\varrho - u)]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &(\varrho^3 + \varrho + \varrho\varepsilon - u)^2 - \varrho^2(2\varrho - u)^2 \\ &\quad = [(\varrho - 1)(\varrho^2 - \varrho + u) + \varrho\varepsilon][(\varrho + 1)(\varrho^2 + \varrho - u) + \varrho\varepsilon], \end{aligned}$$

also positiv. Es folgt, daß, für $0 < u \leqq \varrho$,

$$A \geqq 2\varrho^3\varepsilon(\varrho^3 - \varrho + \varrho\varepsilon) + \varrho^4\varepsilon^2 \geqq 3\varrho^4\varepsilon^2$$

ist. Weiter sieht man, daß $D_\varepsilon^2 < [u(2\varrho - u) + \varepsilon\varrho]^2$ und $u(2\varrho - u) \leqq \varrho^2$ ist. So kommt man zu der Abschätzung

$$B \leqq \varrho^2\varepsilon + \varrho^4 + \varrho^2 + \varrho^2\varepsilon + \varrho^2 + \varepsilon\varrho^2 < 6\varrho^4,$$

und schließlich

$$\frac{A}{B} > \frac{3\varrho^4\varepsilon^2}{6\varrho^4} = \varepsilon^2/2.$$

§ 5. Abschätzung von R_{2n}/R_{2n-1}

In Formel (3.6) können gewisse Absolutstriche weggelassen werden. Es ist

$$\left|1 - \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right| < \varrho$$

und deshalb

$$\left|\varrho^2 - \left|1 - \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right| = \varrho^2 - \left|1 - \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2.$$

Weiter ist

$$\left|a_{2n} + \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right| = \left|\frac{B_{2n}}{B_{2n-1}}\right| \cdot \left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right| > \varrho \left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|$$

und so auch

$$\left|\left|a_{2n} + \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2 - \varrho^2 \left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right| = \left|a_{2n} + \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2 - \varrho^2 \left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2.$$

Setzen wir nun

$$a_{2n} = a e^{i\alpha}, \qquad \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}} = 1 + b e^{i\beta},$$

so erhalten wir aus (3.6)

$$Q_n = \frac{R_{2n}}{R_{2n-1}} = \frac{a(\varrho^2 - b^2)}{|a e^{i\alpha} + 1 + b e^{i\beta}|^2 - \varrho^2 |1 + b e^{i\beta}|^2}.$$

Diese Formel gilt auch noch für $n = 1$, wenn man $b = 0$ nimmt. Wir wollen jetzt das max Q_n für $a_{2n} \in G_\varrho$ (oder $a_{2n} \in G_\varrho'$, für $\varrho \geqq 1$) bestimmen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(z, w) = \frac{z}{(z + d)^2 + w\varrho^2 d^2},$$

wo wir $1 + b e^{i\beta} = d$ gesetzt haben, für $z \in G_\varrho$ (oder G_ϱ'), $|w| \leqq 1$. Mit P_ϱ bezeichnen wir den Rand von G_ϱ (oder G_ϱ'). Dann ist einerseits

$$\max_{z \in G_\varrho, |w| \leqq 1} |f(z, w)| = \max_{z \in G_\varrho} \frac{|z|}{|z + d|^2 - \varrho^2 |d|^2}$$

und andererseits nach dem Prinzip vom Maximum

$$\max_{z \in G_\varrho, |w| \leqq 1} |f(z, w)| = \max_{z \in P_\varrho, |w| = 1} |f(z, w)|$$

$$= \max_{z \in P_\varrho} \frac{|z|}{|z + d|^2 - \varrho^2 |d|^2}.$$

Es folgt, daß wir um das Maximum von Q_n zu bestimmen nur Werte von a_{2n}, die auf dem Rande des Gebietes G_ϱ (oder G'_ϱ) liegen, in Betracht zu ziehen brauchen.

Im Fall $\varrho \geqq 1$ besteht der Rand aus zwei Stücken. Wir untersuchen zuerst das $\max Q_n$ auf dem Stück, für das

$$|a_{2n}| = a = \varrho^2 - 1 + \varepsilon$$

ist. Es ist

$$\begin{aligned}
&|a e^{i\alpha} + 1 + b e^{i\beta}|^2 - \varrho^2 |1 + b e^{i\beta}|^2 \\
&= (a\cos\alpha + 1 + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 - \varrho^2(1 + 2b\cos\beta + b^2) \\
&= 1 + a^2 + b^2 + 2a\cos\alpha + 2b\cos\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta - \\
&\quad - \varrho^2 - \varrho^2 b^2 - 2\varrho^2 b\cos\beta \\
&= (1-\varrho^2)(1+b^2) + a^2 + 2a\cos\alpha + 2b[\cos\beta(1 - \varrho^2 + a\cos\alpha) + \sin\beta\, a\sin\alpha].
\end{aligned}$$

Für festes a, b, α wollen wir nun β so wählen, daß der Nenner von Q_n so klein wie möglich wird. Wir machen von der bekannten Ungleichung

$$A\cos\beta + B\sin\beta \geqq -(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$$

Gebrauch und erhalten so

$$\max_{0 \leqq \beta \leqq 2\pi} Q_n = \frac{a(\varrho^2 - b^2)}{(1-\varrho^2)(1+b^2) + a^2 + 2a\cos\alpha - 2bw'},$$

wo

$$w' = [(1-\varrho^2)^2 + 2(1-\varrho^2)\, a\cos\alpha + a^2]^{\frac{1}{2}}$$

ist. Dieser Ausdruck wächst für $1 - \varrho^2 < 0$ mit wachsendem $|\alpha|$. Das Maximum für dieses Randstück wird also für die Schnittpunkte dieses Bogens mit dem anderen Randstück, für welches

$$a_{2n} = a = (i + \varrho e^{i\vartheta})^2$$

gilt, erreicht. Zur Bestimmung des $\max Q_n$ für alle ϱ genügt es also diese Randwerte zu betrachten, wo $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ für $\varrho < 1$ und $-\vartheta_\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \vartheta_\varepsilon$ für $\varrho \geqq 1$ gilt.

Jetzt ist

$$|a_{2n}| = |a| = 1 + 2\varrho\sin\vartheta + \varrho^2$$

und

$$\begin{aligned}
|a e^{i\alpha} + 1 + b e^{i\beta}|^2 &= |2i\varrho + \varrho^2 e^{i\vartheta} + b e^{i(\beta - \vartheta)}|^2 \\
&= (\varrho^2\cos\vartheta + b\cos(\beta - \vartheta))^2 + (2\varrho + \varrho^2\sin\vartheta + b\sin(\beta - \vartheta))^2 \\
&= \varrho^4 + 4\varrho^2 + b^2 + 4\varrho^3\sin\vartheta + 4\varrho\, b\sin(\beta - \vartheta) + 2\varrho^2 b\cos(\beta - 2\vartheta).
\end{aligned}$$

So erhalten wir für

$$\begin{aligned}
&|a e^{i\alpha} + 1 + b e^{i\beta}|^2 - \varrho^2 |1 + b e^{i\beta}|^2 \\
&\quad = \varrho^4 + 3\varrho^2 + b^2 - \varrho^2 b^2 + 4\varrho^3\sin\vartheta + \\
&\qquad + 2b[\cos\beta(\varrho^2\cos 2\vartheta - 2\varrho\sin\vartheta - \varrho^2) + \sin\beta(\varrho^2\sin 2\vartheta + 2\varrho\cos\vartheta)].
\end{aligned}$$

Nun ist für festes ϑ und b

$$\min_{0\leq\beta\leq 2\pi}[\cos\beta(\varrho^2\cos 2\vartheta - 2\varrho\sin\vartheta - \varrho^2) + \sin\beta(\varrho^2\sin 2\vartheta + 2\varrho\cos\vartheta)]$$
$$= -[(\varrho^2\cos 2\vartheta - 2\varrho\sin\vartheta - \varrho^2)^2 + (\varrho^2\sin 2\vartheta + 2\varrho\cos\vartheta)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= -[2\varrho^4 + 4\varrho^2 + 4\varrho^3\sin\vartheta - 2\varrho^4\cos 2\vartheta + 4\varrho^3\sin\vartheta]^{\frac{1}{2}}$$
$$= -2\varrho|1+\varrho\sin\vartheta| = -2\varrho(1+\varrho\sin\vartheta).$$

Führen wir nun wieder $x = 2(1+\varrho\sin\vartheta)$ ein, dann gilt

$$2(1-\varrho)\leqq x\leqq 2(1+\varrho) \quad \text{für} \quad \varrho<1 \quad \text{und} \quad \varepsilon\leqq x\leqq 2(1+\varrho) \quad \text{für} \quad \varrho\geqq 1$$

(s. Beweis von Hilfssatz 2 und 3). Es ergibt sich also

$$\max_{0\leq\beta\leq 2\pi} Q_n = \frac{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-1+x)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-1)+2\varrho(\varrho-b)x}$$
$$= \frac{\varrho+b}{2\varrho}\left[1+\frac{(\varrho^2-1)(\varrho-b)}{2\varrho x+(\varrho^2-1)(\varrho+b)}\right].$$

Für $\varrho<1$ wächst dieser Ausdruck mit wachsendem x, für $\varrho=1$ ist er konstant, und für $\varrho>1$ nimmt er mit wachsendem x ab. So kommen wir zu folgendem Ergebnis für $\varrho<1$:

$$\max_{\beta,x} Q_n = \frac{(\varrho+b)(\varrho+1)^2}{(\varrho+b)(\varrho^2-1)+4\varrho(1+\varrho)} = \frac{(\varrho+b)(\varrho+1)}{(\varrho+b)(\varrho-1)+4\varrho}$$
$$= \frac{(\varrho+b)(\varrho+1)}{(\varrho+b)(\varrho+1)+2(\varrho-b)} = \frac{1}{1+\dfrac{2(\varrho-b)}{(\varrho+1)(\varrho+b)}}.$$

Da $0<b\leqq k_n$ ist, haben wir

$$\frac{2(\varrho-b)}{(\varrho+1)(\varrho+b)} > \frac{2(\varrho-k_n)}{4},$$

so daß

$$\max Q_n < \frac{1}{1+(\varrho-k_n)/2}$$

ist. Für $\varrho=1$ ist

$$\max Q_n = \frac{(\varrho+b)}{2\varrho} = \frac{1}{1+(\varrho-b)/(\varrho+b)} < \frac{1}{1+(\varrho-k_n)/2}.$$

Für $\varrho>1$ erhalten wir

$$\max Q_n = \frac{(\varrho+b)(\varrho^2-1+\varepsilon)}{(\varrho+b)(\varrho^2-1)+2\varrho\varepsilon} = \frac{(\varrho+b)(\varrho^2-1+\varepsilon)}{(\varrho+b)(\varrho^2-1+\varepsilon)+(\varrho-b)\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{1+\varepsilon\dfrac{(\varrho-b)}{(\varrho+b)(\varrho^2-1+\varepsilon)}} < \frac{1}{1+(\varrho-k_n)\varepsilon/2\varrho^3}$$

Wir können diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

$$\max Q_n < \frac{1}{1+\gamma_\varrho(\varrho-k_n)}, \tag{5.1}$$

wo $\gamma_\varrho=\frac{1}{2}$ für $\varrho\leqq 1$ und $\gamma_\varrho=\varepsilon/2\varrho^3$ für $\varrho>1$ ist.

§ 6. Beweis der Konvergenzsätze

Da die Folge $\{R_n\}$ eine monoton nicht wachsende ist, gilt $R_{2n+1}/R_{2n} \leqq 1$ für alle $n \geqq 1$ und deshalb, da ja bestimmt $R_1 \leqq \varrho$ ist,

$$R_{2n} \leqq R_1 \prod_{m=1}^{n} \frac{R_{2m}}{R_{2m-1}} \leq \varrho \prod_{m=1}^{n} Q_m < \frac{\varrho}{\prod_{m=1}^{n} (1+\gamma_\varrho(\varrho - k_m))}.$$

Da nach Hilfssatz 4 $\prod_{m=1}^{n} (1+\varrho-k_m)$ mit wachsendem n gegen Unendlich strebt, gilt das gleiche auch für $\prod_{m=1}^{n} [1+\gamma_\varrho(\varrho-k_m)]$, da ja für festes ϱ und ε γ_ϱ eine positive Konstante ist. Wir haben also in

$$\left\{\prod_{m=1}^{n} [1+\gamma_\varrho(\varrho-k_m)]\right\}$$

eine Folge, die von der Wahl der Elemente a_n des Kettenbruches (1.1) unabhängig ist, nur von ϱ und ε abhängt, die den Grenzwert Null hat und deren n. Element größer ist als R_{2n}. Verbinden wir dieses Ergebnis mit den Ausführungen in der ersten Hälfte des § 3 so kommen wir zu folgenden Konvergenzsätzen.

Satz 1. *Die Elemente des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen*

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i| \geqq \varrho, \quad \varrho < 1$$

genügen. Dann konvergiert der Kettenbruch. Sein Wert liegt auf der Kreisscheibe $|z-1| \leqq \varrho$. *Wenn die Elemente* a_n *Funktionen von einer beliebigen Anzahl von Variabeln sind, so konvergiert der Kettenbruch gleichmäßig, wenn nur die Bereiche der Variabeln so beschaffen sind, daß die Elemente* a_n *für alle Werte der Variabeln den obigen Bedingungen genügen.*

Satz 2. *Die Elemente des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen*

$$|a_{2n-1}| \leqq 1, \quad |a_{2n}| \geqq \varepsilon \quad \text{und} \quad a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i| \geqq 1,$$

wo $0 < \varepsilon < 1$ *ist, genügen. Dann konvergiert der Kettenbruch. Sein Wert liegt auf der Kreisscheibe* $|z-1| \leqq 1$. *Unter den selben Bedingungen wie in Satz 1 und für festes* ε *ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Satz 3. *Die Elemente des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen*

$$|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2, \quad |a_{2n}| \geqq \varrho^2 - 1 + \varepsilon$$

und

$$a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i| \geqq \varrho,$$

wo $\varrho > 1$ *und* $0 < \varepsilon < 1$ *ist, genügen. Dann konvergiert der gerade Teil des Kettenbruches. Sein Wert liegt auf der Kreisscheibe* $|z-1| \leqq \varrho$. *Die Konvergenz des geraden Teils ist, unter ähnlichen Bedingungen wie in Satz 1 und für festes* ε, *auch wieder gleichmäßig.*

Wir schließen mit den folgenden Bemerkungen: Die Bedingung $|c_{2n} \pm i| \geqq \varrho$, $c_{2n}^2 = a_{2n}$ ist für $\varrho \geqq 1$ gleichbedeutend mit

$$|a_{2n}| \geqq \varrho^2 - \cos \arg a_{2n} + [2\varrho^2(1 - \cos \arg a_{2n}) - \sin^2 \arg a_{2n}]^{\frac{1}{2}}.$$

Für $\varrho = 1$ insbesondere erhalten wir

$$|a_{2n}| \geqq 2(1 - \cos \arg a_{2n}).$$

Das ε in den Sätzen 2 und 3 kann nicht weggelassen werden, da der periodische Kettenbruch

$$1 + \frac{-\varrho^2}{1} + \frac{\varrho^2 - 1}{1} + \frac{-\varrho^2}{1} + \cdots$$

für $\varrho = 1$ sinnlos wird und für $\varrho > 1$ sogar sein gerader Teil divergiert. Man errechnet leicht, daß für $\varrho = 1$ $A_n = 0$, $n \geqq 1$ und $B_n = 0$, $n \geqq 3$ gilt, während für $\varrho > 1$

$$\frac{A_{4n}}{B_{4n}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{A_{4n+2}}{B_{4n+2}} = 0$$

ist.

Teil II

§ 7. Nochmal das min $t_{2n}(z)$

Im ersten Teil haben wir das Konvergenzverhalten des Kettenbruches (1.1) unter der Annahme, daß seine Elemente a_n den Bedingungen (1.2) und (1.3) genügten, untersucht. Für $\varrho > 1$ waren wir nur im Stande Konvergenz des geraden Teils des Kettenbruches zu beweisen. Wir kommen also nochmal auf diesen Fall zurück, um festzustellen, was unter Zuhilfenahme der Bedingungen (1.4) über den Kettenbruch ausgesagt werden kann. Wir setzen jetzt $\varrho^2 = r$, es ist also in diesem Teil immer $r > 1$. Zuerst betrachten wir wieder den Ausdruck $|t_{2n}(z)|$ und beweisen:

HILFSSATZ 5. *Die Elemente a_{2n} mögen der Bedingung (1.4) genügen, dann gilt für $|z - 1| \leqq k$*

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{2r - |1 - k|}{1 + k} \qquad 0 \leqq k \leqq r. \tag{7.1}$$

Gleichheit findet mindestens für

$$a_{2n} = 2(r - 1), \quad z = 1 + k, \quad k \leqq 1$$

und

$$a_{2n} = -2(r + 1), \quad z = 1 + k, \quad k \geqq 1$$

statt.

Beweis. Den zweiten Teil des Hilfssatzes beweist man ohne Schwierigkeiten direkt. Als nächstes zeigen wir (wie im Beweis des Hilfsatz 2), daß $1 + a_{2n}/z \neq 0$ ist. Es genügt zu zeigen, daß $|1 + a_{2n}| > r$ für $|a_{2n}| > 2(r - \cos \arg a_{2n})$ ist. Wir haben

$$|1 + a_{2n}| > |1 + 2(r - \cos \vartheta) e^{i\vartheta}| = |e^{-i\vartheta} + 2(r - \cos \vartheta)|$$
$$= [1 + 4r(r - \cos \vartheta)]^{\frac{1}{2}} \geqq [1 + 4r(r - 1)]^{\frac{1}{2}} = 2r - 1 > r.$$

Um das $\min|t_{2n}(z)|$ zu bestimmen, brauchen wir also nur Werte von a_{2n} auf dem Rande des Gebietes G_r zu betrachten, d.h.

$$a_{2n} = 2(r - \cos\vartheta)\, e^{i\vartheta}.$$

Eine Anwendung des Hilfssatz 1 führt nun zu folgender Ungleichung

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{4(r-\cos\vartheta)^2 + 4(r-\cos\vartheta)\cos\vartheta + 1 - k^2}{|1 - k^2 + 2(r - \cos\vartheta)\, e^{i\vartheta}| + 2k(r - \cos\vartheta)}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} H^2 &= |1 - k^2 + 2(r - \cos\vartheta)\, e^{i\vartheta}|^2 \\ &= (1 - k^2)^2 + 4(1 - k^2)(r - \cos\vartheta)\cos\vartheta + 4(r - \cos\vartheta)^2 \\ &= (1 - k^2)^2 + 4r(r - \cos\vartheta)(1 - k^2) + 4k^2(r - \cos\vartheta)^2 \\ &= (1 - k^2)^2 + 4ry(1 - k^2) + 4k^2y^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir

$$y = r - \cos\vartheta$$

gesetzt. Die in Betracht kommenden Werte von y sind also $r - 1 \leqq y \leqq r + 1$. Unsere Ungleichung kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$|t_{2n}(z)| \geqq \frac{4ry + 1 - k^2}{H + 2ky}.$$

Führen wir noch $\mu_k = 1$ für $k < 1$ und $\mu_k = -1$ für $k \geqq 1$ ein, so ist Hilfssatz 5 bewiesen, wenn die Ungleichung

$$\frac{4ry + 1 - k^2}{H + 2ky} \geqq \frac{2r - \mu_k(1-k)}{1 + k}$$

für $0 \leqq k \leqq r$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$(4ry + 1 - k^2)(1 + k) - 2ky\big(2r - \mu_k(1-k)\big) \geqq \big(2r - \mu_k(1-k)\big) \cdot H$$

und, da die beiden Ausdrücke nicht negativ sind, genügt es zu beweisen, daß

$$\begin{aligned} &[(4ry + 1 - k^2)(1 + k) - 2ky\big(2r - \mu_k(1-k)\big)]^2 \\ &\qquad \geqq \big(2r - \mu_k(1-k)\big)^2 [(1 - k^2)^2 + 4ry(1 - k^2) + 4k^2y^2] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(4ry + 1 - k^2)(1 + k)\,[(4ry + 1 - k^2)(1 + k) - 4ky\big(2r - \mu_k(1-k)\big)] \\ &\qquad \geqq \big(2r - \mu_k(1-k)\big)^2 (1 - k^2)(4ry + 1 - k^2) \end{aligned}$$

gilt. Es muß also

$$\begin{aligned} (4ry + 1 - k^2)(1 + k)\,[&4ry(1 + k) + (1 - k)(1 + k)^2 - 8rky + 4\mu_k ky(1 - k) - \\ &- (1 - k)\big(2r - \mu_k(1-k)\big)^2] \geqq 0 \end{aligned}$$

sein. Nun ist der Faktor $4ry + 1 - k^2$ nicht kleiner als

$$4r^2 - 4r + 1 - r^2 = (3r - 1)(r - 1) > 0.$$

Es genügt also zu zeigen, daß der letzte Faktor in unserem Produkt nicht negativ ist. Für ihn erhält man

$$(1-k)\,[4r\,y+(1+k)^2+4\mu_k k\,y-4r^2+4r\,\mu_k(1-k)-(1-k)^2]$$
$$=4(1-k)\,(y+\mu_k-r)\,(r+\mu_k k)$$

und es ist für $k<1$, $\mu_k=1$, so daß alle Faktoren nicht negativ sind. Für $k\geqq 1$ ist $\mu_k=-1$, dann sind die Faktoren $1-k$ und $y-1-r$ beide nicht positiv, das Produkt also auch wieder nicht negativ. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Zu (7.1) fügen wir noch die sofort einleuchtende Formel

$$\max|t_{2n-1}(z)-1|\leqq\frac{r}{m}, \tag{7.2}$$

wenn $|z|\geqq m$ ist, hinzu. Nun können wir eine Reihe von wichtigen Folgerungen ziehen.

Erstens gilt

$$\left|\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}-1\right|\leqq r,\qquad \left|\frac{A_{2n}}{B_{2n}}-1\right|\leqq 1. \tag{7.3}$$

Die erste Ungleichung erhält man, indem man von der aus dem ersten Teil bekannten Darstellung

$$\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=T_{2n-1}(1)$$

ausgeht, um dann durch vollständige Induktion unter Benutzung der Formeln (7.1) und (7.2) mit $k=r$ und $m=1$ die gewünschte Abschätzung zu bekommen. Für den Beweis des zweiten Teils von (7.3) gehen wir von der Formel

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}}=T_{2n-1}(1+a_{2n})$$

aus. Wir haben schon gezeigt, daß $|1+a_{2n}|>r$ ist. Eine Anwendung der Formeln (7.1) und (7.2) mit $k=1$ und $m=r$ führt uns dann zu dem gesuchten Resultat.

Zweitens folgt, da ja

$$\frac{B_n}{B_{n-1}}=t_n(t_{n-1}(\ldots t_2(1)\ldots))$$

ist:

$$\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}-1\right|\leqq 1,\qquad \left|\frac{B_{2n}}{B_{2n-1}}\right|\geqq r,\qquad \left|1+\frac{a_{2n}}{1}+\cdots+\frac{a_{2m}}{1}\right|\geqq r. \tag{7.4}$$

Um dieses Ergebnis zu erhalten, haben wir in den Formeln (7.1) und (7.2) wieder $k=1$ und $m=r$ gesetzt. Es kann also B_{2n} nicht verschwinden. Daß auch B_{2n-1} nicht Null sein kann, werden wir sofort sehen.

Es sei (wie im ersten Teil)

$$k_n=\max\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}-1\right|.$$

Dann ist, da ja bestimmt $k_n \leqq 1$ ist,

$$k_{n+1} = r \Big/ \frac{2r-1+k_n}{1+k_n} = \frac{r k_n + r}{2r-1+k_n} = 1 - \frac{(r-1)(1-k_n)}{2r-1+k_n}.$$

Nun ist gemäß den Formeln (3.3) $k_1 = 0$. Aus der obigen Rekursionsformel schließt man dann sofort, daß für alle $n \geqq 1$ die Ungleichung $k_n < 1$ gilt. B_{2n-1} kann also auch nicht verschwinden.

Um weitere Anwendungen zu formulieren, führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} s_n(z) &= t_{2n}\left(t_{2n+1}(z)\right) \\ S_{n,m}(z) &= S_{n,m-1}\left((s_m(z)\right), \qquad S_{n,n}(z) = z \end{aligned} \tag{7.5}$$

ein. Dann gilt

$$|S_{n,m}(z)| \geqq 1. \tag{7.6}$$

Dies erhält man, wenn man in den Formeln (7.1) und (7.2) $k = r$ und $m = 1$ setzt.

Ein weiteres Ergebnis ist:

HILFSSATZ 6. *Die Elemente a_n des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen* (1.4) *genügen. Ferner sei* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(r-1)$, $0 < \delta < \frac{1}{2}(r-1)$ *und* $|z| \geqq 1+\varepsilon$. *Dann gibt es ein von n unabhängiges $p(\varepsilon, \delta)$, so daß*

$$|S_{n,n+p}(z)| \geqq r - \delta, \quad \text{für } p > p(\varepsilon, \delta),$$

ist.

Beweis. Wir setzen $m_0 = m = 1+\varepsilon$. Dann ist für $|z| \geqq m$

$$|S_{n,n+p}(z)| \geqq m_p$$

wo

$$m_p = \frac{r(m-1)d^p + (r-m)}{(m-1)d^p + (r-m)}, \qquad d = \frac{2r}{r+1} > 1, \tag{7.7}$$

ist. Dies beweist man wie folgt: Gemäß (7.1) und (7.2) ist für $m < r$, also $k = r/m > 1$,

$$\min |s_k(z)| = \frac{2r+1-r/m}{1+r/m}, \quad \text{für } |z| \geqq m.$$

Hieraus erhalten wir die Rekursionsformel

$$m_{p+1} = \frac{(2r+1)m_p - r}{r+m_p}.$$

Vollständige Induktion, unter Benutzung dieser Formel, führt dann zu (7.7). Aus der Formel (7.7) ersehen wir nun sofort, daß $\{m_p\}$ eine monoton wachsende Folge mit dem Grenzwert r ist. Die Konstante $p(\varepsilon, \delta)$ errechnet man nun aus der Gleichung $m_{p(\varepsilon,\delta)} \geqq r - \delta$. Da n hier nicht vorkommt, ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 8. Abschätzung von R_{2n}^*/R_{2n-1}^*

Wir führen jetzt die Mengen Z_1^* und Z_2^* ein. Es sei

$$(8.1)\qquad \begin{cases} Z_1^* \text{ die Menge aller } z \text{ für die } |z| \geqq r-\eta(r+1) \\ Z_2^* \text{ die Menge aller } z \text{ für die } |z-1| \leqq 1+2\eta \end{cases}$$

gilt. Vorläufig machen wir über η nur die Annahme

$$0<\eta<\frac{r-1}{2(r+1)},$$

später werden wir es noch weiter einschränken. Nun ist gemäß Formel (7.1)

$$|t_{2n}(Z_2^*)| = \frac{2r+1-1-2\eta}{1+1+2\eta} = r-\frac{\eta(r+1)}{1+\eta} > r-\eta(r+1),$$

also

$$t_{2n}(Z_2^*) \subset Z_1^*$$

Aus (7.2) folgt

$$|t_{2n-1}(Z_1^*)-1| \leqq \frac{r}{r-\eta(r+1)} = 1+\frac{\eta(r+1)}{r-\eta(r+1)} < 1+2\eta,$$

da wir ja annehmen, daß $\eta(r+1)<\frac{1}{2}(r-1)$ ist. So ist

$$t_{2n-1}(Z_1^*) \subset Z_2^*.$$

Wie im ersten Teil führen wir nun $K_{2n}^* = T_{2n}(Z_2^*)$ und $K_{2n-1}^* = T_{2n-1}(Z_1^*)$ ein. Genau wie dort beweist man, daß

$$K_n^* \subset K_m^*, \quad \text{für} \quad n>m,$$

gilt. Die Mengen K_n^* sind auch in diesem Fall Kreisscheiben. Ihre Radien bezeichnen wir mit R_n^*. Die Werte von R_n^* erhält man aus den Formeln (3.4) und (3.5) wenn man in der ersten $\varrho = r-\eta(r+1)$ und in der zweiten $\varrho = 1+2\eta$ setzt. Es ist

$$R_{2n-1}^* = \frac{[r-\eta(r+1)]\prod_{m=1}^{2n-1}|a_m|}{|[r-\eta(r+1)]^2|B_{2n-2}|^2-|a_{2n-1}B_{2n-2}|^2|}$$

und

$$R_{2n}^* = \frac{(1+2\eta)\prod_{m=1}^{2n}|a_m|}{||B_{2n}|^2-(1+2\eta)^2|B_{2n-1}|^2|}.$$

Da ja $a_{2n-1}B_{2n-2} = B_{2n-1}-B_{2n-2}$ ist, kommt man zu

$$Q_n^* = \frac{R_{2n}^*}{R_{2n-1}^*} = \frac{1+2\eta}{r-\eta(r+1)} \cdot \frac{|a_{2n}|\left|[r-\eta(r+1)]^2-\left|1-\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|}{\left|\left|a_{2n}+\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2-(1+2\eta)^2\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|}$$

Hier können wieder gewisse Absolutstriche ausgelassen werden. Da

$$[r-\eta(r+1)]^2-\left|1-\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2 > \left(r-\frac{r-1}{2}\right)^2-1>0$$

ist, gilt

$$\left|[r-\eta(r+1)]^2-\left|1-\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|=[r-\eta(r+1)]^2-\left|1-\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2.$$

Weiter erhält man

$$\left|\left|a_{2n}+\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2-(1+2\eta)^2\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2\right|=\left|a_{2n}+\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2-(1+2\eta)^2\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|^2;$$

denn es ist ja

$$\left|a_{2n}+\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|=\left|\frac{B_{2n}}{B_{2n-1}}\right|\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|\geqq r\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|>(1+2\eta)\left|\frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}\right|,$$

da $\eta<(r-1)/2(r+1)$ angenommen wird. Also ist bestimmt $\eta<\frac{1}{2}(r-1)$ und $1+2\eta<r$. Setzen wir nun wieder

$$a_{2n}=a\,e^{i\alpha},\qquad \frac{B_{2n-1}}{B_{2n-2}}=1+b\,e^{i\beta},$$

wo, wie wir im vorigen Paragraphen bewiesen haben,

$$0\leqq b\leqq k_n<1$$

ist, so erhalten wir

$$Q_n^*=\frac{(1+2\eta)\,a\{[r-\eta(r+1)]^2-b^2\}}{[r-\eta(r+1)]\,\Delta},$$

wo

$$\Delta=|a\,e^{i\alpha}+1+b\,e^{i\beta}|^2-(1+2\eta)^2|1+b\,e^{i\beta}|^2$$

ist. Damit haben wir die Grundlagen für den Beweis des folgenden Hilfssatzes gelegt.

Hilfssatz 7. *Die Elemente des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen* (1.4) *genügen, ferner sei*

$$0<\eta\leqq\frac{1}{10}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^3$$

Dann gilt für den Radius R_{2n}^* der Kreisscheibe K_{2n}^* die Ungleichung

$$R_{2n}^*\leqq r\left(1-\frac{r-1}{4r}\right)^n.$$

Beweis. Wir berechnen zuerst Δ. Es ist

$$\begin{aligned}\Delta&=(a\cos\alpha+1+b\cos\beta)^2+(a\sin\alpha+b\sin\beta)^2-\\&\qquad-(1+2\eta)^2(1+2b\cos\beta+b^2)\\&=a^2+b^2+1+2a\cos\alpha+2b\cos\beta+2ab(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)-\\&\qquad-(1+2\eta)^2(1+b^2)-2b(1+2\eta)^2\cos\beta.\end{aligned}$$

Setzen wir $\gamma=4\eta(1+\eta)$ so erhalten wir

$$\Delta=-\gamma(1+b^2)+a^2+2a\cos\alpha+2b[\cos\beta(a\cos\alpha-\gamma)+\sin\beta\,a\sin\alpha].$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\Delta &\geqq -\gamma(1+b^2)+a^2+2a\cos\alpha-2b\,[a^2-2a\gamma\cos\alpha+\gamma^2]^{\frac{1}{2}}\\ &\geqq -\gamma(1+b^2)+a^2+2a\cos\alpha-2ba-2b\gamma\\ &= a^2+2a\cos\alpha-2ab-\gamma(1+b)^2>a^2+2a\cos-2ab-4\gamma,\end{aligned}$$

da ja $0<b<1$ ist. Für Q_n^* gilt also die Ungleichung

$$\begin{aligned}Q_n^* &< \frac{1+2\eta}{r-\eta(r+1)}\,\frac{a\{[r-\eta(r+1)]^2-b^2\}}{a^2+2a\cos\alpha-2ab-4\gamma}\\ &= \frac{1+2\eta}{r-\eta(r+1)}\,\frac{\{[r-\eta(r+1)]^2-b^2\}}{a+2\cos\alpha-2b-4\gamma/a}\end{aligned}$$

Nun ist $a\geqq 2(r-\cos\alpha)\geqq 2(r-1)$, also

$$\begin{aligned}Q_n^* &< \frac{1+2\eta}{r-\eta(r+1)}\cdot\frac{[r-\eta(r+1)]^2-b^2}{2(r-b)-2\gamma/(r-1)}\\ &< \frac{1+2\eta}{r(1-2\eta)}\cdot\frac{r^2-b^2}{2(r-b)-2\gamma/(r-1)}\\ &< \frac{r+1}{2r}\cdot\frac{1+2\eta}{(1-2\eta)\,[1-8\eta/(r-1)^2]}\end{aligned}$$

Hier haben wir davon Gebrauch gemacht, daß $r>1$, $b<1$ und $\gamma=4\eta(1+\eta)<8\eta$ ist. Man hat also

$$Q_n^* < \frac{r+1}{2r}\,\frac{1+2\eta[1+4/(r-1)^2]}{1-2\eta[1+4/(r-1)^2]}$$

Wählt man nun

$$2\eta\left(1+4/(r-1)^2\right)<\frac{r-1}{5r+3}$$

also

$$\eta<\frac{(r-1)^3}{2(5r+3)\,[(r-1)^2+4]},$$

oder noch kleiner aber etwas einfacher

$$\eta\leqq\frac{1}{10}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^3$$

so erhält man (die ursprüngliche Bedingung für η ist hiermit auch erfüllt)

$$Q_n^*<\frac{r+1}{2r}\cdot\frac{5r+3+r-1}{5r+3-(r-1)}=\frac{(r+1)\,2(3r+1)}{2r\cdot 4(r+1)}=\frac{3r+1}{4r}$$

Nun gilt immer $R_{2n+1}^*/R_{2n}^*\leqq 1$. Es folgt, daß

$$R_{2n}^*=R_1^*\prod_{m=1}^{n}Q_n^*<r\left(\frac{3r+1}{4r}\right)^n=r\left(1-\frac{r-1}{4r}\right)^n$$

ist. Damit ist der Hilfssatz 7 bewiesen.

§ 9. Vom Rande abtrennende Transformationen

Wir kommen jetzt zu einem Satz für den es im ersten Teil kein Gegenstück gibt.

HILFSSATZ 8. *In der Transformation $S_{n,m}(z)$ [s. Formel (7.5)] mögen die Elemente a_n den Bedingungen (1.4) genügen. Dann kann, für eine festgegebene Folge $\{a_n\}$ und ein festes n, die Ungleichung*

$$|S_{n,m}(1)| < 1+\varepsilon \tag{9.1}$$

höchstens für ein m gelten, vorausgesetzt daß

$$0 < \varepsilon \leqq \left(\frac{r-1}{4r}\right)^5$$

ist.

Beweis. Es entsteht kein Verlust von Allgemeinheit, wenn man $n=1$ setzt. Wir nehmen jetzt an, daß

$$|S_{1,p}(1)| < 1+\varepsilon$$

ist, wo p die kleinste positive Zahl ist für die die Ungleichung gilt. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad 1+\varepsilon = \delta, \\ &\text{(b)}\quad Y_\delta \text{ ist die Menge aller } z \text{ mit } |z| \leqq \delta, \\ &\text{(c)}\quad S_{1,p}^{-1}(Y_\delta) = \Omega_{p,\delta}, \\ &\text{(d)}\quad \sigma_n(w) = s_n^{-1}(w). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Da $s_n(z) = t_{2n}(t_{2n-1}(z))$ ist, erhält man

$$s_n(z) = \frac{z(1+a_{2n}) + a_{2n+1}}{z + a_{2n+1}}.$$

Es folgt, daß

$$\sigma_n(w) = \frac{(1-w)\,a_{2n+1}}{w-1-a_{2n}} \tag{9.3}$$

ist.

Als nächstes geben wir eine Übersicht über den Weg, dem wir folgen werden, um den Hilfssatz zu beweisen. Als erstes zeigen wir, daß

$$\sigma_n(Y_\delta) \subset Y_\delta.$$

Daraus folgt dann

$$\Omega_{p,\delta} \subset \sigma_p(Y_\delta).$$

Es kommt nun darauf an zu beweisen, daß für genügend kleines ε

$$S_{p+1,m}(1) \notin \Omega_{p,\delta}$$

ist. Dies ist bestimmt der Fall, wenn $S_{p+1,m}(1)$ nicht in $\sigma_p(Y_\delta)$ enthalten ist. Nun ist immer gemäß Formel (7.6) $|S_{p+1,m}(1)| \geqq 1$. Es genügt also den Teil von $\sigma_p(Y_\delta)$, der außerhalb des Kreises $|z|=1$ liegt, zu betrachten. Dies ist

ein sichelförmiges Gebiet F. Nach unserer Annahme ist $1 \in F$. Wir schätzen den Durchmesser d von F ab und kommen so zu einer Ungleichung $d < f(\delta)$. Wir wenden uns dann der Bestimmung des

$$\min |1 - S_{p+1,m}(1)|$$

zu. Dieses Minimum ist $2(r-1)/(1+r)$. Kann man also δ so bestimmen, daß

$$f(\delta) < \frac{2(r-1)}{1+r}$$

ist, dann ist für die δ, die dieser Ungleichung genügen, $S_{p+1,m}(1)$ nicht in F, also auch nicht in $\sigma_p(Y_\delta)$ und deshalb bestimmt nicht in $\Omega_{p,\delta}$ enthalten. Es folgt, daß für $m > p$

$$|S_{1,m}(1)| \geqq 1 + \varepsilon$$

gilt und der Hilfssatz 8 ist bewiesen, sobald die oben erwähnten Teilresultate erledigt sind.

Erstens ist

$$\max_{|w| \leq \delta} |\sigma_n(w)| = \max_{|w| \leq \delta} \left| \frac{a_{2n+1}}{1 + \frac{a_{2n}}{1-w}} \right|$$

$$= r / \min_{|w| = \delta} \left| 1 + \frac{a_{2n}}{1-w} \right| = \frac{r(1+\delta)}{2r+1-\delta}.$$

Für den letzten Schritt haben wir den Hilfssatz 5 mit $k = \delta > 1$ benutzt. Nun ist

$$\frac{r(1+\delta)}{2r+1-\delta} < \delta,$$

denn es ist

$$r\delta + r < 2r\delta + \delta - \delta^2,$$

da ja

$$\delta^2 - r\delta - \delta + r = (\delta - r)(\delta - 1) < 0$$

ist, wenn $\varepsilon < r - 1$ ist. Dies ist aber sicher der Fall wenn, wie wir annahmen, $\varepsilon < [(r-1)/4r]^5$ ist. Damit ist die Formel $\sigma_n(Y_\delta) \subset Y_\delta$ bewiesen.

Zweitens ist

$$\min |1 - S_{p+1,m}(1)| = \min |1 - s_{p+1}(S_{p+2,m}(1))|$$

$$\geqq \min_{|z| \geq 1} |1 - s_{p+1}(z)| = \min_{|z| \geq 1} \left| \frac{a_{2p+2}}{1 + \frac{a_{2p+2}}{z}} \right|$$

$$\geqq \frac{2(r - \cos\vartheta)}{\max_{|z| \geq 1} \left| 1 + \frac{a_{2p+2}}{z} \right|} = \frac{2(r - \cos\vartheta)}{1+r} \geqq \frac{2(r-1)}{1+r}$$

Um den Durchmesser d von F abzuschätzen, müssen wir eine Reihe von Überlegungen anstellen. Es ist möglich, daß in σ_p die Parameter a_{2p} und a_{2p+1} nicht am Rande ihres Variationsgebietes liegen. Wir behaupten nun, daß

$$\sigma_p(Y_\delta) \subset \sigma_p^*(Y_\delta)$$

ist, wo σ^* aus σ dadurch entsteht, daß $a_{2\rho}$ und $a_{2\rho+1}$ durch die Werte $a^*_{2\rho}$ und $a^*_{2\rho+1}$, mit gleichen Argumenten wie die ursprünglichen Parameter aber auf dem Rande des Variationsgebietes gelegen, ersetzt wird. Es ist $1/(1-Y_\delta)$ das Äußere eines Kreises dessen Inneres den Nullpunkt enthält. Das Gebiet $a^*_{2\rho}/(1-Y_\delta)$ enthält also das Gebiet $a_{2\rho}/(1-Y_\delta)$, denn es ist ja $|a^*_{2\rho}| \leqq |a_{2\rho}|$. Weiter ist (wie man aus Hilfssatz 5 entnimmt)

$$1+a^*_{2\rho}/(1-Y_\delta)$$

das Äußere eines Kreises, dessen Inneres den Nullpunkt enthält. Es ist also

$$\Psi = \frac{1}{1+a^*_{2\rho}/(1-Y_\delta)}$$

das Innere eines Kreises, das den Nullpunkt enthält. Also ist $a^*_{2\rho+1}\Psi \supset a_{2\rho+1}\Psi$, da ja $|a^*_{2\rho+1}| \geqq |a_{2\rho+1}|$ ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nun berechnen wir, für welche Werte von φ

$$|\sigma^*(-\delta e^{i\varphi})| \geqq 1$$

ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\frac{|a^*_{2\rho+1}|}{\left|1+\frac{a^*_{2\rho}}{1+\delta e^{i\varphi}}\right|} \geqq 1.$$

Hieraus ergibt sich, da $|a^*_{2\rho+1}| = r$ und $|a^*_{2\rho}| = 2(r-\cos\vartheta)e^{i\vartheta}$ ist

$$\begin{aligned}\left|1+\frac{a^*_{2\rho}}{1+\delta e^{i\varphi}}\right|^2 &= \left(1+\frac{2(r-\cos\vartheta)e^{i\vartheta}}{1+\delta e^{i\varphi}}\right)\left(1+\frac{2(r-\cos\vartheta)e^{-i\vartheta}}{1+\delta e^{-i\varphi}}\right)\\ &= 1+\frac{2(r-\cos\vartheta)(e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}+\delta e^{i(\vartheta-\varphi)}+\delta e^{-i(\vartheta-\varphi)})}{1+\delta(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+\delta^2}+\\ &\quad+\frac{4(r-\cos\vartheta)^2}{1+\delta(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+\delta^2}\\ &= 1+\frac{4(r-\cos\vartheta)[r+\delta\cos(\vartheta-\varphi)]}{1+2\delta\cos\varphi+\delta^2} \leqq r^2.\end{aligned}$$

So erhält man

$$4(r-\cos\vartheta)[r+\delta\cos(\vartheta-\varphi)] \leqq (r^2-1)(1+\delta^2+2\delta\cos\varphi)$$

und

$$\begin{aligned}\cos\varphi[2(r-\cos\vartheta)\cos\vartheta-(r^2-1)]+\sin\varphi\,2(r-\cos\vartheta)\sin\vartheta\\ \leqq \frac{(r^2-1)(1+\delta^2)-4r(r-\cos\vartheta)}{2\delta}\end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit -1, setzen

$$A = r^2-1-2(r-\cos\vartheta)\cos\vartheta$$

$$B = 2\sin\vartheta(r-\cos\vartheta)$$

$$\cos\alpha = A/(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sin\alpha = B/(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$$

und kommen so zu der Ungleichung

$$\cos(\varphi+\alpha) \geqq \frac{4r(r-\cos\vartheta)-(r^2-1)(1+\delta^2)}{2\delta(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Für A^2+B^2 errechnen wir

$$\begin{aligned} A^2+B^2 &= (r^2-1)^2-4(r^2-1)(r-\cos\vartheta)\cos\vartheta+4(r-\cos\vartheta)^2 \\ &= (r^2+1)^2-4(r^2+1)r\cos\vartheta+4r^2\cos^2\vartheta \\ &= (r^2+1-2r\cos\vartheta)^2. \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel für $\cos(\varphi+\alpha)$ ein so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(\varphi+\alpha) &\geqq \frac{2(r^2+1-2r\cos\vartheta)+(r^2-1)(1-\delta^2)}{2(r^2+1-2r\cos\vartheta)\delta} \\ &= \frac{2(r^2+1-2r\cos\vartheta)\delta+(1-\delta)[2(r^2+1-2r\cos\vartheta+(1+\delta)(r^2-1)]}{2(r^2+1-2r\cos\vartheta)\delta} \\ &= 1-\varepsilon\frac{4r(r-\cos\vartheta)+\varepsilon(r^2-1)}{2(r^2+1-2r\cos\vartheta)\delta}. \end{aligned}$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned} \sin^2\frac{\varphi+\alpha}{2} &\leqq \varepsilon\frac{(r-\cos\vartheta)\left[r+\frac{\varepsilon}{4}(r+1)\right]}{(r-\cos\vartheta)^2\delta} \\ &< \varepsilon\frac{r(1+\varepsilon)}{(r-\cos\vartheta)\delta} = \varepsilon\frac{r}{r-\cos\vartheta} \end{aligned}$$

ist. Wir setzen nun $\sin^2\psi=\varepsilon r/(r-\cos\vartheta)$. Ist dann ε so gewählt, daß $2\psi\leqq\pi/2$ ist, so ist der Durchmesser d' des sichelförmigen Gebietes im Kreise Y_δ dessen Bild unter σ_p das Gebiet F ist, sicher kleiner als $2\delta\sin 2\psi$. Wir wählen also vorläufig

$$\varepsilon<\frac{1}{2}\frac{r-1}{r}\leqq\frac{1}{2}\frac{r-\cos\vartheta}{r},$$

dann ist

$$d'<2\delta\sin 2\psi<4\delta\sin\psi<8\left(\frac{\varepsilon r}{r-\cos\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für den Durchmesser d von F folgt dann

$$d\leqq d'\max_{|w|\leqq\delta}|\sigma_p^{*\prime}(w)|.$$

Nun ist

$$\sigma_p^*=\frac{(1-w)a_{2p+1}}{w-1-a_{2p}^*}=a_{2p+1}^*\left(-1-\frac{a_{2p}^*}{w-1-a_{2p}^*}\right)$$

Daraus ergibt sich

$$|\sigma_p^{*\prime}|=\frac{|a_{2p+1}^*a_{2p}^*|}{|w-1-a_{2p}^*|^2}=\frac{2r(r-\cos\vartheta)}{|w-1-a_{2p}^*|^2}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} |1+a_{2p}^*|^2=|1+2(r-\cos\vartheta)e^{i\vartheta}|^2 &= 1+4(r-\cos\vartheta)\cos\vartheta+4(r-\cos\vartheta)^2 \\ &= [2(r-\cos\vartheta)+\cos\vartheta]^2+\sin^2\vartheta \\ &\geqq (2r-\cos\vartheta)^2. \end{aligned}$$

Da $|w| \leqq \delta < r$ ist folgt

$$|\sigma_p^{*\prime}| < \frac{2r(r-\cos\vartheta)}{(r-\cos\vartheta)^2} = \frac{2r}{r-\cos\vartheta}$$

Es ist also

$$d < 16\varepsilon^{\frac{1}{5}} \frac{r^{\frac{3}{5}}}{(r-\cos\vartheta)^{\frac{1}{5}}} \leqq 16\varepsilon^{\frac{1}{5}} \frac{r^{\frac{3}{5}}}{(r-1)^{\frac{1}{5}}}$$

Damit dies kleiner als $2(r-1)/(r+1)$ ist muß ε die Ungleichung

$$16\varepsilon^{\frac{1}{5}} \frac{r^{\frac{3}{5}}}{(r-1)^{\frac{1}{5}}} < \frac{2(r-1)}{r+1}$$

erfüllen. Dies ist der Fall wenn

$$\varepsilon < \frac{(r-1)^5}{64(r+1)^5 r^3}$$

also bestimmt wenn

$$\varepsilon \leqq \left(\frac{r-1}{4r}\right)^5$$

ist. Diese Grenze für ε ist auch kleiner als die vorläufig gewählte Grenze $(r-1)/2r$. Damit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

§ 10. Beweis der Konvergenzsätze

Es seien nun ein Kettenbruch (1.1), dessen Elemente den Bedingungen (1.4) genügen, und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann bestimmen wir zuerst n_1, so daß

$$2r\left(1-\frac{r-1}{4r}\right)^{n_1} < \varepsilon$$

ist. Als nächstes wählen wir n_2 so groß, daß für

$$|z| \geqq 1 + \left(\frac{r-1}{4r}\right)^5$$

$$|S_{n_1+1,n_2}(z)| \geqq r - \frac{(r-1)^3}{10(r+1)^2}$$

ist. Dies ist auf Grund von Hilfssatz 6, wo wir das dortige $\varepsilon = [(r-1)/4r]^5$ und das $\delta = (r-1)^3/10(r+1)^2$ gesetzt haben, möglich. Die Zahlen n_1 und n_2 hängen nur von ε, nicht von dem gegebenen Kettenbruch ab. Schließlich bestimmen wir n_3 so, daß

$$|S_{n_1+1,m}(1)| \geqq 1 + \left(\frac{r-1}{4r}\right)^5 \quad \text{für } m > n_3$$

ist. Daß ein derartiges n_3 existiert, folgt aus Hilfssatz 8. Die Zahl n_3 hängt nicht nur von n_2, also von ε, sondern auch von dem gegebenen Kettenbruch ab.

Es sei nun $n > 2(n_1+n_2+n_3)$. Ist $n = 2p+1$ dann ist

$$\frac{A_n}{B_n} = T_{2p+1}(1) = T_{2n_1+1}\left(S_{n_1+1,n_2}(S_{n_2+1,p}(1))\right)$$

und es folgt, daß

$$\frac{A_n}{B_n} \in K^*_{2n_1+1} \subset K^*_{2n_1}$$

ist, wo das $\eta=(r-1)^3/10(r+1)^3$ ist, also den Bedingungen des Hilfssatz 7 genügt. Es folgt, daß

$$R^*_{2n_1}\leqq r\left(1-\frac{r-1}{4r}\right)^{n_1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Für gerades $n=2q$ ist die Sache bedeutend leichter, denn es ist ja immer nach Formel (7.4)

$$\left|1+\frac{a_{2n_1+2}}{1}+\cdots+\frac{a_2}{1}\right|\geqq r,$$

so daß Hilfssatz 7 mit $\eta=0$, ohne Zwischenschaltung von Hilfssatz 6 und 8, benutzt werden kann.

Für alle n, $m>2(n_1+n_2+n_3)$ gilt also

$$\left|\frac{A_n}{B_n}-\frac{A_m}{B_m}\right|\leqq 2R^*_{2n_1}<\varepsilon.$$

Damit ist die Konvergenz des Kettenbruches (1.1) bewiesen.

SATZ 4. *Der Kettenbruch* (1.1) *konvergiert, wenn seine Elemente* a_n *den Bedingungen*

$$|a_{2n-1}|\leqq r,\quad |a_{2n}|\geqq 2(r-\cos\arg a_{2n}),\quad r>1$$

genügen. Sein Wert liegt auf der Kreisscheibe $|z-1|\leqq 1$.

Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, daß unter den gegebenen Bedingungen immer

$$\left|\frac{A_{2n}}{B_{2n}}-1\right|\leqq 1$$

ist.

Gleichmäßige Konvergenz läßt sich in diesem Fall nicht mehr beweisen. Das geht aus folgendem Beispiel hervor: Es sei Λ_n der Kettenbruch dessen Elemente den Bedingungen (1.4) und

$$a_{2m-1}=r,\quad a_{2m}=2(r-1),\quad m\leqq n$$
$$a_{2n+1}=-r,\quad \text{andere Elemente beliebig,}$$

genügen. Dann hat der $2n+1$. Näherungsbruch von Λ_n den Wert $1-r$, während seine geraden Näherungsbrüche immer auf der Kreisscheibe $|z-1|\leqq 1$ liegen.

Es gilt aber folgender Satz über gleichmäßige Konvergenz:

SATZ 5. *Die Elemente des Kettenbruches* (1.1) *mögen den Bedingungen*

$$|a_{2n-1}|\leqq r(1-\eta),\quad |a_{2n}|\geqq 2(r-\cos\arg a_{2n}),\quad r>1,$$

wo $\eta<\frac{1}{4}\left(\frac{r-1}{r}\right)$ *eine beliebig kleine positive Zahl ist, genügen. Es seien die Elemente* a_n *Funktionen von beliebig vielen Variabeln. Dann konvergiert der Kettenbruch gleichmäßig, vorausgesetzt, daß im ganzen Variationsbereich der Veränderlichen, die Elemente die oben genannten Bedingungen erfüllen.*

Beweis. Mit der verschärften Bedingung $|a_{2n-1}|\leqq r(1-\eta)$ fällt die Notwendigkeit der Bestimmung des n_3 weg. Anstatt des n_2 wählen wir nun ein n_2' in der unten beschriebenen Weise. Im übrigen ist der Beweis dem des Satz 4 analog.

Es ist in diesem Fall

$$s_n(z) = t_{2n}(u),$$

wo $|u-1| \leqq r(1-\eta) = k$ für $|z| \geqq 1$ gilt. Nach Hilfssatz 5 ist also

$$|s_n(z)| \geqq 1 + \frac{2\eta r}{1+r(1-\eta)}.$$

Es ist deshalb möglich, ein n_2' so zu bestimmen, daß

$$|S_{n_1+1,\,n_2'}(z)| = |S_{n_1+1,\,n_2'-1}(s_{n_2'}(z))| \geqq r - \frac{(r-1)^3}{10(r+1)^2}$$

ist. Dies folgt aus Hilfssatz 6, wo wir für das dortige $\varepsilon = 2\eta r/[1+r(1-\eta)]$ und das dortige $\delta = (r-1)^3/10(r+1)^2$ gesetzt haben. Die Zahl $n_2' - n_1$ hängt nur von η nicht von dem gegebenen Kettenbruch ab. Da n_1 nur von ε abhängt, ist die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bewiesen.

§ 11. Ein Gegenbeispiel

Wir beweisen jetzt, daß die in Satz 4 erzielten Zwillingskonvergenzgebiete bestmögliche sind. Zu diesem Zweck konstruieren wir einen divergenten periodischen Kettenbruch, dessen Elemente den Bedingungen

$$a_{2n} = a e^{i\alpha}, \quad a = 2(r' - \cos\alpha),$$
$$a_{2n-1} = r e^{i\vartheta_n},$$

wo $0 < r - r' < (r-1)^2/4r$; $r > 1$ gewählt ist, genügen. Die Konstruktion hängt von der Möglichkeit ab die Werte ϑ_m für $m = 1, \ldots, k$ so zu bestimmen, daß [für die Definition von σ_m s. Formel (9.2) d]

$$z_0 = 1, \quad z_m = \sigma_m(z_{m-1}), \quad z_k = 1$$

gilt. Ist eine derartige Wahl der ϑ_m möglich, so gilt für die $2kv+1$. Näherungsbrüche des Kettenbruches $1+K(a_n/1)$, von der Periode $2k$,

$$\frac{A_{2kv+1}}{B_{2kv+1}} = t_1\big(S_{1,k}\big(S_{1,k}(\ldots S_{1,k}(1)\ldots)\big)\big).$$

Es sei nun $S_{1,k}(1) = \zeta$. Dann ist

$$1 = S_{1,k}^{-1}(\zeta) = \sigma_k\big(\sigma_{k-1}(\ldots\sigma_1(\zeta)\ldots)\big).$$

Diese Gleichung in ζ hat nur eine Lösung. Wir haben aber die σ_m so bestimmt, daß $\zeta = 1$ eine Lösung und deshalb die einzige Lösung dieser Gleichung ist. Es folgt, daß

$$A_{2kv+1}/B_{2kv+1} = t_1(1) = 1 + a_1,$$

ist. Hieraus ergibt sich sofort

$$\left|\frac{A_{2kv+1}}{B_{2kv+1}} - 1\right| = r.$$

Unser Kettenbruch genügt aber auch den Voraussetzungen des Satz 3 mit $\varrho^2 = r$; denn es ist, wenn wir $r' = r - \varepsilon$ setzen

$$(11.1)\quad 2(r' - \cos\alpha) = 2(r - \varepsilon - \cos\alpha) \geqq r - \cos\alpha + [2r(1-\cos\alpha) - \sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$$

Hier benützen wir die mit der Bedingung $|c_{2n} \pm i| \geqq \varrho$ äquivalente Bedingung

$$|a_{2n}| \geqq \varrho^2 - \cos \arg a_{2n} + [2\varrho^2(1 - \cos \arg a_{2n}) - \sin^2 \arg a_{2n}]^{\frac{1}{2}}.$$

Um die Ungleichung (11.1) zu beweisen, gehen wir nun so vor: (11.1) gilt, wenn

$$(r - 2\varepsilon - \cos\alpha)^2 \geqq 2r - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

ist. Dies ist der Fall, wenn

$$r^2 - 2r\cos\alpha + \cos^2\alpha - 4\varepsilon(r - \cos\alpha) + 4\varepsilon^2 \geqq 2r - 2r\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

oder

$$(r-1)^2 \geqq 4\varepsilon(r - \cos\alpha) - 4\varepsilon^2$$

gilt. Die letzte Ungleichung folgt sofort aus unserer Annahme

$$\varepsilon = r - r' < (r-1)^2/4r.$$

Aus dem zweiten Teil des Satz 3 entnehmen wir die Ungleichung

$$\left|\frac{A_{2n}}{B_{2n}} - 1\right| \leqq r^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist $r > 1$, also ist $r^{\frac{1}{2}} < r$ und die Divergenz des Kettenbruches ist bewiesen.

Wir wenden uns nun der Bestimmung der ϑ_m zu. Es ist nach Formel (9.3)

$$\sigma_m(w) = -re^{i\vartheta_m}\frac{(1-w)}{1-w+ae^{\alpha i}} = \frac{-re^{i\vartheta_m}}{1+\dfrac{ae^{i\alpha}}{1-w}}.$$

Setzt man also $z_0 = 1$, so ist $z_1 = \sigma_1(z_0) = 0$ und ϑ_1 kann beliebig, z.B. $\vartheta_1 = 0$ gewählt werden.

Für z_2 erhält man

$$z_2 = \sigma_2(z_1) = \frac{-e^{i\vartheta_2}r}{1+ae^{i\alpha}}.$$

Es ist also $|z_2|$ bestimmt, während $\varphi_2 = \arg z_2$ noch ganz beliebig gewählt werden kann. Nehmen wir an $|z_{m-1}| = \tau_{m-1}$ sei schon bestimmt, aber $\varphi_{m-1} = \arg z_{m-1}$ noch frei zu wählen. Wir wollen nun τ_m so groß wie möglich machen und wählen deshalb φ_{m-1} so, daß

$$\tau_m = |z_m| = \frac{r}{\min\limits_{0 \leqq \varphi_{m-1} \leqq 2\pi}\left|1 + \dfrac{ae^{i\alpha}}{1-\tau_{m-1}e^{i\varphi_{m-1}}}\right|}$$

ist. Eine Anwendung von Hilfssatz 1 führt dann zu

$$\tau_m = \frac{r(\tau_{m-1}a + |1 - \tau_{m-1}^2 + ae^{i\alpha}|)}{a^2 + 2a\cos\alpha + 1 - \tau_{m-1}^2}.$$

Das $\arg z_m$ bleibt unbestimmt und wird erst beim nächsten Schritt fest gewählt. Bezeichnen wir mit

$$f_\alpha(\tau) = \frac{r(\tau a + |1 - \tau^2 + ae^{i\alpha}|)}{a^2 + 2a\cos\alpha + 1 - \tau^2}$$

und setzen $a=2(r'-\cos\alpha)$, so erhalten wir, da ja

$$a^2+2a\cos\alpha=4r'(r'-\cos\alpha)$$

ist,

$$f_\alpha(\tau)=\frac{r\,[2\tau(r'-\cos\alpha)+|1-\tau^2+2(r'-\cos\alpha)\,e^{i\alpha}|]}{4r'(r'-\cos\alpha)+1-\tau^2}.$$

Weiter gilt für $0\leqq\tau\leqq 1$

(11.2) $$f_\alpha(\tau)>\tau.$$

Da $r>r'$ ist genügt es

$$2\tau r'(r'-\cos\alpha)+r'\,|1-\tau^2+2(r'-\cos\alpha)\,e^{i\alpha}|$$
$$\geqq 4r'\tau(r'-\cos\alpha)+(1-\tau^2)\,\tau$$

oder

$$r'\,|1-\tau^2+2(r'-\cos\alpha)\,e^{i\alpha}|\geqq 2r'\tau(r'-\cos\alpha)+(1-\tau^2)\,\tau$$

zu beweisen. Wir nehmen das Quadrat auf beiden Seiten und kommen so zu

$$r'^2(1-\tau^2)^2+4r'^2(1-\tau^2)\,(r'-\cos\alpha)\cos\alpha+4r'^2(r'-\cos\alpha)^2$$
$$=4r'^2\tau^2(r'-\cos\alpha)^2+4r'\tau^2(1-\tau^2)\,(r'-\cos\alpha)+\tau^2(1-\tau^2)^2.$$

Bringt man nun alles auf die linke Seite, so erhält man

$$(1-\tau^2)^2(r'^2-\tau^2)+4r'(1-\tau^2)\,(r'-\cos\alpha)\,(r'\cos\alpha-\tau^2)+$$
$$+4r'^2(r'-\cos\alpha)^2(1-\tau^2)$$
$$=(1-\tau^2)\,[(1-\tau^2)\,(r'^2-\tau^2)+4r'(r'-\cos\alpha)\,(r'\cos\alpha-\tau^2+r'^2-r'\cos\alpha)]$$
$$=(1-\tau^2)\,(r'^2-\tau^2)\,[1-\tau^2+4r'(r'-\cos\alpha)].$$

Da der letzte Ausdruck für $0\leqq\tau\leqq 1$ nie negativ ist, ist die Ungleichung (11.2) bewiesen.

Da $\tau_m=f_\alpha(\tau_{m-1})$ ist folgt, daß $\tau_m>\tau_{m-1}$ ist. Weiter kann man aus (11.2) auf die Existenz einer ganzen Zahl k schließen, so daß $\tau_{k-1}<1\leqq\tau_k$ ist. Wäre dies nicht so, so müßten die τ_m monoton wachsend einem Grenzwert $T\leqq 1$ zustreben. Für diesen Wert müßte $f_\alpha(T)=T$ gelten, dies kann aber nicht der Fall sein. Bis $k-1$ folgen wir in der Bestimmung der φ_{m-1} und damit der ϑ_{m-1}, der oben angegebenen Regel. φ_{k-1} bestimmen wir nun so, daß

(11.3) $$|\sigma_k(\tau_{k-1}e^{i\varphi_{k-1}})|=1$$

ist. Schließlich wird ϑ_k durch die Gleichung

$$\sigma_k(\tau_{k-1}e^{i\varphi_{k-1}})=1$$

bestimmt. Daß es ein φ_{k-1} für das die Gl. (11.3) gilt, gibt, geht aus folgenden Überlegungen hervor. Ist $f_\alpha(\tau_{k-1})=1$ ist alles klar, andernfalls ist

$$\max|\sigma_k(\tau_{k-1}e^{i\varphi})|>1.$$

Die Funktion $\Sigma(\varphi)=|\sigma_k(\tau_{k-1}e^{i\varphi})|$ ist eine stetige Funktion von φ. Für den Wert φ^* für den Σ ihr Maximum annimmt ist $\Sigma(\varphi^*)=f_\alpha(\tau_{k-1})>1$. Ein Argument, das dem im Beweis des Hilfssatz 1 gebrauchten analog ist, zeigt nun sofort, daß

$$\min \Sigma(\varphi)=\frac{r(1-\tau_{k-1}^2)}{|1-\tau_{k-1}^2+a\,e^{i\alpha}|+\tau_{k-1}a}$$

ist. Da $\tau_{k-1}<1$ ist kann man

$$\max \Sigma(\varphi)=\frac{r(1-\tau_{k-1}^2)}{||1-\tau_{k-1}^2+a\,e^{i\alpha}|-\tau_{k-1}a|}$$

schreiben. Das Produkt der beiden Ausdrücke ist

$$\frac{r^2(1-\tau_{k-1}^2)^2}{||1-\tau_{k-1}^2+a\,e^{i\alpha}|^2-\tau_{k-1}^2a^2|}=\frac{r^2(1-\tau_{k-1}^2)^2}{(1-\tau_{k-1}^2)^2+2a\cos\alpha\,(1-\tau_{k-1}^2)+a^2(1-\tau_{k-1}^2)}$$

$$=\frac{r^2(1-\tau_{k-1}^2)}{1-\tau_{k-1}^2+4r'(r'-\cos\alpha)}<\frac{r^2(1-\tau_{k-1}^2)}{1-\tau_{k-1}^2+4r(r-\cos\alpha)}.$$

Dies ist kleiner als 1, denn es ist ja

$$(r^2-1)(1-\tau_{k-1}^2)<4r(r-1).$$

Da einer der Faktoren des Produktes größer als 1 ist, muß der andere kleiner als 1 sein. Die Funktion $\Sigma(\varphi)$ nimmt also sowohl Werte größer als wie auch kleiner als 1 an. Es muß also einen Wert φ' geben für den $\Sigma(\varphi')=1$ ist. Damit ist bewiesen, daß man $z_k=\sigma_k(z_{k-1})=1$ erhalten kann.

Literatur

[1] COPP, GEORGE: Some convergence regions for a continued fraction. Dissertation. The University of Texas, 1950. — [2] COWLING, V. F., WALTER LEIGHTON and W. J. THRON: Twin convergence regions for continued fractions. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 351–357 (1944). — [3] LEIGHTON, WALTER, and H. S. WALL: On the transformation and convergence of continued fractions. Amer. J. Math. **58**, 267–281 (1936). — [4] PERRON, OSKAR: Über zwei Kettenbrüche von H. S. WALL. Sitzgsber. Bayr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. **1957**, 1–13. — [5] SINGH, VIKRAMADITYA, and W. J. THRON: A family of best twin convergence regions for continued fractions. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 277–282 (1956). — [6] THRON, W. J.: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke Math. J. **10**, 677–685 (1943). — [7] WALL, H. S.: Partially bounded continued fractions. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 1090–1093 (1956). — [8] WORPITZKY, J.: Untersuchungen über die Entwicklung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche. Jahresber. Friedrichsgymnasium u. Realschule, Berlin 1865.

Department of Mathematics, University of Colorado, Boulder, Col. (U.S.A.)

(Eingegangen am 26. Juni 1958)

GOES, G.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 345–371 (1959)

BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten

Von
GÜNTHER GOES

Inhaltsverzeichnis

I. Definitionen und Übersicht 346
II. Funktionalanalytische Grundlagen 350
III. Notwendige Zeilen- und Spalteneigenschaften von $\mathfrak{M}$ für $T \in (E, E_1)$; Teilsummendarstellungen 357
IV. Notwendige und hinreichende Normbedingungen für $T \in (E, E_1)$; verschiedene Normdarstellungen 360
V. Transformationen mit der transponierten Matrix; Schlußbemerkungen 368
Literatur 371

Einleitung

Funktionalanalytische Methoden werden in der Theorie der Fourier-Reihen (=FRn) seit vielen Jahren angewandt, jedoch werden dabei vorwiegend Banach-Räume von Funktionen und nicht bewußt *BK*-Räume, d.h. nicht Banach-Räume von Folgen mit koordinatenweiser Konvergenz, betrachtet.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie die Theorie der *BK*-Räume als spezieller *FK*-Räume (s. etwa [26], [27], [28], [29]) zur Untersuchung von FRn geeignet ist. Eine wesentliche Rolle spielen dabei die zu Fourier-Koeffizientenräumen E komplementären Räume E^* (Parsevalsche Gleichung!), welche sich wie die Räume E als *BK*-Räume erweisen.

Die funktionalanalytischen Aussagen der ersten Hälfte dieser Arbeit werden auf Matrixtransformationen angewandt. F. H. YOUNG [21], [22] gab hinreichende und zugleich notwendige Bedingungen an für Matrixtransformationen, welche Fourier-Koeffizienten von Funktionen in $L_p (1<p<\infty)$ transformieren in Fourier-Koeffizienten des gleichen Raumes. Wir geben Bedingungen an für Matrixtransformationen vom gleichen Typ, jedoch für verschiedene Räume — z.B. $L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, C, V, A (s. S. 347ff.) —, wobei insbesondere auch Urraum und Bildraum voneinander verschieden sein können.

Von besonderem Interesse dürfte dabei auch der Fall sein, in dem der Bildraum derjenige Unterraum eines der obengenannten Räume ist, in dem das trigonometrische Orthogonalsystem eine Basis bildet.

Herrn Professor F. LÖSCH danke ich für sein freundliches Interesse an der Entstehung dieser Arbeit. Herrn Professor W. MEYER-KÖNIG und Herrn Dozent K. ZELLER danke ich für zahlreiche, wertvolle Ratschläge.

Kapitel I. Definitionen und Übersicht

§ 1. Definition der Transformation

Wir betrachten Matrixtransformationen der folgenden Art.

Die reellen Koeffizientenfolgen

$$\mathfrak{a} = \{a_j\}, \quad \mathfrak{b} = \{b_j\} \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

der trigonometrischen Reihe

$$\overset{\circ}{f} \equiv (a_j, b_j) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \tag{2}$$

werden durch eine reelle, unendliche Zahlenmatrix $\mathfrak{M} = (a_{kj})$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$ transformiert in Koeffizientenfolgen

$$\mathfrak{a}' = \{a'_k\}, \quad \mathfrak{b}' = \{b'_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

mit

$$a'_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} a_j, \quad b'_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} b_j \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

der trigonometrischen Reihe

$$\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f} \equiv (a'_k, b'_k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx). \tag{5}$$

Dabei sind (2) und (5) formale trigonometrische Reihen, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt wird. Jedoch ist $\mathfrak{M}$ erst genau dann auf ein Folgenpaar (1) anwendbar, wenn die Summen (4) existieren.

Transformiert $\mathfrak{M}$ jedes Folgenpaar (1) aus einem gewissen Raum E in das Folgenpaar (2) eines gewissen Raumes E_1, so vermittelt $\mathfrak{M}$ eine Transformation T der Klasse (E, E_1) und wir schreiben dafür $T \in (E, E_1)$.

§ 2. Definition der Räume. Vereinbarungen

Die Buchstaben f, g, h usw. bezeichnen reellwertige, Lebesgue-integrierbare und mit 2π periodische Funktionen $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ usw. der reellen Veränderlichen t, welche für fast alle t im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert sind und deren FRn vom Typ (2) sind. Es sei also $a_0 = 0$ (vgl. § 4).

Zur Definition der Räume ist folgendes zu beachten:

Da äquivalente Funktionen f gleiche FRn erzeugen, sind die unten definierten Funktionenräume als Faktorräume [25; S. 99] nach dem Unterraum L_0 der Funktionen welche äquivalent Null sind, zu verstehen. Ferner verstehen wir unter f im folgenden stets den durch

$$f = \lim_{n \to \infty} \sigma_n(\overset{\circ}{f}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1-j}{n+1} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \tag{6}$$

definierten Repräsentanten aus der Klasse $[f]$ von äquivalenten Funktionen. Dieser Klassenrepräsentant f ist wie bekannt stetig, schwankungsbeschränkt

oder absolutstetig im strengen Sinn, wenn $\overset{\circ}{f}$ die FR einer Funktion ist, welche äquivalent ist zu einer beziehentlich stetigen, schwankungsbeschränkten oder absolutstetigen Funktion. Außerdem ist dies f genau dann identisch Null, wenn $a_j = b_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots$ ist.

Die Zeichen $\overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{g}, \overset{\circ}{h}$ usw. stehen für trigonometrische Reihen vom Typ (2). Sind diese Reihen FRn, so bezeichnen sie die durch f, g, h usw. erzeugten FRn.

Integrale sind stets Lebesgue-Integrale und Stieltjes-Integrale sind Riemann-Stieltjes-Integrale.

Die Buchstaben E und E_1 bezeichnen neben Funktionenräumen auch zugeordnete Räume von Reihen oder Folgen, und zwar gelte:

$f \in E$ bedeutet: Die Funktion f gehört dem Raum E an.

$\overset{\circ}{f} \in E$ bedeutet: Die Reihe $\overset{\circ}{f}$ gehört dem Raum E an. Ist dabei E ein Funktionenraum, so bedeutet dies, daß $\overset{\circ}{f}$ durch ein $f \in E$ erzeugt wird.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ bedeutet: Die Folgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gehören dem Raum E an. Ist dabei E ein Funktionenraum, so bedeutet dies, daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch ein $f \in E$ erzeugt werden.

Ist für einen Funktionenraum E eine Norm erklärt und werden die Folgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ als Fourier-Koeffizientenfolgen durch ein $f \in E$ erzeugt, so sei $\|f\|_E = \|\overset{\circ}{f}\|_E = \|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\|_E$, d.h. die Norm im Raum der Reihen und die Norm im Raum der Folgen sei identisch mit der Norm im Funktionenraum.

Mit f als Klassenrepräsentanten gemäß (6) und $\overset{\circ}{f}$ gemäß § 1, (1), sowie unter Beachtung der Besonderheit, daß alle Funktionenräume als Faktorräume nach dem Unterraum L_0 aufzufassen sind, definieren wir:

1) $f \in L_p (1 \leqq p < \infty)$, wenn $\int_0^{2\pi} |f|^p dt$ existiert. Die Norm sei $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$, speziell sei $\|f\|_1 = \|f\|_L$ und $L_1 = L$.

2) $f \in L_\infty$, wenn $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)| < \infty$.

3) $f \in C$, wenn f stetig ist für $t \in (-\infty, \infty)$. Die Norm sei $\|f\|_C = \operatorname{Max}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$.

4) $f \in V$, wenn f schwankungsbeschränkt ist im Intervall $[0, 2\pi]$. Die Norm sei $\|f\|_V = \int_0^{2\pi} |df|$.

5) $f \in A$, wenn f absolutstetig ist im Intervall $[0, 2\pi]$. Die Norm sei — $f \in A$ impliziert $f' \in L$ — $\|f\|_A = \|f'\|_L = \|f\|_V$.

6) $f \in P$, wenn f ein trigonometrisches Polynom ist.

7) $\overset{\circ}{f} \in P_\infty$, wenn $\overset{\circ}{f}$ eine formale trigonometrische Reihe ist.

8) Ist $E \subset P_\infty$, so ist der zu E gehörige „Stieltjes-Raum" dE der Raum der $\overset{\circ}{f} = (a_j, b_j)$ für die $\overset{\circ}{F} = \left(-\frac{b_j}{j}, \frac{a_j}{j} \right) \in E$ ist. Ist E ein normierter Raum, so auch dE und für $\overset{\circ}{f} \in dE$ sei

$$\|\overset{\circ}{f}\|_{dE} = \|\overset{\circ}{F}\|_E.$$

Entsprechend ist der zu E gehörige n-te Stieltjes-Raum $d^n E$ der Raum der $\overset{\circ}{f}$ bei denen die n mal gliedweis integrierte Reihe ein Element in E ist. Ist E ein normierter Raum, so auch $d^n E$ und für $\overset{\circ}{f} \in d^n E$ sei $\|\overset{\circ}{f}\|_{d^n E} = \|\overset{\circ}{F}\|_E$, wobei aber jetzt $\overset{\circ}{F}$ die n mal gliedweis integrierte Reihe von $\overset{\circ}{f}$ ist.

9) Ist $E < P_\infty$, so ist der zu E „komplementäre Raum" E^*, der Raum der $\overset{\circ}{f} = (a_j, b_j)$, bei denen für jedes $\overset{\circ}{g} = (c_j, d_j) \in E$ die Summe $\langle \overset{\circ}{f}\, \overset{\circ}{g} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j c_j + b_j d_j)$ existiert. Ist E dabei so beschaffen, daß gewisse der Koeffizienten c_j, d_j $(j = 1, 2, \ldots)$ Null sind für *alle* $\overset{\circ}{g} \in E$, so gelte dasselbe für die entsprechenden Koeffizienten a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots)$ aller $\overset{\circ}{f} \in E^*$. (Enthält also z. B. E nur Sinuskoeffizienten, so auch E^*.) Ist E ein BK-Raum, so ist auch E^* ein BK-Raum (Satz 2.1) und für $\overset{\circ}{f} \in E^*$ sei die Norm

$$\|f\|_{E^*} = \pi \sup_n \sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_E \leq 1} |\langle \overset{\circ}{f}\, s_n(\overset{\circ}{g}) \rangle| .$$

Dabei sei hier und entsprechend im folgenden

$$s_n(\overset{\circ}{g}) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cos jt + d_j \sin jt) .$$

10) Ist $E < P_\infty$ und E ein BK-Raum, so ist E_N die Untermenge von E, in der das trigonometrische Orthogonalsystem eine Basis bildet, oder gleichbedeutend: E_N ist die Untermenge von E, in der „Abschnittskonvergenz" (= AK) [27] vorhanden ist. Das heißt es ist genau dann $\overset{\circ}{f} \in E_N$, wenn $\overset{\circ}{f} \in E$ und

$$\lim_{n \to \infty} \|s_n(\overset{\circ}{f}) - \overset{\circ}{f}\|_E = 0$$

ist. Die Norm für Elemente in E_N sei dieselbe wie in E. Speziell ist also C_N der Raum der Funktionen, welche gleichmäßig konvergente FRn erzeugen. Ferner ist $L_{pN} = L_p (1 < p < \infty)$ [30; S. 153, 7.3 (i)] und wie man sich leicht überzeugt $L_{\infty N} = C_N$, sowie $V_N = A_N$.

11) Mit E^0 werden Räume bezeichnet, welche den Räumen $E = L_p (1 \leqq p \leqq \infty$, C, V und A sowie den zugehörigen Stieltjes-Räumen $d^n E$ gemäß der folgenden Festlegung zugeordnet sind: Es sei $L_p^0 (1 \leqq p \leqq \infty) = L_{p'}$, dabei sei der zu p konjugierte Exponent p' wie üblich festgelegt für $1 < p < \infty$ durch die Beziehung $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ und für $p = 1$ sei $p' = \infty$, für $p = \infty$ sei $p' = 1$. Ferner sei $C^0 = dV$, $V^0 = A^0 = dL_\infty$.

Wegen Beziehungen zwischen den Räumen E, E^* und E^0 sei hingewiesen auf Kapitel II, § 2.

Ist $d^n E$ ein den oben genannten Räumen E zugeordneter n-ter Stieltjes-Raum und $E^0 = d^n B$ (= n-ter Stieltjes-Raum eines Raumes B), so sei — im Einklang mit den obigen Festlegungen — $(d^n E)^0 = B$.

BEMERKUNGEN. 1. Es ist $dA = L$ und dV der Raum der Fourier-Stieltjes-Reihen [*30*; S. 16, 2.14].

2. Ist $E_1 \subset P_\infty$ und $E_2 \subset P_\infty$, so gilt offensichtlich: $E_1 \subset E_2$ impliziert $E_2^* \subset E_1^*$ und genau dann ist $E_1^* \subset dE_2$, wenn $(dE_1)^* \subset E_2$ ist.

Zwischen den definierten Räumen bestehen die folgenden Beziehungen

$$P \subset A_N = V_N \subset A \begin{Bmatrix} C_N \\ V \end{Bmatrix} = L_{\infty N} \subset C \Big\} \subset L_\infty \subset L_p N (1 < p < \infty)$$
$$= L_p \subset L_N \subset L = dA \subset dV \subset P_\infty.$$

VEREINBARUNGEN. 1. An Stelle von „Ist E einer der Räume $A, B, C, \ldots$ und E_1 einer der Räume $H, I, K, \ldots$, so gilt:", schreiben wir: „Für $E = A, B, C, \ldots$, $E_1 = H, I, K, \ldots$, gilt:".

2. Bei Funktionen $f(x, t)$ der zwei Veränderlichen x und t bedeute $f(x, \underline{t}) \in E$, daß $f(x, t) \in E$, wenn $f(x, t)$ als Funktion der einen Veränderlichen t betrachtet wird. x ist dann als Parameter zu betrachten. Entsprechendes gelte bei Unterstreichung von x oder wenn $\overset{\circ}{f}(x, t)$ eine Reihe mit zwei Veränderlichen ist.

§ 3. Übersicht

In § 4 wird gezeigt, daß die Festlegung $a_0 = 0$ und die Beschränkung auf Matrizen $\mathfrak{M}$ mit $a_{kj} = 0$ für $kj = 0$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$ keine wesentliche Einschränkung unserer Aussagen bewirkt.

In Kapitel II wird gezeigt, welche Räume als *BK*-Räume betrachtet werden können. Ferner werden hier Beziehungen zwischen den Räumen E_N^0, E^* und E^0 aufgezeigt. Besonderes Interesse verdient die Aussage: Ist $E = L_p (1 \leqq p < \infty)$, C, A, so ist genau dann $\overset{\circ}{f} \in E^*$, wenn $\| s_n(\overset{\circ}{f}) \|_{E^*} = O(1)$ $(n \to \infty)$ ist.

Kapitel III enthält einfache notwendige Bedingungen für $T \in (E, E_1)$ und die Darstellung der n-ten Teilsummen der transformierten Reihe (bzw. deren arithmetischer Mittel) durch einen dem Dirichlet-Integral (bzw. Fejér-Integral) entsprechenden Ausdruck.

In Kapitel IV werden hinreichende und zugleich notwendige Bedingungen für $T \in (E, E_1)$ in der Gestalt von Normbedingungen für alle möglichen Kombinationen der Räume $L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, C, V und A aufgestellt, insbesondere auch, wenn E_1 ein Raum mit AK ist. Das Beschränktheitsprinzip und das Grundmengenprinzip spielen dabei eine wesentliche Rolle. Die Normen $\sup_{\|f\|_E \leq 1} \| t_n f \|_{E_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der Operationen

$$t_n f = \sum_{k=1}^{n} (a_k' \cos kx + b_k' \sin kx) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

haben entsprechende Bedeutung wie die Lebesgueschen Konstanten. Verschiedene Darstellungen für diese Normen werden angegeben.

In Kapitel V werden Aussagen gemacht vom Typ: $T \in (E, E_1)$ impliziert $T^* \in (E_1^*, E^*)$ oder $T^* \in (E_1^*, E^0)$. Dabei wird benützt, daß das trigonometrische Orthogonalsystem in gewissen Räumen eine Basis oder wenigstens eine Toeplitz-Basis bildet. Schließlich wird auf die Verschärfung einiger Aussagen von F. H. YOUNG hingewiesen, welche unmittelbar aus unseren Sätzen folgen.

§ 4. Bemerkungen zu der Festlegung $a_{kj}=0$ für $kj=0$

$\mathfrak{M}$ enthält keine Elemente a_{k0}, a_{0j} $(k,j=0,1,2,\ldots)$, deshalb kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0=0$ angenommen werden und es ist $a_0'=0$.

Es sei nun die Frage beantwortet, inwiefern sich T mit $T\in(E,E_1)$ unterscheidet von einer Transformation $\tau\in(E,E_1)$ welche durch eine Matrix erzeugt wird, deren Elemente mit denen von $\mathfrak{M}$ übereinstimmen für $k,j\geqq 1$, welche aber außerdem Elemente a_{k0} und a_{0j} $(k,j=0,1,2,\ldots)$ enthält. Sonst sei τ entsprechend wie T definiert. Zur Transformation seien jetzt aber auch $\overset{\circ}{f}$ zugelassen mit $a_0\neq 0$. Die aufgeworfene Frage wird vollständig beantwortet durch die folgende Aussage:

Ist $E\subset P_\infty$, $E_1\subset P_\infty$ und sind E und E_1 lineare Räume, so gilt: Dann und nur dann ist $\tau\in(E,E_1)$, wenn die folgenden 3 Bedingungen zugleich erfüllt sind.

1. $T\in(E,E_1)$,

2. $a_0'=\sum_{j=0}^{\infty} a_{0j}a_j$ *existiert für jedes* $\overset{\circ}{f}=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos jt+b_j\sin jt)\in E$.

3. $\tau\frac{a_0}{2}=\frac{a_{00}a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_0a_{k0}\cos kx\in E_1$.

BEWEIS. Sind die 3 Bedingungen erfüllt, so ist für jedes

$$\overset{\circ}{f}=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos jt+b_j\sin jt)\in E$$

$$\tau\overset{\circ}{f}=\frac{a_0'}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[a_{k0}a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}a_j\right]\cos kx+b_k'\sin kx\right\}$$

$$=\frac{a_0'}{2}+a_0\sum_{j=1}^{\infty}a_{k0}\cos kx+\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}\in E_1.$$

Also ist $\tau\in(E,E_1)$.

Ist umgekehrt $\tau\in(E,E_1)$, dann ist auch $T\in(E,E_1)$, denn T ist eine spezielle τ-Transformation und die Bedingungen 2. und 3. sind auch erfüllt.

Auf Grund der eben bewiesenen Aussage bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir für alles Folgende $a_{kj}=0$ für $kj=0$ $(k,j=0,1,2,\ldots)$ und $a_0=0$ voraussetzen.

Kapitel II. Funktionalanalytische Grundlagen

§ 1. Die Räume L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$, C, V, A und die komplementären Räume als BK-Räume. T als linearer und stetiger Operator

Ein *BK*-Raum ist ein Banach-Raum der aus Stellen (= Zahlenfolgen) $\xi=\{x_k\}$ besteht und in dem die Abbildungen $\xi\to x_k$ $(k=1,2,\ldots)$ linear und stetig sind (es ist also koordinatenweise Konvergenz vorhanden).

Wir modifizieren den Begriff des *BK*-Raumes nur unwesentlich, wenn wir auch einen Folgenraum mit Folgen deren Elemente Zahlenpaare a_j, b_j $(j=1,2,\ldots)$ sind, als *BK*-Raum bezeichnen, wenn der mit solchen Folgen

gebildete Raum alle für *BK*-Räume sonst charakteristischen Eigenschaften besitzt.

SATZ 2.1. *Ist* $E \subset P_\infty$ *und* E *ein BK-Raum, so ist auch* E^* *ein BK-Raum.*

BEWEIS. Offensichtlich sind die Räume E^* lineare Räume. Ferner ist für $0 \neq \mathring{f} \in E^*$ $0 < \|\mathring{f}\|_{E^*} < \infty$, denn

$$\sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} |\langle \mathring{f} s_n(\mathring{g})\rangle| = \sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} |\langle s_n(\mathring{f})\, \mathring{g}\rangle| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist die Norm der linearen und stetigen Funktionale $\varphi_n(\mathring{g}) = \langle s_n(\mathring{f})\, \mathring{g}\rangle$ $(\mathring{g} \in E)$ [26; S. 471, Satz 4.4a)]. Wegen der Konvergenz der Folge dieser Funktionale $(n \to \infty)$ für jedes $\mathring{g} \in E$ ist aber nach dem Beschränktheitsprinzip (= Satz von BANACH und STEINHAUS) [3; S. 80, th. 5] oder [30; S. 98] die Folge der Normen dieser Funktionale beschränkt, d.h. $\|\mathring{f}\|_{E^*} < \infty$.

Ferner ist für jedes reelle a $\|a\mathring{f}\|_{E^*} = |a| \|\mathring{f}\|_{E^*}$ und für $\mathring{f} \in E^*$, $\mathring{h} \in E^*$ ist $\|\mathring{f} + \mathring{h}\|_{E^*} \leq \|\mathring{f}\|_{E^*} + \|\mathring{h}\|_{E^*}$; $\|\mathring{f}\|_{E^*} = 0$ impliziert $\mathring{f} = 0$, d.h. für $\mathring{f} = (a_j, b_j)$ ist $a_j = b_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Damit ist gezeigt, daß $\|\mathring{f}\|_{E^*}$ alle Eigenschaften einer Norm besitzt.

Die Vollständigkeit des Raumes E^* ergibt sich so: Sei $\{\mathring{f}_n\} = \{a_j^n, b_j^n)\} \in E^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\lim_{m > n \to \infty} \|\mathring{f}_m - \mathring{f}_n\|_{E^*} = 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$, so daß für alle $n, m > N$ und $\mathring{g} = (c_j, d_j) \in E$

$$(1) \qquad \|\mathring{f}_m - \mathring{f}_n\|_{E^*} = \pi \sup_k \sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{k} (a_j^m - a_j^n)\, c_j + (b_j^m - b_j^n)\, d_j \right| < \varepsilon$$

ist.

Durch Spezialisierung von $\mathring{g}$ auf $\mathring{g} = c_j \cos jt$ $(j = 1, 2, \ldots)$ bzw. $\mathring{g} = d_j \sin jt$ $(j = 1, 2, \ldots)$ ergibt sich die Existenz von $\lim_{n \to \infty} a_j^n = a_j$ und $\lim_{n \to \infty} b_j^n = b_j$ für $j = 1, 2, \ldots$. Mit $\mathring{f} = (a_j, b_j)$ folgt damit aus (1) für jedes $k = 1, 2, \ldots$ und alle $n > N$

$$(2) \qquad \varepsilon \geqq \pi \sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{k} [(a_j^n - a_j)\, c_j + (b_j^n - b_j)\, d_j] \right|.$$

Also ist auch für alle $n > N$

$$(3) \qquad \varepsilon \geqq \pi \sup_k \sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{k} [(a_j^n - a_j)\, c_j + (b_j^n - b_j)\, d_j] \right| = \|\mathring{f}_n - \mathring{f}\|_{E^*}.$$

Daraus folgt $\mathring{f} \in E^*$, denn Divergenz der Folge $\{\langle s_k(\mathring{f})\, \mathring{g}\rangle\}$ für ein $\mathring{g} \in E$ mit $\|\mathring{g}\|_E \leqq 1$ ist unmöglich, da für jedes $\bar{k} = 1, 2, \ldots$ und alle $n > N$ wegen (3)

$$\varepsilon \geqq \pi \sup_{\|\mathring{g}\|_E \leq 1} |\langle s_{\bar{k}}(\mathring{f}_n - \mathring{f})\, \mathring{g}\rangle| \geqq \pi |s_{\bar{k}}(\mathring{f}_n - \mathring{f})\, \mathring{g}\rangle|$$

$$\geqq \pi \|\langle s_{\bar{k}}(\mathring{f}_n)\, \mathring{g}\rangle| - |\langle s_{\bar{k}}(\mathring{f})\, \mathring{g}\rangle|\|$$

ist, und $\lim_{k \to \infty} \langle s_k(\mathring{f}_n)\, \mathring{g}\rangle$ existiert wegen $\mathring{f}_n \in E^*$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Also ist E^* vollständig.

Die koordinatenweise Konvergenz ergibt sich für E^* mit $\overset{\circ}{f}_n=(a_j^n, b_j^n)\in E^*$ und $\overset{\circ}{f}\in E^*$ aus

$$|a_j^n - a_j| = |\langle(\overset{\circ}{f}_n - \overset{\circ}{f})\cos jt\rangle| \leqq \frac{1}{\pi}\|\overset{\circ}{f}_n - \overset{\circ}{f}\|_{E^*}\|\cos jt\|_E \tag{4}$$

wenn $\overset{\circ}{f}$ Kosinuskoeffizienten enthält, und aus

$$|b_j^n - b_j| = |\langle(\overset{\circ}{f}_n - \overset{\circ}{f})\sin jt\rangle| \leqq \frac{1}{\pi}\|\overset{\circ}{f}_n - \overset{\circ}{f}\|_{E^*}\|\sin jt\|_E \tag{5}$$

wenn $\overset{\circ}{f}$ Sinuskoeffizienten enthält.

Also ist E^* ein BK-Raum.

FOLGERUNG. Bekanntlich sind die Funktionenräume $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ C, V und A mit den angegebenen Normen Banach-Räume. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Räume wie angegeben als Faktorräume betrachtet werden oder nicht [25; S. 99]. Damit sind diese Räume betrachtet als Fourier-Koeffizientenräume ebenfalls Banach-Räume. Sie sind offensichtlich auch BK-Räume, wie sich mit $\overset{\circ}{f}_n=(a_j^n, b_j^n)\in E$ und $f\in E$ aus zu (4) und (5) analogen Ungleichungen ergibt. Dabei sind nur die dort auftretenden E^*-Normen durch E-Normen und die dortigen E-Normen durch E^0-Normen zu ersetzen (vgl. Höldersche Ungleichung).

Daraus folgt, daß die Räume $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, C, V und A BK-Räume sind, also sind es nach Satz 2.1 auch ihre komplementären Räume E^*. — Offensichtlich ist für einen BK-Raum E mit $E<P_\infty$ auch jeder zugeordnete Stieltjes-Raum d^nE $(n=1, 2, \ldots)$ ein BK-Raum.

Im wesentlichen bekannt ist die Aussage von

HILFSSATZ 2.1. *Sind E und E_1 BK-Räume mit $E<P_\infty$ und $E_1<P_\infty$, so gilt:*

a) Ist $T\in(E, E_1)$, so ist T linear und stetig.

b) Ist $T\in(E, E_{1N})$, so ist T linear und stetig.

BEWEIS. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem bekannten Satz: Jede Matrixtransformation zwischen BK-Räumen ist stetig [26; S. 471, Satz 4.4c)] (Jeder BK-Raum ist ein FK-Raum bei dem sich die abzählbar vielen Halbnormen auf eine Norm reduzieren). (Vgl. auch [11; Satz 3] und [19; Satz 1].)

Im Fall b) sind wohl die Räume E_{1N} möglicherweise keine BK-Räume, jedoch ist die Behauptung klar wegen $(E, E_{1N})<(E, E_1)$ und der Tatsache, daß die Norm in E_{1N} die gleiche ist wie in E_1.

§ 2. Einige Eigenschaften der Räume E^0 und E^*

Die Räume E^0 lassen sich einerseits in manchen Fällen identifizieren mit dem zu E dualen Raum (z.B. für $E=L_p(1\leqq p<\infty)$, C, A), andererseits bilden die Untermengen $E^*<E^0$ in manchen Fällen eine normbestimmende Mannigfaltigkeit für E. Wir verwenden diese bekannten Tatsachen in dem nachfolgenden Hilfssatz, bei dessen Beweis wir uns im ersten Teil mit Literaturhinweisen begnügen.

HILFSSATZ 2.2. 1. *Für* $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, C, A *und die zugeordneten Stieltjes-Räume gilt: Es ist* $E^*\subset E^0$ *und für* $\overset{\circ}{f}\in E$ *und* $\overset{\circ}{g}\in E^*$ *ist*

a) $$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{f}\|_E\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|=\|\overset{\circ}{g}\|_{E^*}.$$

b) $$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_{E^*}\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|=\|\overset{c}{f}\|_E.$$

2. *Es ist* $V^*\subset V^0$, *und a) und b) sind gültig für* $\overset{\circ}{f}\in E=V$ *und* $\overset{\circ}{g}\in(dC\cap V^*)$.

BEWEIS. 1. a) $L_p^*\subset L_p^0=L_{p'}$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ folgt aus Sätzen von ORLICZ und STEINHAUS [7; S. 220] und die Aussage a) im Fall $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ aus der Parsevalschen Gleichung [30; S. 88] und [25; S. 71, 72]. Entsprechend ergeben sich diese Aussagen auch für $E=A$ wegen $L=dA$.

$C^*\subset dV$ folgt aus einem Satz von F. RIESZ und einer bekannten hinreichenden Bedingung für $\overset{\circ}{g}\in dV$ [17; S. 120, 121] und [30; S. 82]. Die Aussage a) im Fall $E=C$ ergibt sich wieder aus [30; S. 88] und [3; S. 60].

b) Die Gültigkeit von b) für $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ also auch $E=A$ folgt aus a) wegen $(L_p^0)^0=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, denn für $\overset{\circ}{f}\in L_p(1<p\leqq\infty)$, $\overset{\circ}{g}\in L_p^*$, $\overset{\circ}{h}\in L_{p'}$, $w\in P$ also $w\in L_p^*$ ist

$$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_{p'}\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|=\sup_{\|g\|_{p'}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f g\,dt\right|\leqq\sup_{\|h\|_{p'}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f h\,dt\right|=\|f\|_p$$

[25; S. 71, 72]. Andererseits ist wegen $P\subset L_p^*$ und da P dicht ist in $L_{p'}$ $(1\leqq p'<\infty)$ [1; S. 37]

$$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_{p'}\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|\geqq\pi\sup_{\|w\|_{p'}\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{w}\rangle|=\sup_{\|w\|_{p'}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f w\,dt\right|$$

$$=\sup_{\|h\|_{p'}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f h\,dt\right|=\|f\|_p.$$

Im Fall $E^0=L_\infty$ ist mit $f\in L$, $\overset{\circ}{g}\in L^*$, $h\in L_\infty$, $w\in P$, $x\in C$

$$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_\infty\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|=\sup_{\|g\|_\infty\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f g\,dt\right|\leqq\sup_{\|h\|_\infty\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f h\,dt\right|=\|f\|_L$$

und

$$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_\infty\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|\geqq\pi\sup_{\|w\|_\infty\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{w}\rangle|=\sup_{\|w\|_\infty\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f w\,dt\right|$$

$$=\sup_{\|x\|_\infty\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f x\,dt\right|=\|f\|_L$$

woraus die Beziehung b) für $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ folgt.

Für $E=C$, $f\in C$, $g\in C^*$, $H\in P$, $w\in L$, $X\in V$ ist

$$\pi\sup_{\|\overset{\circ}{g}\|_{BV}\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle|\equiv\sup_{\|G\|_{BV}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f\,dG\right|\geqq\sup_{\|H\|_{BV}\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f\,dH\right|\equiv\sup_{\|h\|_L\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f h\,dt\right|$$

$$=\sup_{\|w\|_L\leq 1}\left|\int_0^{2\pi}f w\,dt\right|=\|f\|_C$$

und

$$\pi \sup_{\|\mathring{g}\|_{dV} \leq 1} |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| \equiv \sup_{\|G\|_V \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} f\,dG \right| \leq \sup_{\|X\|_V \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} f\,dX \right| \leq \|f\|_C,$$

also ist b) auch richtig für $E = C$.

2. a) Es ist $V^* \subset dL_\infty = V^0$ wegen $V^* \subset A^* \subset dL_\infty$.

Ist $\mathring{f} \in V$ und $\mathring{g} \in (dC \cap V^*)$, so ist

$$\pi \sup_{\|\mathring{f}\|_V \leq 1} |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| \equiv \sup_{\|f\|_V \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} G\,df \right| = \|G\|_C = \|\mathring{g}\|_{dC} = \|\mathring{g}\|_{dL_\infty} = \|\mathring{g}\|_{V^0}.$$

b) Ist $f \in V$, $g \in (dC \cap V^*)$, $G \in C$, so gilt

$$\pi \sup_{\|\mathring{g}\|_{dL_\infty} \leq 1} |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| = \pi \sup_{\|\mathring{g}\|_{d\sigma} \leq 1} |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| \leq \sup_{\|G\|_\sigma \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} G\,df \right| = \|f\|_V$$

und mit $H \in P$, $G \in (dV^* \cap C)$ ist — da P dicht ist in C —

$$\pi \sup_{\|\mathring{g}\|_{d\sigma} \leq 1} |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| = \sup_{\|G\|_\sigma \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} G\,df \right| \geq \sup_{\|H\|_\sigma \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} H\,df \right|$$

$$= \sup_{\|G\|_\sigma \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} G\,df \right| = \|f\|_V.$$

Also ist b) auch in diesem Fall richtig. Die Richtigkeit der Aussagen für die zugeordneten Stieltjes-Räume ist klar auf Grund der Definition der Norm in diesen Räumen.

FOLGERUNG. Ist $E = L_p (1 \leq p \leq \infty)$, C, V, A oder ein diesen Räumen zugeordneter Stieltjes-Raum, so ist für $\mathring{f} \in E^*$

$$\|\mathring{f}\|_E = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{E^*}$$

speziell also

$$\|\mathring{f}\|_{L_p^*} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{p'} \qquad (1 \leq p \leq \infty)$$

$$\|\mathring{f}\|_{C^*} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{dV} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_L$$

$$\|\mathring{f}\|_{V^*} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{dL_\infty} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{dC}$$

$$\|\mathring{f}\|_{A^*} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{dL_\infty} = \sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_{dC}.$$

BEMERKUNG. Für die in Hilfssatz 2.2 vorausgesetzten Räume E ist mit $\mathring{f} \in E$ und $\mathring{g} \in E^*$ im Fall $E \neq V$ und $\mathring{f} \in V$, $\mathring{g} \in (dC \cap V^*)$ im Fall $E = V$

$$\pi |\langle \mathring{f}\mathring{g}\rangle| \leq \|\mathring{f}\|_E \|\mathring{g}\|_{E^*}. \tag{1}$$

Für $E = L_p (1 \leq p \leq \infty)$ entspricht (1) der Hölderschen Ungleichung, für $E = C$ oder V einer bekannten Ungleichung für Stieltjes-Integrale. Für $E = A$

folgt (1) aus (1) im Fall $E=L$. Daß (1) nun auch für die zugeordneten Stieltjes-Räume gilt, ist klar.

SATZ 2.2. *Für $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, C, V, A und die zugeordneten Stieltjes-Räume gilt: Es ist*

$$(E^0)_N\subset E^*\subset E^0.$$

BEWEIS. $E^*\subset E^0$ wurde in Hilfssatz 2.2 bewiesen und $(E^0)_N\subset E^*$ folgt mit $\overset{\circ}{f}\in(E^0)_N$ und $\overset{\circ}{g}\in E$ aus

$$|\langle s_n(\overset{\circ}{f})\,\overset{\circ}{g}\rangle-\langle s_m(\overset{\circ}{f})\,\overset{\circ}{g}\rangle|\leqq\|s_n(\overset{\circ}{f})-s_m(\overset{\circ}{f})\|_{E^*}\|\overset{\circ}{g}\|_E=o(1)\qquad(m>n\to\infty),$$

so daß $\langle\overset{\circ}{f}\,\overset{\circ}{g}\rangle$ für jedes $\overset{\circ}{g}\in E$ existiert, was $\overset{\circ}{f}\in E^*$ impliziert.

BEMERKUNGEN. Satz 2.2 enthält im Fall $E=V$ eine Verbesserung einer Aussage von W. H. YOUNG [*23*; S. 453, 454 th. 2], [*30*; S. 91, 4.44], [*1*; S. 97], welche die Existenz von $\langle\overset{\circ}{f}\,\overset{\circ}{g}\rangle$ für $\overset{\circ}{f}\in L$ und $\overset{\circ}{g}\in V$ behauptet, während hierfür nach Satz 2.2 schon $\overset{\circ}{f}\in(dC)_N$ genügt. Es ist aber L eine echte Untermenge von $(dC)_N$, denn es ist $L=dA\subset(dC)_N$ wegen $A\subset C_N$ [*30*; S. 27, 2.621] und $(C\cap V)\subset C_N$ [*30*; S. 25, 2.6], aber $(C\cap V)\not\subset A$, denn es gibt $\overset{\circ}{h}\in(C\cap V)$ mit Fourier-Koeffizienten $\neq o\left(\frac{1}{j}\right)(j\to\infty)$ [*30*; S. 293, 11.52], so daß $\overset{\circ}{h}\notin A$ [*30*; S. 18, 2.212]. Also ist $L\neq(dC)_N$.

SATZ 2.3. *Ist $E\subset P_\infty$, E ein BK-Raum, $(E\cap P)$ dicht in E und $\overset{\circ}{f}\in P_\infty$, so gilt: Genau dann ist $f\in E^*$, wenn* $\sup\limits_n\sup\limits_{\|\overset{\circ}{g}\|_E\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\,s_n(\overset{\circ}{g})\rangle|<\infty$ *ist.*

BEWEIS. Sind die Voraussetzungen erfüllt, so existiert für jedes $g\in(P\cap E)$

$$\lim_{n\to\infty}\langle s_n(\overset{\circ}{f})\,\overset{\circ}{g}\rangle.\tag{1}$$

Ist nun $\sup\limits_n\sup\limits_{\|\overset{\circ}{g}\|_E\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\,s_n(\overset{\circ}{g})\rangle|<\infty$, so sind die Normen der linearen, stetigen Funktionale

$$\varphi_n(\overset{\circ}{g})=\langle s_n(\overset{\circ}{f})\,\overset{\circ}{g}\rangle\qquad(\overset{\circ}{g}\in E)$$

beschränkt für $n\to\infty$.

Da $(E\cap P)$ dicht ist in E, folgt daraus zusammen mit (1) nach dem Grundmengenprinzip [*3*; S. 79, th. 3] auch die Existenz des Limes (1) für jedes $\overset{\circ}{g}\in E$, so daß $\overset{\circ}{f}\in E^*$ ist.

Die Umkehrung, d.h. $\overset{\circ}{f}\in E^*$ impliziert $\sup\limits_n\sup\limits_{\|\overset{\circ}{g}\|_E\leq 1}|\langle\overset{\circ}{f}\,s_n(\overset{\circ}{g})\rangle|<\infty$ ist klar auf Grund der Definition der Norm in E^*.

FOLGERUNGEN. 1. Da P dicht ist in den *BK*-Räumen $L_p(1\leqq p<\infty)$, C, A [*1*; S. 37 und 32] gilt (vgl. die Folgerung nach Hilfssatz 2.2):

Dann und nur dann ist $\overset{\circ}{f}\in L_p^*(1\leqq p<\infty)$, C^*, A^*, wenn beziehentlich $\sup\limits_n\|s_n(\overset{\circ}{f})\|_{p'}<\infty$, $\sup\limits_n\|s_n(\overset{\circ}{f})\|_L<\infty$ oder $\sup\limits_n\|s_n(\overset{\circ}{f})\|_{dC}<\infty$ ist.

2. Daraus folgt weiter, daß einige der in den Arbeiten [8], [10], [4] für Multiplikatoren angegebenen Bedingungen auch in der folgenden Form geschrieben werden können: Für eine Transformation T_M mit Multiplikatoren ($\mathfrak{M}$ = Diagonalmatrix!) d.h.

$$a_{kj} = \begin{cases} \lambda_k & \text{für } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k, j = 1, 2, \ldots)$$

gilt mit

$$\overset{\circ}{K}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kt.$$

1. Für $E = L_p (1 \leqq p < \infty)$, C ist genau dann $T_M \in (E, C_N)$, wenn $\overset{\circ}{K} \in E^*$ ist.

2. Genau dann ist $T_M \in (L, L_N)$, wenn $\overset{\circ}{K} \in C^*$ ist. (Nur am Rande sei folgendes vermerkt: Nach TOMIĆ [20] ist die mit $\lambda_k = \frac{1}{\lg k}$ gebildete Transformation $T_M \in (C, C_N)$, also auch in (L, L_N) [4; Satz 3]. Daraus folgt eine Ergänzung eines Satzes von HARDY [5], [30; S. 59, 3.71]: Ist $\overset{\circ}{f} \in L$, $\overset{\circ}{f} = (a_j, b_j)$, so ist $T_M \overset{\circ}{f} = \left(\frac{a_k}{\lg k} \cdot \frac{b_k}{\lg k} \right) \in L_N$).

BEMERKUNG. Aus Sätzen von K. ZELLER [27; S. 58, Satz 2.1 und S. 60, Satz 3.4] folgt unmittelbar, daß der BK-Raum E mit $P < E < P_\infty$ genau dann AK besitzt, wenn mit $\overset{\circ}{f} = (a_j, b_j) \in E$ jedes lineare, stetige Funktional in E darstellbar ist in der Gestalt $\varphi(\overset{\circ}{f}) = \langle \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{g} \rangle$ mit $\overset{\circ}{g} = (\varphi(\cos jt), \varphi(\sin jt))$. Da z.B. $E = L_p (1 < p < \infty)$ AK besitzt [30; S. 153, 7.3 (i)], ist also — wie bekannt auf Grund anderer Schlüsse — $\varphi(\overset{\circ}{f}) = \langle \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{g} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f g \, dt$ mit $g \in E^* = L_{p'}$, das allgemeine, lineare und stetige Funktional in $L_p (1 < p < \infty)$ (vgl. [17; S. 78], [3; S. 64]).

Es erhebt sich die Frage, ob bei den in Satz 2.2 bewiesenen Inklusionen nicht Fälle enthalten sind, in denen $E^* = E^0$ oder $E^* = (E^0)_N$ gilt. Für $E = L_p (1 < p < \infty)$ gilt dies bekanntlich [30; S. 153, 7.3 (i)]. Für die anderen Räume gilt

SATZ 2.4.

1) *Es ist* $C \not\subset L^* \not\subset C$, *also auch* $(L^0)_N \neq L^* \neq L^0$.
2) *Es ist* $L \not\subset L^*_\infty$, *also* $L^0_\infty \neq L^*_\infty$.
3) *Es ist* $L \not\subset C^* \not\subset L_N$, *also auch* $(C^0)_N \neq C^* \neq C^0$.
4) *Es ist* $dC \not\subset V^* \not\subset dC$, *also auch* $(V^0)_N \neq V^* \neq V^0$.
5) *Es ist* $dC \not\subset A^* \not\subset dC$, *also auch* $(A^0)_N \neq A^* \neq A^0$.

BEWEIS. 1) Nach Satz 2.3 ist genau dann $\overset{\circ}{f} \in L^*$, wenn gilt

$$\sup_n \| s_n(\overset{\circ}{f}) \|_C < \infty. \tag{1}$$

(1) ist aber schon für $\overset{\circ}{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin jt}{j} \notin C$ erfüllt, andererseits ist (1) auch nicht für alle $\overset{\circ}{f} \in C$ erfüllt [30; S. 170, 8.14]. Daraus folgt die Behauptung.

2) Es ist $L \not\subset L_\infty^*$, wegen $L \not\subset C^*$ (s. 3)).

3) Wäre $L \subset C^*$, so wäre $\|s_n(\overset{\circ}{f})\|_L = O(1)$ $(n \to \infty)$ für jedes $\overset{\circ}{f} \in L$. Dies würde jedoch AK in L implizieren, denn P ist dicht in dem *BK*-Raum L (= Abschnittsdichte ist vorhanden!) [*27*; S. 59, 60, Satz 3.3]. Bekanntlich ist jedoch in L keine AK vorhanden [*30*; S. 110 (2)].

Wäre $C^* \subset L_N$, so wäre die Bedingung, welche hinreichend ist für $\overset{\circ}{f} \in C^*$ (Satz 2.3, Folgerungen) auch hinreichend für $\overset{\circ}{f} \in L_N$, was nicht der Fall ist [*30*; S. 110 (2)].

4) Es ist $dC \not\subset V^*$, wegen $dC \not\subset A^*$, denn nach 1) ist $C \not\subset (dA)^* = L^*$.

Daß $V^* \not\subset dC$ ist, zeigt das Beispiel $\overset{\circ}{f}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos j(t-x)$, denn $\overset{\circ}{f}(x, \underline{t}) \in V^*$ für jedes feste $x \in [0, 2\pi]$, weil

$$\langle \overset{\circ}{f}(x, \underline{t})\, \overset{\circ}{g}(t) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (c_j \cos jx + d_j \sin jx) = \overset{\circ}{g}$$

für jedes $\overset{\circ}{g} = (c_j, d_j) \in V$ und jedes feste x eine konvergente Reihe darstellt. Andererseits ist $\overset{\circ}{f}(x, \underline{t}) \notin dC$, da die gliedweise integrierte Reihe $\notin C$ ist.

Kapitel III. Notwendige Zeilen- und Spalteneigenschaften von $\mathfrak{M}$ für $T \in (E, E_1)$. Teilsummendarstellungen

§ 1. Notwendige Zeilen- und Spalteneigenschaften von $\mathfrak{M}$ für $T \in (E, E_1)$

Ist $\overset{\circ}{g}_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \cos jt$, $\overset{\circ}{h}_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \sin jt$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so ist folgende Aussage klar auf Grund der Definition der transformierten Koeffizienten und derjenigen der Räume E^*.

Satz 3.1. *Für $P \subset E \subset P_\infty$ gilt: Genau dann ist $T \in (E, P_\infty)$, d.h. T auf E anwendbar, wenn $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist.*

Während so der Raum der Folgen, gebildet aus den Elementen jeweils einer Zeile von $\mathfrak{M}$ die Anwendbarkeit von T auf einen gewissen Raum E bestimmt, ist der Raum der Folgen gebildet aus den Elementen jeweils einer Spalte von $\mathfrak{M}$, wesentlich für die Wirksamkeit von T in einen gewissen Raum E_1. Mit $\overset{\circ}{p}_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \cos kx$, $\overset{\circ}{q}_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \sin kx$ $(j = 1, 2, \ldots)$, wird dies ausgedrückt in

Satz 3.2. *Ist $P \subset E \subset P_\infty$, $P \subset E_1 \subset P_\infty$ und E_1 ein linearer Raum, so gilt: Aus $T \in (E, E_1)$ folgt $\overset{\circ}{p}_j, \overset{\circ}{q}_j \in E_1$ und genau dann ist $T \in (P, E_1)$, wenn $\overset{\circ}{p}_j$, $\overset{\circ}{q}_j \in E_1$ $(j = 1, 2, \ldots)$.*

Beweis. Sind die Voraussetzungen erfüllt und ist $T \in (E, E_1)$, so ist, für $f = \cos jt$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $f \in E$ und $\overset{\circ}{T} f = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \cos kx = \overset{\circ}{p}_j \in E_1$. Entsprechend ergibt sich mit $f = \sin jt$ auch $\overset{\circ}{q}_j \in E_1$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Bei der zweiten Aussage ist noch zu zeigen, daß $T \in (P, E_1)$ aus $\overset{\circ}{p}_j, \overset{\circ}{q}_j \in E_1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt.

Seien $\mathring{p}_j, \mathring{q}_j \in E_1$ $(j=1, 2, \ldots)$ und $f \in P$ ein Polynom n-ten Grades. Wegen

$$t_m f \equiv \sum_{k=1}^{m} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} a_j \cos kx + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_j \sin kx \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \cos kx + b_j \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sin kx \right)$$

ist dann

$$\mathring{T} f = \sum_{j=1}^{n} (a_j \mathring{p}_j + b_j \mathring{q}_j) \in E_1.$$

Also ist $T \in (P, E_1)$.

§ 2. Einfache Eigenschaften der transponierten Transformation T^*

T^* sei die Transformation, welche durch die zu $\mathfrak{M}$ transponierte Matrix $\mathfrak{M}^*$ erzeugt wird. Mit $a^*_{kj} = a_{kj}$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$ ist rein formal

$$\mathring{T}^* \mathring{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a^*_{kj} a_j \cos kx + \sum_{j=1}^{\infty} a^*_{kj} b_j \sin kx \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a'^*_k \cos kx + b'^*_k \sin kx)$$

mit

$$a'^*_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} a_j, \quad b'^*_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} b_j \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ferner sei

$$\mathring{g}^*_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \cos jx = \mathring{p}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathring{h}^*_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \sin jx = \mathring{q}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathring{p}^*_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \cos kt = \mathring{g}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathring{q}^*_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \sin kt = \mathring{h}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Aus den Sätzen 3.1 und 3.2 folgt

SATZ 3.3. *Ist $P \subset E \subset P_\infty$, $P \subset E_1 \subset P_\infty$ und sind E und E_1 lineare Räume, so gelten die beiden folgenden Aussagen:*

a) Genau dann ist $T \in (E, P_\infty)$, wenn $T^* \in (P, E^*)$.

b) Aus $T \in (P, E_1)$ folgt $T^* \in (E_1^*, P_\infty)$.

BEWEIS. a) Genau dann ist $T \in (E, P_\infty)$, wenn $\mathring{g}_k = \mathring{p}^*_k \in E^*$ und $\mathring{h}_k = \mathring{q}^*_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (Satz 3.1). Dies ist aber nach Satz 3.2 hinreichend und notwendig für $T^* \in (P, E^*)$.

b) Diese Aussage ergibt sich entsprechend aus Satz 3.2 und Satz 3.1. [Für $E_1 = L_p (1 < p < \infty)$ ist die Aussage b) wegen $L_p = (L_p^*)^* (1 < p < \infty)$ sogar umkehrbar.]

§ 3. Teilsummendarstellungen für die transformierte Reihe

Ist T auf einen gewissen Raum E anwendbar, so ist für $\overset{\circ}{f} \in E$ und $n = 1, 2, \ldots$

$$t_n \overset{\circ}{f} \equiv \sum_{k=1}^{n} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} a_j \cos kx + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} b_j \sin k \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cos kx + b_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \sin kx \right\},$$

also

$$t_n \overset{\circ}{f} = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j p_{nj} + b_j q_{nj})$$

mit

$$p_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cos kx, \quad q_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \sin kx \qquad (n, j = 1, 2, \ldots).$$

Entsprechend ist für $n = 1, 2, \ldots$

$$T_n \overset{\circ}{f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j P_{nj} + b_j Q_{nj})$$

mit

$$P_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} a_{kj} \cos kx, \quad Q_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} a_{kj} \sin kx \quad (n, j = 1, 2, \ldots).$$

DEFINITIONEN. Es sei

$$\overset{\circ}{D}_n(x, t) = \overset{\circ}{T}{}^* \delta_n(x, t), \quad \text{wobei} \quad \delta_n(x, t) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)\right]}{2 \sin \frac{x-t}{2}} - \frac{1}{2}$$

der Dirichlet-Kern ist (die unwesentliche Zahl $\frac{1}{2}$ ist bedingt durch unsere Festlegung $a_0 = 0$ — ebenso unten —) und $\overset{\circ}{L}_n(x, t) = \overset{\circ}{T}{}^* \gamma_n(x, t)$, wobei

$$\gamma_n(x, t) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\sin (n+1) \left(\frac{x-t}{2} \right)}{\sin \frac{x-t}{2}} \right)^2 - \frac{1}{2}$$ der Fejér-Kern ist.

SATZ 3.4. *Für die jeweils unten vorausgesetzten Räume sei* $\overset{\circ}{f} \in E$ *und* $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *dann gilt:*

1) *Für* $P < E < P_\infty$ *ist* $t_n \overset{\circ}{f} = \langle \overset{\circ}{D}_n(x, t) \overset{\circ}{f}(t) \rangle$

und

$$\overset{\circ}{D}_n(x, t) = \left(p_{nj}(x), q_{nj}(x) \right) \in E^*,$$

sowie

$$T_n \overset{\circ}{f} = \langle \overset{\circ}{L}_n(x, t) \overset{\circ}{f}(t) \rangle$$

und

$$\mathring{L}_n(x, \underline{t}) = (P_{nj}(x), Q_{nj}(x)) \in E^*.$$

2) *Für* $E = L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$ *ist*

$$t_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x, \underline{t})\, dt$$

und

$$T_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, L_n(x, \underline{t})\, dt.$$

Für $E = C$ *ist*

$$t_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, d_t \vartheta_n(x, t),$$

mit $\mathring{\vartheta}'_n(x, t) = \mathring{D}_n(x, t)$, *wobei der Ableitungsstrich gliedweise Differentiation bezeichnen soll, und*

$$T_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, d_t \mathfrak{L}_n(x, t) \quad \text{mit} \quad \mathring{\mathfrak{L}}'_n(x, t) = \mathring{L}_n(x, t).$$

BEWEIS. 1) Nach den Vorbemerkungen ist nur noch zu zeigen, daß $(p_{nj}(x), q_{nj}(x)) = \mathring{D}_n(x, \underline{t})$ und $\mathring{D}_n(x, \underline{t}) \in E^*$ ist und Entsprechendes für $\mathring{L}_n(x, \underline{t})$.

Wegen $\mathring{g}_k, \mathring{h}_k \in E^* (k = 1, 2, \ldots)$ ist $T \in (E, P_\infty)$ (Satz 3.1), also $T^* \in (P, E^*)$ (Satz 3.3), so daß wegen $\delta_n(x, \underline{t}) \in P$ $T^* \delta_n(x, \underline{t}) = \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \in E^*$ ist.

Nun ist $\delta_n(x, t) = (\cos jx, \sin jx)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, also

$$\begin{aligned}
\mathring{D}_n(x, \underline{t}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{j=1}^{n} a^*_{kj} \cos jx \cos kt + \sum_{j=1}^{n} a^*_{kj} \sin jx \sin kt \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cos kx \cos jt + \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \sin kx \sin jt \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_{nj}(x) \cos jt + q_{nj} \sin jt \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung (vgl. Vorbemerkungen): $t_n \mathring{f} = \langle \mathring{D}_n(x, \underline{t})\, \mathring{f}(t) \rangle$. Entsprechend ergibt sich die Behauptung für $T_n \mathring{f}$.

2) Die Darstellbarkeit mit einem Integral folgt aus der Parsevalschen Gleichung für diese Räume [*30*; S. 88].

Kapitel IV. Notwendige und hinreichende Normbedingungen für $T \in (E, E_1)$. Verschiedene Normdarstellungen

Sind E und E_1 normierte Räume, $E \subset P_\infty$, $E_1 \subset P_\infty$, ist ferner $T \in (E, P_\infty)$, $\mathring{f} \in E$ und wird untersucht, ob $T \in (E, E_1)$ ist, so seien $||t_n||_{E E_1} = \sup_{||\mathring{f}||_E \leq 1} ||t_n \mathring{f}||_{E_1}$ bzw. $||E_n||_{E E_1} = \sup_{||\mathring{f}||_E \leq 1} ||\mathring{T}_n f||_{E_1}$ die Normen der Operationen $t_n \mathring{f}$ bzw. $T_n \mathring{f}$. Dabei ist klar, daß diese Normen genau dann existieren, wenn $T \in (E, P_\infty)$, und zwar für $n = 1, 2, \ldots$.

§ 1. Einige einfache Sätze

DEFINITIONEN. 1. Ein Raum der außer der Vollständigkeit alle Eigenschaften eines *BK*-Raumes besitzt, heißt ein „unvollständiger *BK*-Raum".

2. Ist $E \subset P_\infty$ und E ein *BK*-Raum oder ein unvollständiger *BK*-Raum, so besitzt E „C_1-AK", wenn für jedes $\overset{\circ}{f} \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(\overset{\circ}{f}) - \overset{\circ}{f}\|_E = 0$$

ist. (Das trigonometrische Orthogonalsystem bildet dann in E eine spezielle Toeplitz-Basis.)

SATZ 4.1. *Ist $E \subset P_\infty$, $E_1 \subset P_\infty$ und E_1 ein BK-Raum oder ein unvollständiger BK-Raum, so gilt: Sind $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und existiert für jedes $\overset{\circ}{f} \in E$ ein $\overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f}) \in E_1$, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n \overset{\circ}{f} - \overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f})\|_{E_1} = 0 \tag{1}$$

ist, so ist $T \in (E, E_1)$.

BEWEIS. Sind die Voraussetzungen erfüllt und ist $\overset{\circ}{f} \in E$, so ist wegen der koordinatenweisen Konvergenz in E_1 $\overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f}) = \overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}$, denn ist $\overset{\circ}{h} = (a_k^h, b_k^h)$, so ist

$$a_k^h = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-k}{n+1} a_k' = a_k', \qquad b_k^h = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-k}{n+1} b_k' = b_k'$$

für $k \leqq n$, $k = 1, 2, \ldots$. Also ist $\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f} \in E_1$, woraus die Behauptung folgt.

FOLGERUNGEN. 1. Ist E_1 ein *BK*-Raum, so ist (1) offensichtlich äquivalent der Bedingung $\lim_{m>n\to\infty} \|T_n \overset{\circ}{f} - T_m \overset{\circ}{f}\|_{E_1} = 0$.

2. Ist T die identische Transformation und $E = P_\infty$, so liefert der Satz für jedes $\overset{\circ}{f} \in P_\infty$ eine hinreichende Bedingung für $\overset{\circ}{f} \in E_1$. (Vgl. andere Beweise hierfür in den Fällen $E_1 = L_p (1 \leqq p < \infty)$, C [*30*; S. 84, 4.34 und S. 79, 4.31].)

SATZ 4.2. *Ist $P \subset E \subset P_\infty$, $E_1 \subset P_\infty$ und E_1 ein BK-Raum oder ein unvollständiger BK-Raum, mit C_1-AK, so gilt: Genau dann ist $T \in (E, E_1)$, wenn $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ und wenn für jedes $\overset{\circ}{f} \in E$ ein $\overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f}) \in E_1$ existiert, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n \overset{\circ}{f} - \overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f})\|_{E_1} = 0 \tag{2}$$

ist.

BEWEIS. Sind die Voraussetzungen erfüllt, so ist (2) nach Satz 4.1 hinreichend für $T \in (E, E_1)$. Ist umgekehrt $T \in (E, E_1)$ für irgendwelche der angegebenen Räume, so sind $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (Satz 3.1) und wegen der C_1-AK in E_1 ist (2) erfüllt für $\overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f}) = \overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}$.

FOLGERUNGEN. Da die Räume $L_p (1 \leqq p < \infty)$ und C, C_1-AK besitzen [*30*; S. 86, 4.35 und S. 79, 4.31], gilt der Satz für diese Räume E_1.

SATZ 4.3. *Ist* $P \subset E \subset P_\infty$, $E_1 \subset P_\infty$ *und* E_1 *ein BK-Raum oder ein unvollständiger BK-Raum, mit AK, so gilt Satz* 4.2 *wenn* (2) *ersetzt wird durch*

$$\lim_{n\to\infty} \| t_n \overset{\circ}{f} - \overset{\circ}{h}(\overset{\circ}{f}) \|_{E_1} = 0 .$$

BEWEIS. Die Aussage läßt sich ganz entsprechend wie bei Satz 4.2 beweisen.

FOLGERUNGEN. Der Satz gilt für $E_1 = L_{pN} (1 \leqq q \leqq \infty)$, C_N, $V_N = A_N$.

§ 2. Bedingungen mit den Normen $\| t_n \|_{E E_1}$ und $\| T_n \|_{E E_1}$

SATZ 4.4. *Ist* $E \subset P_\infty$ *und* E *ein Banach-Raum, so gilt:* 1) *Ist* $E_1 \subset P_\infty$, E_1 *ein BK-Raum oder ein unvollständiger BK-Raum und ist* $T \in (E, E_1)$, *so ist* $\| t_n \|_{E E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ *wenn* E_1 *AK besitzt und* $\| T_n \|_{E E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ *wenn* E_1 C_1*-AK besitzt.*

2) *Ist* $E_1 \subset P_\infty$, E_1 *ein BK-Raum oder ein unvollständiger BK-Raum und gilt für jedes* $\overset{\circ}{h} \in E_1$ $\| \sigma_n(\overset{\circ}{h}) \|_{E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$, *so ist* $\| T_n \|_{E E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ *für* $T \in (E, E_1)$.

3) *Ist* $E_1 = L_p (1 \leqq q \leqq \infty)$, C, V, A *und* $T \in (E, E_1^*)$, *so ist* $\| t_n \|_{E E_1^*} = O(1)$ $(n \to \infty)$.

BEWEIS. Seien E und E_1 irgendwelche der vorausgesetzten Räume, $\overset{\circ}{f} \in E$ und $T \in (E, E_1)$. Dann sind bei 1) beziehentlich die Zahlen $\| t_n \overset{\circ}{f} \|_{E_1}$ und $\| T_n \overset{\circ}{f} \|_{E_1}$, bei 2) $\| T_n \overset{\circ}{f} \|_{E_1}$ und bei 3) $\| t_n \overset{\circ}{f} \|_{E_1^*}$ beschränkt für $n \to \infty$. Da dies für jedes $\overset{\circ}{f} \in E$ gilt, folgen mit dem Beschränktheitsprinzip die Behauptungen [3; S. 80, th. 5], [30; S. 98], [25; S. 135].

FOLGERUNGEN. 1) Die erste Teilaussage gilt für $E_1 = L_{qN} (1 \leqq q \leqq \infty)$, C_N, $V_N = A_N$, die zweite Teilaussage für $E_1 = L_q (1 \leqq q < \infty)$, C [30; S. 86, 79]. 2) gilt für $E_1 = L_\infty$, V [30; S. 79, 82].

SATZ 4.5. *Ist* $P \subset E \subset P_\infty$, E *ein Banach-Raum und* $E_1 = L_q (1 < q \leqq \infty)$, V, *so gilt: Genau dann ist* $T \in (E, E_1)$, *wenn* $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *und* $\| T_n \|_{E E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ *ist.*

BEWEIS. Ist für irgendwelche der angegebenen Räume $\| T_n \|_{E E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ und $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so ist $\| T_n \overset{\circ}{f} \|_{E_1} = O(1)$ $(n \to \infty)$ für jedes $\overset{\circ}{f} \in E$. Daraus folgt $T \overset{\circ}{f} \in E_1$ (für $E_1 = L_q (1 < q \leqq \infty)$ s. [30; S. 79, 84], für $E_1 = V$ [30; S. 82]) und damit $T \in (E, E_1)$. Die Umkehrung folgt aus Satz 4.4, 2) (vgl. Folgerungen hierzu).

BEMERKUNG. Ein entsprechender Satz gilt für Räume E_1 welche C_1-komplementär (vgl. Def. nach Satz 5.1) zu einem BK-Raum A mit $P \subset A \subset P_\infty$ sind und wenn P dicht ist in A. Der Beweis verläuft entsprechend wie im nachfolgenden

SATZ 4.6. *Ist* $P \subset E \subset P_\infty$ *und* E *ein Banach-Raum, so gilt für* $E_1 = L_q$ $(1 \leqq q < \infty)$, C, A: *Genau dann ist* $T \in (E, E_1^*)$, *wenn* $\overset{\circ}{g}_k, \overset{\circ}{h}_k \in E^*$ *und* $\| t_n \|_{E E_1^*} = O(1)$ $(n \to \infty)$ *ist.*

BEWEIS. Sind E und E_1 irgendwelche der angegebenen Räume und ist $T\in(E, E_1^*)$, so ist $\|t_n\|_{EE_1^*}=O(1)$ $(n\to\infty)$ (Satz 4.4, 2)).

Ist umgekehrt $\mathring{g}_k, \mathring{h}_k\in E^*$ $(k=1, 2, \ldots)$ und $\|t_n\|_{EE_1^*}=O(1)$ $(n\to\infty)$, so ist für jedes $\mathring{f}\in E$ $\|t_n\mathring{f}\|_{E_1}=\|s_n(\mathring{T}\mathring{f})\|_{E_1^*}=O(1)$ $(n\to\infty)$. Also ist $\mathring{T}\mathring{f}\in E_1^*$ (s. Folgerungen aus Satz 2.3). Da dies für jedes $\mathring{f}\in E$ gilt, ist $T\in(E, E_1^*)$.

SATZ 4.7. *Ist $P\subset E\subset P_\infty$, E ein BK-Raum, P dicht in E, $P\subset E_1\subset P_\infty$ und E_1 ein BK-Raum, so gilt:*

1) *Besitzt E_1 C_1-AK, so ist genau dann $T\in(E, E_1)$, wenn $\mathring{g}_k, \mathring{h}_k\in E^*$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\|T_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$ und $\mathring{p}_i, \mathring{q}_j\in E_1$ $(j=1, 2, \ldots)$.*

2) *Genau dann ist $T\in(E, E_{1N})$, wenn $\mathring{g}_k, \mathring{h}_k\in E^*$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\|t_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$ und $\mathring{p}_j, \mathring{q}_j\in E_{1N}$ $(j=1, 2, \ldots)$.*

BEWEIS. Sind E und E_1 irgendwelche der vorausgesetzten Räume und ist $T\in(E, E_1)$ im Fall 1) und $T\in(E, E_{1N})$ im Fall 2), so sind die recht stehenden Bedingungen erfüllt nach den Sätzen 3.1, 3.2, 4.4, 1).

Sind umgekehrt die rechts stehenden Bedingungen erfüllt, so ist bei 1) $T\in(P, E_1)$ und bei 2) $T\in(P, E_{1N})$ (Satz 3.2) und wegen der C_1-AK bzw. AK in den Räumen E_1 bzw. E_{1N} gilt

bei 1) (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\mathring{f}-\mathring{T}\mathring{f}\|_{E_1}=0$,

bei 2) (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|t_n\mathring{f}-\mathring{T}\mathring{f}\|_{E_1}=0$,

für jedes $\mathring{f}\in P$.

Da P dicht ist in den Räumen E, so folgt aus (1) bzw. (2) und der Beschränktheit der Normen mit dem Grundmengenprinzip [*3*; S. 79, th. 3] $T\in(E, E_1)$ bzw. $T\in(E, E_{1N})$.

FOLGERUNGEN. 1) gilt für $E=L_p(1\leqq p<\infty)$, C, A und $E_1=L$, C, A, denn P ist dicht in diesen Räumen E [*1*; S. 37, 32] und die Räume E_1 besitzen C_1-AK [*30*; S. 84, 4.34 u. S. 79].

2) gilt für die gleichen Räume E und E_1, ja für alle *BK*-Räume E_1 mit $P\subset E_1\subset P_\infty$.

BEMERKUNGEN. 1. Es ist klar, daß die Sätze 4.1 bis 4.7, sowie die Folgerungen aus diesen Sätzen auch für die jeweils den Räumen E bzw. E_1 zugeordneten Stieltjes-Räume gelten.

2. Manche der Aussagen von F. H. YOUNG [*21*], [*22*], sind in den Sätzen der letzten beiden Paragraphen enthalten. Genaueres hierüber wird in Kapitel V, § 2 gesagt.

3. Aus den Sätzen 4.6 und 4.7 (s. Folgerungen) läßt sich die Identität gewisser Multiplikatorenklassen folgern. Bei Multiplikatortransformationen T_M sind die Bedingungen für die $\mathring{g}_k, \mathring{h}_k, \mathring{p}_j, \mathring{q}_j$ $(k, j=1, 2, \ldots)$ trivialerweise erfüllt, so daß nur die Normbedingungen zu vergleichen sind. Es ergibt sich

so für Multiplikatoren:

$$(L_p, C^*) = (L_p, L_N) \quad (1 \leqq p < \infty), \quad (L_p, L^*) = (L_p, C_N) \quad (1 \leqq p < \infty),$$
$$(C, C^*) = (C, L_N), \quad (C, L^*) = (C, C_N).$$

Mit [4; Satz 3] folgt daraus weiter

$$(1) \qquad (L, C^*) = (L, L_N) = (C, C_N) = (C, L^*)$$

und mit [4; Satz 3] für $1 < p < \infty$

$$(2) \qquad (L_p, L^*) = (L_p, C_N) = (L_p, C) = (L_p, L_\infty) = (dV, L_{p'}) = (L, L_{p'}).$$

[Die Bedingung für $T_M \in (dV, L_p)$ $(1 < p' < \infty)$ ist bekannt — s. etwa S. VERBLUNSKY, On some classes of Fourier series, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 33, 287–327 (1932).] — Dagegen ist $(dV, L_N) \neq (L, L_N)$, denn $\{\lambda_k\} = \left\{\frac{1}{\lg k}\right\}$ ist nach TOMIĆ [20] eine Multiplikatorenfolge in (C, C_N), also auch in (L, L_N) [4; Satz 3]. Es ist aber $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt \in dV$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{\lg k} \notin L_N$ [30; S. 110 (2)], also $\left\{\frac{1}{\lg k}\right\} \notin (dV, L_N)$.

§ 3. Verschiedene Darstellungen für $\|t_n\|_{E E_1}$ und $\|T_n\|_{E E_1}$

Die Bedeutung der Normen $\|t_n\|_{E E_1}$ und $\|T_n\|_{E E_1}$ ist klar auf Grund der letzten Sätze. Im folgenden werden verschiedene Darstellungen dieser Normen angegeben.

VORBEMERKUNGEN. In Satz 3.4 wurde gezeigt, daß für $P \subset E \subset P_\infty$, $\mathring{g}_k$, $\mathring{h}_k \in E^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $\mathring{f} \in E$

$$t_n \mathring{f} = \langle \mathring{D}_n(x, t)\, \mathring{f}(t) \rangle \quad \text{mit} \quad \mathring{D}_n(x, t) = \left(p_{nj}(x), q_{nj}(x)\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Nun ist offensichtlich auch

$$t_n \mathring{f} = \sum_{k=1}^{n} \left(\langle \mathring{g}_k \mathring{f} \rangle \cos kx + \langle \mathring{h}_k \mathring{f} \rangle \sin kx \right)$$
$$= \langle [(\mathring{g}_k(t) \cos kx + \mathring{h}_k(t) \sin kx)]\, \mathring{f}(t) \rangle,$$

woraus durch Koeffizientenvergleich folgt, daß auch

$$\mathring{D}_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathring{g}_k(t) \cos kx + \mathring{h}_k(t) \sin kx \right)$$

ist.

Je nachdem, ob an die eine oder andere Darstellung dieses Kerns gedacht wird, schreiben wir

$$\mathring{D}_n(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_{nj}(x) \cos jt + q_{nj}(x) \sin jt \right)$$

$$\mathring{D}_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathring{g}_k(t) \cos kx + \mathring{h}_k(t) \sin kx \right),$$

und entsprechend

$$\mathring{L}_n(x,\underline{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_{n\,j}(x)\cos jt + Q_{n\,j}(x)\sin jt\right)$$

$$\mathring{L}_n(\underline{x},t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}\left(\mathring{g}_k(t)\cos kx + \mathring{h}_k(t)\sin kx\right).$$

Ferner sei mit $\mathring{g} = (c_k, d_k)$

$$\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle \equiv \langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}\rangle \equiv \sum_{k=1}^{n}\left(\mathring{g}_k(t)\,c_k + \mathring{h}_k(t)\,d_k\right)$$

und entsprechend

$$\langle \mathring{L}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle \equiv \langle \mathring{L}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}\rangle \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\left(\mathring{g}_k(t)\,c_k + \mathring{h}_k(t)\,d_k\right).$$

SATZ 4.8. *Für* $E = L_p(1 \leqq p \leqq \infty)$, *C, A*, $E_1 = L_p(1 \leqq q \leqq \infty)$, *C, V, A, gilt: Existiert* $\|t_n\|_{E E_1}$ *bzw.* $\|T_n\|_{E E_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *so ist*

$$\|t_n\|_{E E_1} = \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} \|\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{E^\circ}$$

bzw.

$$\|T_n\|_{E E_1} = \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} \|\langle \mathring{L}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{E^\circ}.$$

BEWEIS. Existiert $\|t_n\|_{E E_1}$ für irgendwelche der angegebenen Räume E und E_1, so ist für $\mathring{f} \in E$ — also $t_n\mathring{f} \in P$ — (wie man durch ausführlicheres Anschreiben der in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke leicht bestätigt) nach Hilfssatz 2.2

$$\begin{aligned}
\|t_n\|_{E E_1} &= \pi \sup_{\|f\|_E \leq 1} \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} |\langle \mathring{g}(x) \langle \mathring{D}_n(x,\underline{t})\,\mathring{f}(t)\rangle\rangle| \\
&= \pi \sup_{\|f\|_E \leq 1} \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} |\langle \mathring{f}(t) \langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\rangle| \\
&\leqq \sup_{\|f\|_E \leq 1} \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} \|\mathring{f}\|_E \|\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{E^\circ} \\
&= \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^\circ} \leq 1} \|\langle \mathring{D}_n(x,t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{E^\circ} \equiv \beta.
\end{aligned}$$

Mit entsprechenden Abschätzungen bestätigt man $\beta \leqq \|t_n\|_{E E_1}$. Daraus folgt die Behauptung für $\|t_n\|_{E E_1}$ und entsprechend auch für $\|T_n\|_{E E_1}$.

§ 4. Doppelnormen in Sonderfällen

Für gewisse Räume E und E_1 lassen sich die Normen $\|t_n\|_{E E_1}$ und $\|T_n\|_{E E_1}$ als Doppelnormen [25; S. 177] schreiben.

DEFINITIONEN. Es sei für $n = 1, 2, \ldots$

$$D(n) = \frac{1}{\pi}\left\|\left(\|\mathring{D}_n(x,t)\|_{E^\circ}^{t}\right)\right\|_{E_1}^{x}, \quad D^*(n) = \frac{1}{\pi}\left\|\left(\|\mathring{D}_n(x,t)\|_{E_1}^{x}\right)\right\|_{E^\circ}^{t}$$

$$L(n) = \frac{1}{\pi}\left\|\left(\|\mathring{L}_n(x,t)\|_{E^\circ}^{t}\right)\right\|_{E_1}^{x}, \quad L^*(n) = \frac{1}{\pi}\left\|\left(\|\mathring{L}_n(x,t)\|_{E_1}^{x}\right)\right\|_{E^\circ}^{t}.$$

Dabei geben die an die Normen hinten oben geschriebenen Buchstaben x und t an, bezüglich welcher Veränderlichen die jeweilige Norm zu nehmen ist.

SATZ 4.9. *Für* $E = L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, C, A, $E_1 = L_q (1 \leqq q \leqq \infty)$, C, V, A, *gilt: Existiert* $||t_n||_{E E_1}$ *bzw.* $||T_n||_{E E_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *so ist*

$$||t_n||_{E E_1} \leqq D(n) \quad \textit{und} \quad ||t_n||_{E E_1} \leqq D^*(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$||T_n||_{E E_1} \leqq L(n) \quad \textit{und} \quad ||T_n||_{E E_1} \leqq L^*(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

BEWEIS. Existiert $||t_n||_{E E_1}$ für die angegebenen Räume, so ist

$$||t_n||_{E E_1} = \sup_{||f||_E \leqq 1} ||\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \rangle||_{E_1} \leqq \sup_{||f||_E \leqq 1} \left\| \left(||f||_E \frac{1}{\pi} ||\mathring{D}_n(x, t)||_{E^0}^t \right) \right\|_{E_1}^x$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\| \left(||\mathring{D}_n(x, t)||_{E^0}^t \right) \right\|_{E_1}^x = D(n).$$

Ferner ist nach Satz 4.8

$$||t_n||_{E E_1} \leqq \sup_{||\mathring{g}||_{E_1^0} \leqq 1} ||\langle \mathring{D}_n(\underline{x}, t) \mathring{g} \rangle||_{E^0} \leqq \sup_{||\mathring{g}||_{E_1^0} \leqq 1} \frac{1}{\pi} \left\| \left(||\mathring{D}_n(x, t)||_{E_1}^x ||\mathring{g}||_{E_1^0} \right) \right\|_{E^0}^t$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\| \left(||\mathring{D}_n(x, t)||_{E_1}^x \right) \right\|_{E^0}^t = D^*(n).$$

Die Aussagen für $||T_n||_{E E_1}$ ergeben sich entsprechend.

SATZ 4.10. *Für* $E = L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, C *und* $E_1 = L_\infty$, C *gilt: Existiert* $||t_n||_{E E_1}$ *bzw.* $||T_n||_{E E_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *so ist* $||t_n||_{E E_1} = D(n)$ *und* $||T_n||_{E E_1} = L(n)$.

BEWEIS. Seien E und E_1 irgendwelche der angegebenen Räume, $f \in E$ und existiere $||t_n||_{E E_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wegen $t_n f \in P$ ist $||t_n||_{E E_1} = ||t_n||_{E C}$ und es genügt den Beweis für $E_1 = C$ zu führen. Satz 4.9 impliziert $||t_n||_{E E_1} \leqq D(n)$. Umgekehrt gilt:

Zu jedem $f \in E$ gibt es ein $x = \bar{x} = x_f$, so daß $\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(\bar{x}, \underline{t}) \rangle = ||\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \rangle||_C$ ist. Also ist

$$||t_n||_{E C} = \sup_{||f||_E \leqq 1} ||\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \rangle||_C = \sup_{||f||_E \leqq 1} |\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(\bar{x}, \underline{t}) \rangle|$$
$$\geqq \sup_{||f||_E \leqq 1} |\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \rangle|$$

für jedes $x \in [0, 2\pi]$, also ist auch

$$||t_n||_{E C} \geqq || \sup_{||f||_E \leqq 1} |\langle \mathring{f} \mathring{D}_n(x, \underline{t}) \rangle| ||_C = \left\| \frac{1}{\pi} \left(||(\mathring{D}_n(x, t)||_{E^0}^t \right) \right\|_C^x = D(n).$$

Die Aussage für $||T_n||_{E E_1}$ ergibt sich entsprechend.

SATZ 4.11. *Für* $E = L$, A *und* $E_1 = L_q (1 \leqq q \leqq \infty)$, C, V, A *gilt: Existiert* $||t_n||_{E E_1}$ *bzw.* $||T_n||_{E E_1}$, *so ist* $||t_n||_{E E_1} = D^*(n)$ *und* $||T_n||_{E E_1} = L^*(n)$ $(n = 1, 2, \ldots$

BEWEIS. Der Beweis kann entsprechend wie bei Satz 4.10 geführt werden, wenn man die in Satz 4.8 gewonnene Normaldarstellung verwendet.

Sei $E = L$ und existiere $||t_n||_{L E_1}$ für die angegebenen Räume E_1. Dann ist $\mathring{D}_n(x, \underline{t}) \in L_\infty$ (Sätze 3 4 und Hilfssatz 2.2), so daß es zu jedem $\mathring{g} \in E_1^0$ und

jedem $\varepsilon>0$ eine t-Menge $M^{\circ}_{t_\varepsilon}$ von positivem Maß gibt für deren $t=\bar{t}_\varepsilon$ gilt (Satz 4.8):

$$\begin{aligned}\|t_n\|_{LE_1} &= \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^0}\leq 1} \|\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{L^0}\\ &= \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^0}\leq 1} \|\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}(x)\rangle\|_{\infty}\\ &\geqq \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^0}\leq 1} |\langle \mathring{D}_n(\underline{x},\bar{t})\,\mathring{g}(x)\rangle| \geqq \| \sup_{\|\mathring{g}\|_{E_1^0}\leq 1} |\langle \mathring{D}_n(\underline{x},t)\,\mathring{g}\rangle\|_{\infty} - \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $\|t_n\|_{LE_1} \geqq \frac{1}{\pi}\|(\|\mathring{D}_n(x,t)\|^{x}_{E_1})\|^{t}_{\infty} - \varepsilon = D^*(n) - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt, folgt hieraus zusammen mit Satz 4.9 die Behauptung für $\|t_n\|_{LE_1}$ und damit auch für $\|T_n\|_{LE_1}$ und entsprechend für $\|t_n\|_{AE_1}$ und $\|T_n\|_{AE_1}$.

Bemerkungen. 1. Die Sätze 4.9 bis 4.11 gelten offensichtlich auch für die jeweils zugeordneten Stieltjes-Räume.

2. Nicht für alle Räume E und E_1 gelten Aussagen wie in Satz 4.10 und 4.11. Dies zeigt schon die identische Transformation ($\mathfrak{M}$ = Einheitsmatrix!) im Fall $T\in(L_2, L_2)$, da dann $D(n)=2n+O(1)$ $(n\to\infty)$ ist, während doch $\|t_n\|_{22}=O(1)$ $(n\to\infty)$ für $T\in(L_2, L_2)$ gilt (Satz 4.4, 1)). (Vgl. auch [*6*; S. 78, 4.] und [*25*; S. 178, Ex. C].)

§ 5. Die Beschränktheit der Zeilen- und Spaltennormen

Bezeichnet man $\|\mathring{g}_k\|_{E^0}$, $\|\mathring{h}_k\|_{E^0}$ $(k=1,2,\ldots)$ als Zeilennormen und $\|\mathring{p}_j\|_{E_1}$, $\|\mathring{q}_j\|_{E_1}$ $(j=1,2,\ldots)$ als Spaltennormen, so läßt sich deren gleichmäßige Beschränktheit im Fall $T\in(E,E_1)$ für gewisse Räume E und E_1 zeigen. Die Aussagen von Satz 4.12 und 4.13 im Fall $E=E_1=L_p(1<p<\infty)$ finden sich schon bei F. H. Young [*22*; S. 787, th. 4 und S. 788, cor.]. Da sich Satz 4.12 entsprechend wie bei F. H. Young [*22*; S. 787, th. 4] beweisen läßt, wenn man für $\|t_n\|_{EE_1}$ die in Satz 4.8 angegebene Normdarstellung verwendet und da der Beweis in Satz 4.13 mit $\|t_n\|_{EE_1}=\sup_{\|f\|_E\leq 1}\|t_n f\|_{E_1}$ entsprechend verläuft, lassen wir die Beweise hier weg. Es sei nur vermerkt, daß in Satz 4.13 für $E=V$, A $O(j)$ $(j\to\infty)$ an Stelle von $O(1)$ $(j\to\infty)$ deshalb auftritt, weil $\|\cos jt\|_A=\|\cos jt\|_V=j\|\sin jt\|_L=O(j)$ $(j\to\infty)$ ist. (Entsprechend bei $\sin jt$.)

Satz 4.12. *Für $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, C, A, $E_1=L_q(1\leqq q\leqq\infty)$, C, V, A gilt: Ist $\|t_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$ oder $\|T_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$, ist also speziell $T\in(E,E_1)$, so ist*

$$\|\mathring{g}_k\|_{E^0}=O(1)\quad(k\to\infty),\qquad \|\mathring{h}_k\|_{E^0}=O(1)\quad(k\to\infty).$$

Satz 4.13. 1) *Für $E=L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, C, $E_1=L_q(1\leqq q\leqq\infty)$, C, V, A gilt: Ist $\|t_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$ oder $\|T_n\|_{EE_1}=O(1)$ $(n\to\infty)$ und sind die p_j, $q_j\in E_1$*

$(j=1, 2, \ldots)$, ist also speziell $T\in(E, E_1)$, so ist

$$\|p_j\|_{E_1}=O(1) \quad (j\to\infty), \qquad \|q_j\|_{E_1}=O(1) \quad (j\to\infty).$$

2) *Unter denselben Voraussetzungen wie bei 1) nur mit $E=V, A$ gilt:*

$$\|p_j\|_{E_1}=O(j) \quad (j\to\infty), \qquad \|q_j\|_{E_1}=O(j) \quad (j\to\infty).$$

Kapitel V. Transformationen mit der transponierten Matrix Schlußbemerkungen

§ 1. Transformationen mit der transponierten Matrix

Da der zu E^* komplementäre Raum im allgemeinen nicht der Raum E ist, so sind die Schlüsse von T auf T^* in den folgenden Sätzen meist nicht umkehrbar. Der Fall $E=E_1=L_p(1<p<\infty)$ — bei dem Umkehrbarkeit wegen $(E^*)^*=E$ möglich ist — wurde schon von F. H. YOUNG [22; S. 788] betrachtet.

SATZ 5.1. *Ist $E\subset P_\infty$, E ein BK-Raum mit AK, und $E_1\subset P_\infty$, E_1 ein BK-Raum, so gilt: Aus $T\in(E, E_1)$ folgt $T^*\in(E_1^*, E^*)$.*

BEWEIS. Sind E und E_1 irgendwelche der angegebenen Räume, ist $\overset{\circ}{f}=(a_j, b_j)\in E$, $\overset{\circ}{g}=(c_k, d_k)\in E_1^*$ und $T\in(E, E_1)$, so existiert $\varphi(\overset{\circ}{f})=\langle \overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle$ und $\varphi(\overset{\circ}{f})$ ist ein offensichtlich lineares und wegen

$$\varphi(\overset{\circ}{f})\leqq\|\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}\|_{E_1}\|\overset{\circ}{g}\|_{E_1^*}\leqq\|T\|_{EE_1}\|\overset{\circ}{g}\|_{E_1^*}\|\overset{\circ}{f}\|_E$$

auch stetiges Funktional in E.

Nun ist $\varphi(\overset{\circ}{f})=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'c_k+b_k'd_k)$, also

$$\varphi(\cos jt)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}c_k=a_j'^* \qquad (j=1, 2, \ldots)$$

$$\varphi(\sin jt)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}d_k=b_j'^* \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

Andererseits gilt nach ZELLER [27; S. 58, 2.1 und S. 60, 3.4] für jedes lineare, stetige Funktional $\varphi(\overset{\circ}{f})$ in E

$$\varphi(\overset{\circ}{f})=\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\varphi(\cos jt)+b_j\varphi(\sin jt)\right).$$

Also ist

$$\varphi(\overset{\circ}{f})=\sum_{j=1}^{\infty}(a_ja_j'^*+b_jb_j'^*).$$

Da diese Summe für jedes $\overset{\circ}{f}\in E$ existiert, ist für jedes $\overset{\circ}{g}\in E_1^*$ $\overset{\circ}{T}{}^*\overset{\circ}{g}=(a_j'^*, b_j'^*)\in E^*$, also $T^*\in(E_1^*, E^*)$.

BEMERKUNG. Da $E=L_p(1<p<\infty)$ AK besitzt, ist speziell der oben genannte Satz von F. H. YOUNG in Satz 5.1 enthalten, jedoch ist YOUNGS Beweis anderer Natur.

DEFINITION. Ist $E \subset P_\infty$, so ist der zu E „C_1-komplementäre Raum" $(C_1-E)^*$ der Raum der $\overset{\circ}{f}=(a_j, b_j)$, bei denen für jedes $\overset{\circ}{g}=(c_j, d_j)\in E$ die C_1-Summe $C_1-\langle \overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{n+1}(a_jc_j+b_jd_j)$ existiert. Im übrigen gelte bezüglich der Norm usw. Entsprechendes wie in den Räumen E^*. (Also eventuelle Norm $\|\overset{\circ}{f}\|_{(C_1-E)^*}=\sup\limits_n \sup\limits_{\|\overset{\circ}{g}\|_E\le 1}|\langle \overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\sigma}_n(\overset{\circ}{g})\rangle|$.)

SATZ 5.2. a) *Ist* $E\subset P_\infty$, E *ein BK-Raum mit* C_1*-AK und* $E_1\subset P_\infty$, E_1 *ein BK-Raum, so gilt: Aus* $T\in(E, E_1)$ *folgt* $T^*\in(E_1^*, (C_1-E)^*)$.

b) *Ist* $E\subset P_\infty$, E *ein BK-Raum mit* C_1*-AK und* $E_1\subset P_\infty$, E_1 *ein BK-Raum, so gilt: Aus* $T\in(E, E_{1N})$ *folgt* $T^*\in\big((E_{1N})^*, (C_1-E)^*\big)$.

BEWEIS. a) Der Beweis kann ganz entsprechend wie bei Satz 5.1 geführt werden. Nur gilt für das allgemeine, lineare und stetige Funktional $\varphi(\overset{\circ}{f})$ mit $\overset{\circ}{f}=(a_j, b_j)$ in den vorausgesetzten Räumen E jetzt, wie man leicht zeigt,

$$\varphi(\overset{\circ}{f}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{n+1}\left[a_j\varphi(\cos jt)+b_j\varphi(\sin jt)\right].$$

Also ist — mit den Bezeichnungen wie bei Satz 5.1 —

$$\varphi(\overset{\circ}{f}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{n+1}(a_ja_j'^*+b_jb_j'^*).$$

Da diese C_1-Summe für jedes $\overset{\circ}{f}\in E$ und jedes $\overset{\circ}{g}\in E_1^*$ existiert, ist $T^*\overset{\circ}{g}=(a_j^*, b_j'^*)\in(C_1-E)^*$, also $T^*\in\big(E_1^*, (C_1-E)^*\big)$

b) Für E_{1N} an Stelle von E_1 ergibt sich die Behauptung ganz entsprechend wie bei a), nur genügt es jetzt $\overset{\circ}{g}\in(E_{1N})^*$ anzunehmen, denn schon dann existiert $\varphi(\overset{\circ}{f})=\langle\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{g}\rangle$ für jedes $\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{f}\in E_{1N}$.

FOLGERUNGEN. a) gilt für $E=L_p(1\le p<\infty)$, C, A, da diese Räume C_1-AK besitzen [*30*; S. 86, 79] und die zugeordneten Räume $(C_1-E)^*$ sind die Räume E^0 (für $E=L_p(1\le p<\infty)$ und damit wegen $L=dA$ auch für A s. [*7*; S. 220] und für $E=C$ folgt dies aus [*30*; S. 88] und [*17*; S. 120, 121] mit [*30*; S. 82, 4.32]). b) gilt für dieselben Räume E wie a) und für $E_1=L_q$ $(1\le q\le\infty)$, C, V, A ist offensichtlich $E^0\subset(E_{1N})^*$.

Für speziellere Bildräume E_1 gilt der

SATZ 5.3. *Aus* $T\in(L_\infty, L_q)$ $(1<q<\infty)$ *folgt* $T^*\in(L_{q'}, L)$.

BEWEIS. Aus $T\in(L_\infty, L_q)$ $(1<q<\infty)$ folgt $T\in(C, L_q)$, also $T^*\in(L_{p'}, dV)$ Satz 5.2a), (Folgerungen). Also ist $\|T_n^*\|_{L_{q'}\,dV}=\|T_n^*\|_{L_{q'}\,L}=O(1)$ $(n\to\infty)$ (s. Folgerungen aus Satz 4.4, 2)). Ferner ist $T^*\in(P, L_\infty^*)\subset(P, L)$ (Satz 3.3a) und Hilfssatz 2.2), d. h. es ist für jedes $\overset{\circ}{f}\in P$ $\lim\limits_{m<n\to\infty}\|T_n^*\overset{\circ}{f}-T_m^*\overset{\circ}{f}\|_L=0$ (Satz 4.2).

Daraus folgt zusammen mit der Beschränktheit der $\| T_n^* \|_{L_{q'} L}$ – da P dicht ist in $L_{q'}$ – (Grundmengenprinzip!) –

$$\lim_{m>n\to\infty} \| T_n^* f - T_m^* f \|_L = 0 \qquad \text{für jedes } f \in L_{q'},$$

d.h. es ist $T^* \in (L_{q'}, L)$ (Satz 4.2).

§ 2. Schlußbemerkungen

Zunächst sei angegeben, inwieweit unsere Aussagen solche von F. H. YOUNG enthalten oder diese verschärfen.

Die folgenden Satznummern beziehen sich jeweils auf die Sätze in der Arbeit [22]. YOUNGs Satz 1 ist in unserem Hilfssatz 2.1 bei Berücksichtigung von unserem Satz 2.1 (s. Folgerung) enthalten, YOUNGs Satz 2 in unserem Satz 4.5 bei Berücksichtigung von Satz 4.8, YOUNGs Satz 3 folgt unmittelbar aus unseren Sätzen 4.5 und 4.9. Satz 4 ist in unserem Satz 4.12 und Satz 5 in unserem Satz 5.1 und auch 5.2 enthalten.

In Satz 8 sind die Voraussetzungen (i) und (i') unnötig, wie unser Satz 4.5 zeigt. Die Voraussetzungen ($\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < M$ für alle k) in den Sätzen 9 und 10 können abgeschwächt werden, wie unsere genauen diesbezüglichen Aussagen für $T \in (L_\infty, L_\infty)$ bzw. $T \in (L, L)$ zeigen (s. Sätze 4.5 und 4.7). YOUNGs notwendige Bedingung für $T \in (L, L)$ (Satz 10.1) ist nach unseren Sätzen 4.5 und 4.11 sogar notwendig schon erfüllt, wenn auch nur $T \in (L, dV)$. Weiter ist YOUNGs hinreichende Bedingung für $T \in (L, L)$ (Satz 10.2 (i)) wie man leicht zeigt (vgl. unseren Satz 4.1) sogar hinreichend für $T \in (dV, L)$.

Zum Schluß sei folgendes noch bemerkt.

Die meisten der klassischen Bedingungen für Multiplikatoren ergeben sich unmittelbar aus unseren Sätzen 4.1 bis 4.7, Satz 4.10 und 4.11 und den Sätzen 5.1 bis 5.3. Es sei nur darauf hingewiesen, daß für Multiplikatoren in den Fällen $E = L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, C, V, A und $E_1 = L_\infty$, $C \| t_n \|_{E E_1} = \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \|_E$ ist. Für $E = L$ und $E_1 = L_q (1 \leqq q \leqq \infty)$ C, V, A ist $\| t_n \|_{E E_1} = \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \|_{E_1}$ [4].

Es bleibt zu untersuchen, inwiefern unsere Aussagen Analoga besitzen, wenn an Stelle des trigonometrischen andere Orthogonalsysteme zugrunde gelegt werden (vgl. [2] und [15]). Auch Erweiterungen auf Fourier-Integrale oder andere Funktionenräume, z.B. Zaanen-Orlicz-Räume, die von G. LORENTZ eingeführten Räume oder Lipschitz-Klassen legen sich nahe. (Vgl. [30], [13], [16], [24], [25], [14], [12].)

Den Kennern der klassischen Theorie der FRn mag in dieser Arbeit manches zu abstrakt und allgemein sein. Den Freunden abstrakter Räume dürfte Vieles zu konkret und speziell sein. Vielleicht regt dies Unbehagen dazu an, die vorliegenden Ergebnisse zu spezialisieren (speziellere Matrizen; reine Sinus- oder reine Kosinusreihen) oder zu verallgemeinern (allgemeinere Orthogonalsysteme und Räume).

Literatur

[*1*] Achieser, N. I.: Vorlesungen über Approximationstheorie. Berlin 1953. — [*2*] Aljančić, S.: Über Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen stetiger Funktionen. Ac. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **10**, 121—130 (1956). — [*3*] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. New York 1955. — [*4*] Goes, G.: Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I. Studia Math. **17**, 299—308 (1958). — [*5*] Hardy, G. H.: On the summability of Fourier series. Proc. London Math. Soc. **12**, 365—372 (1913). — [*6*] Kaczmarz, S., et D. Marcinkiewicz: Sur les multiplicateurs des séries orthogonales. Studia Mathematica **7**, 73—82 (1938). — [*7*] Kaczmarz, S., u. H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen. New York 1951. — [*8*] Karamata, J.: Suite de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier. J. Math. Pure et Appl. (9) **35**, 87—95 (1956). — [*9*] Karamata, J.: Sur les facteurs de convergence uniforme des séries de Fourier. Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Ser. A **22**, 35—43 (1957). — [*10*] Katayama, M.: Fourier series VII: Uniforme convergence factors of Fourier series. J. of the Faculty of Science, Hokkaidô University, Ser. I **13**, 121—129 (1957). — [*11*] Knopp, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Ein Bericht über Tübinger Ergebnisse. Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **11** (1952), 269—298 (1953). — [*12*] Konjuschkow, A. A.: Über Lipschitzklassen (russ.). Iswestija Ak. Nauk SSSR, Ser. Mat. **21**, 423—448 (1957). — [*13*] Krasnoselskii, M. A., u. J. B. Rutizkii: Über lineare Funktionale in Orliczräumen (russ.). Dokl. Ak. Nauk SSSR. (N. S.) **97**, 581—584 (1954). — [*14*] Lorentz, G. G.: Some new functional spaces. Annals of Math., Ser. II **51**, 37—55 (1950). — [*15*] Newman, J., and W. Rudin: Mean convergence of orthogonal series. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 219—222 (1952). — [*16*] Orlicz, W.: Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Int. l'Ac. Polon., cl. A sci. math. et nat. **1932**, 207—220. — [*17*] Riesz, F., and Sz. B. Nagy: Functional analysis. New York 1955. — [*18*] Rutizkii, J. B.: Über eine Klasse von Banachräumen (russ.). Uspechi Mat. Nauk SSSR. **12**, 230—234 (1957). — [*19*] Taylor, E. A.: Extensions of a theorem of Hellinger and Toeplitz. Math. Z. **66**, 53—57 (1956). — [*20*] Tomić, M.: Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. Ac. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **8**, 23—32 (1955). — [*21*] Young, F. H.: A matrix transformation of Fourier coefficients. Thesis, University of Oregon 1950. — [*22*] Young, F. H.: Transformations of Fourier coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 783—791 (1952). — [*23*] Young, W. H.: On the integration of Fourier series. Proc. London Math. Soc. **9**, 449—462 (1911). — [*24*] Zaanen, A. C.: Note on a certain class of Banach spaces. Ned. Akad. Wetensch. Proc. sect. Sci. **52**, 488—498 (1949) [= Indagationes Math. **11**, 148—158 (1949)]. — [*25*] Zaanen, A. C.: Linear Analysis. Amsterdam-Groningen 1953. — [*26*] Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). — [*27*] Zeller, K.: Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951). — [*28*] Zeller, K.: Matrixtransformationen von Folgenräumen. Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **12** (1953), 340—346 (1954). — [*29*] Zeller, K.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958. — [*30*] Zygmund, A.: Trigonometrical series. New York 1952.

Ludwigsburg, Eugenstr. 23

(Eingegangen am 28. Juni 1958)

ROSENBERG, A., and D. ZELINSKY
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 372–380 (1959)

Finiteness of the injective hull

By
ALEX ROSENBERG and DANIEL ZELINSKY[1]

1. Introduction

It is well known that every left module M over a ring R can be embedded in an injective left R-module. In this note, we consider the following more detailed questions: If M has finite length (i.e. has a finite composition series) does there exist an injective module containing M which also has finite length? Even more generally, do there exist any injective R-modules of finite length?

This problem was brought to the fore recently by AZUMAYA [2] who showed that in extending Pontryagin-type duality to modules over a ring with minimum condition, the dual module of M must be defined as $\mathrm{Hom}_R(M, Q)$ where Q is an injective module of finite length containing all simple left R-modules (cf. also [9, § 4] [11, p. 108]).

The answer to the questions posed in the first paragraph is clearly no as long as R is arbitrary (e.g., R = the integers). However, we restrict ourselves to rings with left minimum condition where the problem had its origin. Here the answers are again no, because the condition for embeddability turns out to be equivalent to an additional, nonvacuous finiteness condition on the *right* structure of the ring (Theorem 1). If we restrict ourselves further to rings with both minimum conditions, our question becomes equivalent to a generalized version of an old question of ARTIN'S [5, p. 176] and [8, p. 6]: If a division ring has finite left dimension over a division subring, does it also have finite right dimension? The generalized problem is the same with division rings replaced by semisimple rings with minimum condition. We conjecture that the answers to all these questions are still no, but in view of the complications inherent in division rings infinite over their centre, finding a counterexample seems to be quite difficult.

On the other hand, we can show that the answers to our embeddability questions are yes if the ring is sufficiently like a finite dimensional algebra (the extra hypothesis in Theorem 3 if imposed on all the simple homomorphic images is actually equivalent to assuming a polynomial identity). It should also be noted that quasi-Frobenius rings satisfy our embeddability condition.

In 3 we drop all minimum conditions and assume that every simple left R-module is contained in an injective module of finite length. Then the radical turns out to be nil and nearly nilpotent (Theorem 4). If in addition R is commutative our assumption is satisfied if and only if every ring of quo-

[1]) Part of this work was done while the authors were on leave at the Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. A. ROSENBERG was there supported by N. S. F. grant G-1974 and D. ZELINSKY was a John Simon Guggenheim Fellow.

tients R_M (M a maximal ideal of R) satisfies the minimum condition (Theorem 5). Examples of rings satisfying the latter hypothesis are furnished by Theorem 6, which is due to KAPLANSKY: R is (von Neumann-) regular if and only if R_M is a field for every M, or equivalently, if and only if each module R/M is injective.

2. Rings with minimum condition

We consider only rings with unit but we begin by imposing no finiteness restrictions on the rings. For such rings it seems more appropriate to consider, not finitely generated modules, but modules of finite length, i.e. modules having finite composition series. Of course, for rings with minimum condition these two classes of modules coincide.

According to ECKMANN and SCHOPF [4] every module A over a ring R has a unique injective, essential extension module[2]), called the *injective hull* of A and written $\hat{A}$. The injective hull of A is contained in every injective extension of A and contains every essential extension of A. Moreover, the following facts follow readily:

a) If A is an essential extension of B, then $\hat{A} = \hat{B}$.

b) If $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ then $\hat{A} = \hat{A}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{A}_n$.

c) A module A is embeddable in an injective module of finite length if and only if $\hat{A}$ has finite length.

d) The injective hull of A has finite length only if A has finite length.

e) Let S denote the *socle* of A, i.e. the sum of all simple submodules of A. If A has finite length, A is an essential extension of S and thus $\hat{A} = \hat{S}$ by a). Moreover, if $S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ is written as a direct sum of simple modules, $\hat{S} = \hat{S}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{S}_n$ by b). Cf. [6, § 2 and § 3].

We may, therefore, conclude that a module A of finite length is embeddable in an injective module of finite length if and only if each simple submodule of A has an injective hull of finite length. Thus having reduced the embeddability of arbitrary modules in injectives of finite length to that of simple modules, we proceed to our main device

LEMMA 1. *Let R be a ring, $R = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_k = 0$, a chain of two-sided ideals in R. For every left R-module A define the (Loewy-) series*

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_k = A$$

by setting A_i = annihilator of N_i in $A = \{x \in A \mid N_i x = 0\}$. Then there is a natural left R-monomorphism[3])

$$A_{i+1}/A_i \to \mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, A).$$

If A is injective, this is an isomorphism.

[2]) An extension module of A is essential if every nonzero submodule has a nonzero intersection with A.

[3]) The Hom below is a left R-module by virtue of the right operations of R on N_i/N_{i+1}, viz $(r\varphi)(\bar{n}) = \varphi(\bar{n}r)$, for r in R, $\bar{n}$ in N_i/N_{i+1}, φ in $\mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, A)$.

PROOF. We may identify A_i with $\mathrm{Hom}_R(R/N_i, A)$ by letting correspond to x in A_i the homomorphism sending $1+N_i$ into x. Since

$$0 \to N_i/N_{i+1} \to R/N_{i+1} \to R/N_i \to 0$$

is exact and the mappings are two-sided R homomorphisms we have an exact sequence of left R-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/N_i, A) \to \mathrm{Hom}_R(R/N_{i+1}, A) \to \mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, A)$$

and, in fact, we can adjoin a zero on the right to get a five term exact sequence in case A is injective [3; II, 4.6]. Making the above identification we obtain the desired monomorphism (isomorphism if A is injective).

LEMMA 2. *With notations as in Lemma 1, suppose that each N_i/N_{i+1} is a semisimple (= completely reducible) left R-module. Let A be a left R-module of finite length with socle S. Then A is embeddable in an injective module of finite length if and only if $\mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, S)$ has finite length as a left R-module for $i = 0, 1, \ldots, k-1$.*

PROOF. By Lemma 1, $\hat{A}$ is the result of a finite succession of module extensions with factors $\mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, \hat{A})$. Thus $\hat{A}$ has finite length if and only if $\mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, \hat{A})$ has finite length for all i. Now every homomorphism of a semisimple module has a semisimple image so that $\mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, \hat{A}) = \mathrm{Hom}_R(N_i/N_{i+1}, S')$ where S' is the socle of $\hat{A}$. However, $S' = S$ because if T is a complement of S in the semisimple module S', $T \cap A = 0$; but $\hat{A} = \hat{S}$ by e), thus $\hat{A}$ is an essential extension of S and so $T = 0$ and $S = S'$, proving the Lemma.

As a direct consequence of Lemma 2 and the fact that every module over a semisimple ring (with minimum condition) is semisimple, we have

THEOREM 1. *Suppose N is a nilpotent ideal in a ring R and R/N is semisimple with minimum condition. Then a left R-module A with socle S is contained in some injective module of finite length if and only if the left R-modules $\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, S)$ have finite length* ($i = 0, 1, \ldots$)[4].

REMARK 1. An equally good necessary and sufficient condition is: the (R/N)-modules $\mathrm{Hom}_{R/N}(N^i/N^{i+1}, S)$ have finite length (equivalently, are finitely generated) for $i = 0, 1, \ldots$.

REMARK 2. The condition that $\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, S)$ has finite length for *every* simple left R-module S (equivalently, for every semisimple S of finite length) and for $i = 1, 2, \ldots$ is equivalent to the same condition postulated only for $i = 1$. To prove this by induction on i, consider the natural two-sided R-epimorphism $N^{i-1} \otimes_R N \to N^i$ determined by $m \otimes n \to mn$ for $m \in N^{i-1}$ and $n \in N$. This induces an epimorphism $(N^{i-1}/N^i) \otimes_R (N/N^2) \to N^i/N^{i+1}$, which in turn gives an R-monomorphism

$$\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, S) \to \mathrm{Hom}_R(N^{i-1}/N^i \otimes_R N/N^2, S) =$$
$$\mathrm{Hom}_R\big(N^{i-1}/N^i, \mathrm{Hom}_R(N/N^2, S)\big)$$

[4]) Here we set $N^0 = R$.

(cf. [3, II, 5.2']). But $S' = \mathrm{Hom}_R(N/N^2, S)$ has finite length by hypothesis and is semisimple because $NS' = 0$, and so $\mathrm{Hom}_R(N^{i-1}/N^i, S')$ also has finite length by the induction hypothesis. So also do all its submodules, completing the induction.

Suppose now that R is a ring with left minimum condition, N its radical, A a simple left R-module, and V_i the corresponding homogeneous component of the left module N^i/N^{i+1}. It is well known that V_i is a two sided R-module so that if E_i denotes the endomorphism ring of V_i as left R-module, E_i contains as a subring R_i, the mappings induced by the right operations of R on V_i. Moreover, since V_i is a finite direct sum of copies of A, the ring E_i is just a matrix ring over the division ring of R-endomorphisms of A, i.e. E_i is simple with minimum condition. Further, since $V_i N \subseteq (N^i/N^{i+1})N = 0$, the ring R_i is a homomorphic image of R/N and so is a semisimple subring of E_i. With these notations we then have

LEMMA 3. *A is embeddable in an injective module of finite length if and only if E_i is a finitely generated left R_i module for $i = 0, 1, 2, \ldots$.*

PROOF. Since V_i is a finite direct sum of copies of A, $E_i = \mathrm{Hom}_R(V_i, V_i)$ is a finite direct sum of copies of $\mathrm{Hom}_R(V_i, A) = \mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, A)$, and this decomposition is a left R-module decomposition. Thus E_i has finite length as a left R_i-module if and only if $\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, A)$ has. This together with Theorem 1, the subsequent remark, and the fact that left action of R on E_i is exactly the left action on E_i of the subring R_i proves the Lemma.

That the condition of Lemma 3 is not always fulfilled is shown by the following example:

Let K be any field with an isomorphism σ into itself such that $[K : \sigma K] = \infty$; e.g., $K = F(x_1, x_2, \ldots)$ with F a field, $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ and $\sigma =$ the identity on F. Define a two-sided K module N as follows: as a left K-module N is isomorphic to K; on the right $nk = (\sigma k)n$ for $k \in K$, $n \in N$. If we set $N^2 = 0$ the two-sided K-module direct sum $R = K + N$ is a ring with left minimum condition and with only one simple module, $A = R/N$. Here $E_1 = \mathrm{Hom}_R(N, N) =$ the ring of K-endomorphisms of K, which is the set of left multiplications $l_k : n \to kn$, R_1 is the set of right operators on N which by definition is the set of $l_{\sigma(k)}$. Thus E_1 as a left R_1-module is isomorphic to K as a σK-module. Since it is not finitely generated R admits no injective modules of finite length.

Although the ring in this example has left minimum condition it does not satisfy the right minimum condition. The next Lemma shows that the condition of Lemma 3 is closely analogous (but presumably not equivalent) to the right minimum condition.

LEMMA 4. *With the same notations as in Lemma 3, suppose that R also satisfies the right minimum condition. Then for each $i = 0, 1, 2, \ldots$, E_i is a finitely generated right R_i-module.*

PROOF. It is well known [1, 5.7A] that as a right E_i-module V_i is the direct sum of a finite number of copies of the unique simple right E_i-module, W_i. Furthermore E_i as a right E_i-module is also a finite direct sum of copies of

W_i. Now since R satisfies the minimum condition the following right R-modules are finitely generated:

$$N^i, N^i/N^{i+1}, V_i \subseteqq (N^i/N^{i+1}), W_i, \text{ and so finally } E_i.$$

Note that if conversely we let $i = 0, 1, 2, \ldots$ and let A range over all the simple left modules of R, the resulting set of conditions, E_i finitely generated as a right R_i module, imply that R satisfies the right minimum condition.

For rings satisfying both minimum conditions the only information on the embeddability problem we have is given in

THEOREM 2. *The following statements are equivalent:*

(i) *There exists a ring R satisfying both left and right minimum conditions but having a simple left-module not embeddable in a finitely generated injective module.*

(ii) *There exists a simple ring with minimum condition E and a semisimple subring T with minimum condition and containing the unit of E such that E is finitely generated as a right T-module but not as a left T-module.*

PROOF. That (i) implies (ii) is a consequence of Lemmas 3 and 4.

Conversely, given E and T as in (ii) we construct R as follows: Let N be a simple right E-module and $D = \mathrm{Hom}_E(N, N)$ so that N is a finite dimensional left vector space over the division ring D and $T \subsetneqq E = \mathrm{Hom}_D(N, N)$. Consider N as a left module over the ring $D \oplus T$ by setting $TN = 0$. Right operation of T on N is already defined since $T \subsetneqq E$; if we then set $ND = 0$ we have made N into a two sided $D \oplus T$ module.

Next, define a multiplication in N by setting all products equal to zero. Then $R = (D \oplus T) \dot{+} N$[5]) is a ring. Since $TN = NN = 0$ and $[N:D]_l < \infty$, the left R-module N is of finite length. Thus R is a left R-module of finite length, i.e. R satisfies left minimum condition. As for right minimum condition, we are given that E is a right T-module of finite length. But N is an E-direct summand of E so that N is also a right T-module of finite length. Since $ND = NN = 0$, N is also a right R-module of finite length and so R satisfies the right minimum condition.

If we now choose $A = R/(T + N) = D$, then $E_1 = E$, $R_1 = T$ and so Lemma 3 asserts that A is not embeddable in a finitely generated injective.

REMARK. If there is a simple ring E with N and D as above and if there is a ring isomorphism of E onto a proper subring T with $[E:T]_l = \infty$ but $[E:T]_r < \infty$, we can construct a ring $R^* = D + N$ much as above which satisfies both minimum conditions and which is also completely primary and so has no finitely generated injectives at all.

The question naturally arises as to the independence of the two minimum conditions on a ring R and the condition that all the simple left modules have injective hulls of finite length. The examples we have constructed so far consist in producing a left D-, right T-module N and asking about the finiteness of $[N:D]$ (left minimum condition in R), of $[N:T]$ (right minimum condition)

[5]) $\dot{+}$ means two sided $(D \oplus T)$-module direct sum.

and of $[N^*:T]$ (finite length of injective hulls) where $N^* = \mathrm{Hom}_R(N, A) = \mathrm{Hom}_D(N, D)$ [since $\mathrm{Hom}_R(N, T) = 0$, it is only the injective hull of the simple module D that need be considered]. It is standard, of course, that $[N^*:D]$ is finite if and only if $[N:D]$ is. Thus if we assume the existence of asymmetric ring extensions as in Theorem 2, and build a ring with radical N^* rather than N, an anti-isomorphism of this ring would give an example showing that the right minimum condition is independent of the other two conditions. However, it is plausible that the left minimum condition is implied by the other two; in the type of example analyzed above, if T is a simple ring then the finiteness $[N:T]$ and of $[N^*:T]$ imply that N and N^* have the same cardinality, which implies at least that $[N:D]$ is less than the cardinal of D.

It is well-known that if R is a finite dimensional algebra over a field K, then every simple left module $(R/N)\bar{e}$ is embeddable in the injective module $\mathrm{Hom}_K(eR, K)$ which has finite length (even as a K-module) (cf. [7, Lemma 5]). We proceed to generalize this fact, using the techniques above.

LEMMA 5. *Let E be an algebra over a commutative ring Z and finitely generated as a Z-module. Let R be a right Noetherian subring of E (having the same unit as E) and suppose that E is finitely generated as a right R-module. Th n E is finitely generated as a left R-module, too.*

PROOF. Since $ZR \subset E$, the right R-module ZR is also finitely generated and so we may write $ZR = z_1R + z_2R + \cdots + z_nR = Rz_1 + Rz_2 + \cdots + Rz_n$ for z_i in Z, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hence ZR is also a finitely generated left R-module. But then any left ZR-module which is finitely generated will also be finitely generated as a left R-module. Now E is a finitely generated left Z module and so a finitely generated left ZR-module, proving the theorem.

THEOREM 3. *Let R be a ring satisfying both left and right minimum conditions and A a simple left R-module. Let U be the annihilator of A in R and suppose that the simple ring $R/U = R'$ is finite over its center. Then $\hat{A}$ is of finite length as a left R-module.*

PROOF. The module V_i as defined before Lemma 3 is a left R'-module and $E_i = \mathrm{Hom}_R(V_i, V_i) = \mathrm{Hom}_{R'}(V_i, V_i)$ is finite over its center if R' is. But Lemma 4 implies that E_i is a finitely generated right R_i-module whence by Lemma 5 E_i is also finitely generated as a left R_i-module. Thus Lemma 3 concludes the proof.

3. General rings

In this section we study the effect on the structure of a ring R of assuming that all the injective hulls of its simple left modules have finite length. Most of our results are based on a general lemma which is a kind of analogue of the usual subdirect sum decomposition of a ring with zero radical:

LEMMA 6. *Let R be any ring with unit and $\{\hat{A}\}$ the set of injective hulls of simple left R-modules. Then R is faithfully represented by its action on the direct sum of the $\hat{A}$. That is, if $x \in R$ and $x\hat{A} = 0$ for every $\hat{A}$ then $x = 0$. More*

specifically, if M is any maximal left ideal in R containing the left annihilator $l(x)$ of x, and if $\hat{A}$ is the injective hull of R/M, then $x\hat{A} \neq 0$.

PROOF. The cyclic module Rx is isomorphic to $R/l(x)$, which can be mapped onto R/M. This gives a nonzero mapping of Rx into the injective hull $\hat{A}$ of R/M, which must be of the form $rx \to rxa$ for some fixed a in $\hat{A}$. Hence $xa \neq 0$.

THEOREM 4. *Let R be a ring with unit and with* (JACOBSON) *radical N. Suppose that the injective hull of every simple left R-module has finite length. Then N is a nilideal and $\bigcap_{i=1}^{\infty} N^i = 0$. Furthermore, if R has only a finite number of isomorphism classes of simple modules, then N is nilpotent.*

PROOF. First we remark that, since N annihilates every simple module, NB has smaller length than B for every module B of finite length. Thus $N^k B = 0$ for some k.

Now let $n \in N$. If there is a single maximal left ideal M containing all the left annihilators $l(n^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, then by Lemma 6, the injective hull $\hat{A}$ of R/M satisfies $n^i \hat{A} \neq 0$ for all i, which contradicts the fact that $N^k \hat{A} = 0$ for some k. Thus $\bigcup_{i=1}^{\infty} l(n_i) = R$, so that 1 annihilates some n^i, proving that N is nil.

Next, if $n \in \bigcap_i N^i$, then n annihilates every module of finite length. Under the hypotheses of our Theorem, we may apply Lemma 6 to conclude $n = 0$.

Finally, if there is only a finite number of nonisomorphic simple modules, there is only a finite number of nonisomorphic injective hulls $\hat{A}$. Then a single power of N annihilates them all, and, by Lemma 6, this power of N is 0.

REMARK. It is not true that N is nilpotent if we assume only that the injective hulls of the simple modules have finite lengths. For example, let $C_i = K[x]/x^i K[x]$ where K is a field and x an indeterminate. Let R be the K-algebra obtained by adjoining a unit (algebra style) to the direct sum of the C_i. Then the radical of R is nil but not nilpotent, while the injective hull of every simple R-module has finite length.

From now on we suppose R is a commutative ring with unit. For any maximal ideal M of R there is associated a ring of quotients R_M and a ring-homomorphism $R \to R_M$ such that every element of R which is not in M maps into a unit in R_M, and R_M is universal with respect to this property; that is, any ring-homomorphism $R \to S$ which associates units to all elements outside M is factorable thus: $R \to R_M \to S$. In particular, if A is any R-module with the property that every element of R not in M induces an automorphism of A, then A is an R_M-module in a natural way (take $S = \mathrm{Hom}_R(A, A)$). We should also note that R_M has a unique maximal ideal [*10*, Chapter IV, §§ 9–11].

We can now localize our basic hypothesis as follows:

LEMMA 7. *Let R be a commutative ring with unit, M a maximal ideal in R, $A = R/M$ and $\hat{A}$ the injective hull of A. Then A and $\hat{A}$ are R_M-modules. As an*

R_M-module, A is still simple and $\hat{A}$ is its injective hull. Furthermore, $\hat{A}$ has finite length as an R-module if and only if it has finite length as an R_M-module.

PROOF. Let $t \in R$, $t \notin M$. Then t acts on A as a nonzero element of the field R/M; thus t acts as an automorphism of A. It follows that A is an R_M-module. Every R_M-submodule of A will be an R-submodule, so A is a simple R_M-module.

Now consider the action of t on $\hat{A}$. The kernel of this operation is a submodule of $\hat{A}$ intersecting A in 0. Since $\hat{A}$ is an essential extension of A, this kernel is 0. It follows that $t\hat{A} \cong \hat{A}$ so that $t\hat{A}$ is an injective submodule of $\hat{A}$ containing A (we proved above that $tA = A$). Thus $t\hat{A} = \hat{A}$, showing that t induces an automorphism of $\hat{A}$[6]). Once again this implies that $\hat{A}$ is an R_M-module. Clearly, if $\hat{A}$ satisfies chain conditions on R-submodules, it will also satisfy chain conditions on R_M-submodules. Conversely, if $\hat{A}$ has an R_M-composition series, the factors will be isomorphic to R/M (the only simple R_M-module) which is also a simple R-module; thus this same series will be an R-composition series.

In the same vein, if $\hat{A}$ is an essential extension of A as an R-module, it will be likewise as R_M-module. It remains to prove $\hat{A}$ is R_M-injective. If X is any R_M-module, it is an easy consequence of the definition of R_M that the ring of operators on X induced by R_M is generated by the operators induced by R and the inverses of the operations by elements of R not in M. It follows that $\mathrm{Hom}_R(X, \hat{A}) = \mathrm{Hom}_{R_M}(X, \hat{A})$. Since the first of these Hom's is an exact functor of X, so is the second, proving $\hat{A}$ is R_M-injective.

THEOREM 5. *Let R be a commutative ring with unit. Then the injective hull of a simple R-module R/M has finite length if and only if R_M is a ring with minimum condition.*

PROOF. If R_M satisfies the minimum condition, the R_M-injective hull of R/M has finite length as an R_M-module by Theorem 3. Lemma 7 then completes the proof. Conversely if the injective hull of R/M has finite length, the radical N of R_M must be nilpotent by Theorem 4 and the modules $\mathrm{Hom}_{R_M}(N^i/N^{i+1}, R/M)$ have finite length by Lemma 2. Since R_M is commutative, this simply means that N^i/N^{i+1} is a finite dimensional vector space over the field R/M, so that R_M does indeed satisfy the minimum condition.

COROLLARY. *If R is an integral domain and some simple R-module has an injective hull of finite length, then R is a field.*

PROOF. Suppose the injective hull of R/M has finite length. Then R_M is an integral domain with minimum condition by Theorem 5. Thus R_M must

[6]) Even for noncommutative R and for nonsimple modules A, this proof shows that if u is an element of $S = \mathrm{Hom}_R(\hat{A}, \hat{A})$ which vanishes on A, then $1 + u$ is an automorphism of $\hat{A}$. Hence, these elements u form a radical left ideal U of S. If, besides, A is a characteristic submodule of $\hat{A}$ (e.g., if A is semisimple) then U is a two-sided ideal and, from the injectivity of $\hat{A}$, it is trivial to prove that $S/U = \mathrm{Hom}_R(A, A)$ (cf. [6, Theorem 4.2]).

be a field. But this means $MR_M=0$, $M=0$ [*10*, Chapter IV, Theorem 19] so that R is a field.

LEMMA 8. *Let R be a commutative ring and M a maximal ideal in R. Then R/M is itself an injective R-module if and only if R_M is a field.*

PROOF. If R/M is R-injective, then it is R_M-injective by Lemma 7, and the radical of R_M is zero by Lemma 6. Thus R_M is a field. Conversely, if R_M is a field, R/M is R_M-injective, hence R-injective by Lemma 7.

The next result was first found by I. KAPLANSKY, who proved it by direct methods.

THEOREM 6. *A commutative ring R (with unit) is (von Neumann-) regular if and only if every simple R-module is injective.*

PROOF. We shall show that R is regular if and only if every R_M is a field. If R is regular, consider its image R' under the mapping $R\to R_M$. Since R' is also regular, every element not a zero divisor is a unit. The images of elements not in M are not zero divisors even in R_M, so they have inverses in R'. Thus $R_M=R'$ is a regular ring with a unique maximal ideal. Hence R_M is a field.

For the converse, we remark that the natural identification $R_M\to R_M\otimes_R R$ induces an identification of the mapping $R\to R_M$ with the mapping $a\to 1\otimes a$ for $a\in R$. If R_M is a field, the ideals generated by $1\otimes a$ and by $1\otimes a^2$ are equal. Since R_M is R-flat [*3*, VII, Ex. 10] these ideals are $R_M\otimes Ra$ and $R_M\otimes Ra^2$, respectively. Thus $(R_M\otimes Ra)/(R_M\otimes Ra^2)=R_M\otimes(Ra/Ra^2)=0$ for all $a\in R$ and all M. By [*3*, VII, Ex. 11] this implies $Ra/Ra^2=0$ for all a; that is, $a=a^2x$ for some x in R. Thus R is regular.

References

[*1*] ARTIN, E., C. NESBITT and R. THRALL: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948. — [*2*] AZUMAYA, G.: A duality theory for injective modules, to appear in Amer. J. Math. — [*3*] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton University Press 1956. — [*4*] ECKMANN, B., and A. SCHOPF: Über injektive Moduln. Arch. der Math. **4**, 75—78 (1953). — [*5*] JACOBSON, N.: Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **37**, Providence (1956). — [*6*] MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA: On injective modules. Math. Z. **68**, 217—226 (1957). — [*7*] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164—170 (1953). — [*8*] Problems of Mathematics. Princeton University Bicentennial Conference, Princeton, N. J., 1946. — [*9*] TACHIKAWA, H.: Duality Theorem of Character Modules for Rings with Minimum Condition. Math. Z. **68**, 479—487 (1958). — [*10*] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative algebra. New York 1958. — [*11*] MORITA, K.: Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku., Sec. A **6**, 83—142 (1958).

Dept. of Math., Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)

(Eingegangen am 1. Juni 1958)

MÜLLER, P. H.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 381–406 (1959)

Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben

Von
P. HEINZ MÜLLER

0. Einleitung

0.a. In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Theorie für die Behandlung von einigen wichtigen Typen nichtlinearer Eigenwertaufgaben entwickelt. Unter einer nichtlinearen Eigenwertaufgabe verstehen wir eine Funktionalgleichung, deren Lösbarkeitseigenschaften von einem irgendwie nichtlinear auftretenden Parameter abhängen. Derartigen Aufgaben begegnet man z. B. bei gewissen technischen Problemen. Das Literaturverzeichnis, Teil A — die hierher gehörenden Arbeiten werden mit Ziffern in runden Klammern zitiert — gibt einen Überblick der wichtigsten bis in die letzte Zeit erschienenen einschlägigen Veröffentlichungen.

Gegenstand unserer Betrachtungen ist — auch im Hinblick auf das Interesse für die Anwendungen — die Gleichung

$$(N_0) \qquad f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = 0;$$

die genauen Voraussetzungen geben wir in 1.a an.

0.b. Mit diesem Gleichungstyp haben sich vor allem C. MIRANDA (Formulierung für Integralgleichungen) und D. F. CHARASOW (Formulierung für lineare Operatoren in Hilbertschen Räumen) in einer Reihe von Arbeiten beschäftigt, s. insbesondere (*15*), (*37*) und (*43*) Literaturverzeichnis A. Es zeigt sich, daß für die Eigenwerte und Eigenelemente eine Anzahl Theoreme gelten (Realität der Eigenwerte, Extremaleigenschaften der Eigenwerte, Entwicklungssätze, Auflösungsformel), die den entsprechenden Aussagen der klassischen (linearen) Eigenwertaufgabe mit vollstetigem und symmetrischen Operator eng verwandt sind. Die Untersuchungen werden bei MIRANDA mit Hilfe der Variationsrechnung und bei CHARASOW mittels Abbildungen endlichen Ranges vorgenommen. Zur Durchführbarkeit dieser Methoden werden dem Problem folgende beiden Bedingungen auferlegt:

1. Alle in (N_0) auftretenden Abbildungen sind von endlicher Doppelnorm (bei MIRANDA also quadratisch integrable Kerne).

2. Die Abbildungen H_k sind von endlichem Range.

Die durch Gleichung (N_0) gegebene Aufgabenstellung mit diesen beiden Zusatzbedingungen wollen wir als „Miranda-Charasow-Problem" bezeichnen.

0.c. Der von uns beschrittene Weg kann auf diese Einschränkungen verzichten; wir setzen von den Abbildungen $A, B, H_1, \ldots, H_n$ lediglich Vollstetigkeit voraus. Die im folgenden benutzte Methode soll kurz beschrieben werden:

Die in 1.c beschriebene, ebenfalls bezüglich des Parameters nichtlineare Aufgabe (N) läßt sich (im großen) linearisieren (Kapitel 2). Die Anregung hierzu verdankt der Verfasser einer mündlichen Mitteilung von H. WIELANDT, der wohl als erster 1944 in unveröffentlichten Untersuchungen die Linearisierung nichtlinearer Eigenwertaufgaben, und zwar bei Polynomabhängigkeit vom Parameter, vorgenommen hat. Dieses Vorgehen erweist sich auch bei unserem Gleichungstyp (N_0) als äußerst vorteilhaft. In einem Produktraum mit geeignet gewählter Metrik existiert eine solche lineare, symmetrische Abbildung, deren Spektrum mit dem der gestellten Aufgabe im wesentlichen identisch ist. Die Eigenelemente von nichtlinearer und linearer Aufgabe entsprechen eineindeutig einander (Kapitel 3). Zu dieser Eigenwertaufgabe liegt eine wohlbekannte Theorie vor, von der sich die Sätze für das nichtlineare Problem unmittelbar übertragen lassen. Es ergibt sich somit eine Beantwortung unserer Aufgabe in dem gleichen weiten Umfange wie im entsprechenden linearen Fall.

0.d. Indem wir auf eine Wiederholung der bereits von MIRANDA und CHARASOW aufgestellten Ergebnisse — die nach unseren Überlegungen jedoch unter den oben angegebenen allgemeineren Voraussetzungen gelten — verzichten wollen, beschränken wir uns auf die Aufstellung von Entwicklungssätzen (Kapitel 4) und die Herleitung der Auflösungsformel zu (N) (Kapitel 5). Wir wählen damit diejenigen Fragestellungen, bei denen der Unterschied zu den bisherigen Resultaten besonders bemerkenswert scheint.

Wir erhalten ein umfangreiches System von Entwicklungssätzen, das die von MIRANDA und CHARASOW aufgestellten Formeln umfaßt. Die Entwicklungen verstehen sich bei uns im Sinne der starken Konvergenz (Normtopologie).

Das Miranda-Charasow-Problem entspricht einer linearen Eigenwertaufgabe mit vollstetiger Abbildung. Es kann (mit Hilfe unserer Linearisierung) erschöpfend durch die von REID und ZAANEN begründete Theorie der symmetrisierbaren Transformationen behandelt werden. Demgegenüber entspricht der von uns betrachtete allgemeinere Fall einer linearen Eigenwertaufgabe mit im allgemeinen nur beschränkter Abbildung (es können im Endlichen Häufungspunkte der Eigenwerte auftreten) und erfordert tieferliegende Überlegungen. Den Zugang zu den Entwicklungssätzen liefert ein Theorem von DUNFORD.

0.e. Die für die Durchführung der Beweise benutzte Literatur ist im Literaturverzeichnis Teil B zusammengestellt, dessen einzelne Quellen im Text mit Ziffern in eckigen Klammern zitiert werden. Zur Erleichterung des Nachschlagens wurden die für unseren Zusammenhang inhaltsreichen Monographien [5] und [6] weitgehend benutzt.

0.f. Für den Begriff des Spektrums einer linearen beschränkten Abbildung T (in einem Hilbertschen Raume) treffen wir folgende Festsetzung:

Mit $\Sigma_p(T)$, $\Sigma_c(T)$, $\Sigma_r(T)$ und $\Sigma(T)$ bezeichnen wir diejenigen Mengen, die in [2], S. 13 und [6], S. 292 bzw. als das Punkt-, das kontinuierliche, das Residualspektrum und das Spektrum von T definiert werden. Für unseren Zusammenhang empfiehlt es sich, diese Bezeichnungen anders zu gebrauchen. Wir nennen jeweils die Mengen der reziproken Werte, also die Mengen

$$\sigma_p(T) = \left\{\lambda : \lambda = \frac{1}{\mu},\ \mu \neq 0,\ \mu \in \Sigma_p(T)\right\},$$

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda : \lambda = \frac{1}{\mu},\ \mu \neq 0,\ \mu \in \Sigma_c(T)\right\},$$

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda : \lambda = \frac{1}{\mu},\ \mu \neq 0,\ \mu \in \Sigma_r(T)\right\},$$

$$\sigma(T) = \left\{\lambda : \lambda = \frac{1}{\mu},\ \mu \neq 0,\ \mu \in \Sigma(T)\right\}$$

bzw. das Punkt-, das kontinuierliche, das Residualspektrum und das Spektrum von T.

Offenbar gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Die Elemente von $\Sigma_p(T)$ heißen auch Eigenwerte von T.

1. Aufgabenstellung

1.a. Bezeichnungen. R vollständiger, separabler, unendlichdimensionaler Hilbertscher Raum. Elemente f, g, h, s, x, y, z. o Nullelement. (f, g) Skalarprodukt (definit); $\|f\|$ zugehörige Norm.

E identische Abbildung in R: $Ez = z$ für jedes $z \in R$.

Θ Nullabbildung in R: $\Theta z = o$ für jedes $z \in R$.

a_k $(k = 1, \ldots, n)$ reelle Zahlen; für das folgende bedeutet es keine Einschränkung vorauszusetzen: $a_k \neq a_j$ $(k \neq j)$ und $a_k \neq 0$.

$A, B, H_1, \ldots, H_n$ lineare vollstetige, symmetrische Abbildungen von R in sich, nicht alle gleich Θ, wobei B, $\frac{1}{a_1} H_1, \ldots, \frac{1}{a_n} H_n$ positiv sein sollen[1]).

λ komplexer Parameter.

1.b. Folgerung. Es existieren die Abbildungen

$$B^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

definiert durch

$$B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = B \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_k} H_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Diese „Quadratwurzeln" sind lineare, beschränkte (sogar vollstetige) positive (also auch symmetrische) Abbildungen in R; vgl. [5], S. 262 und 227.

[1]) Eine Abbildung T nennen wir positiv, wenn $(Tf, f) \geqq 0$ gilt für jedes $f \in R$. Wenn aus $f \neq o$ stets $(Tf, f) > 0$ folgt, dann heißt T streng positiv.

Der Wertebereich von $\left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}}$, bezeichnet mit $W\left(\left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, ist offenbar Linearmannigfaltigkeit in R. Die zugehörige abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit, bezeichnet mit $\left[W\left(\left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$, ist offenbar Teilraum in R.

1.c. Gegenstand unserer Betrachtungen sind die Gleichung

$$\text{(N)} \qquad f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = g$$

und die zugehörige „homogene Gleichung"

$$(\mathrm{N}_0) \qquad f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = o.$$

1.d. DEFINITIONEN. Jede komplexe Zahl $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, für die (N_0) mit einem Element $f \neq o$ erfüllt ist, heißt ein „(regulärer) Eigenwert" von (N) oder (N_0); f heißt ein zugehöriges „(reguläres) Eigenelement".

Jede komplexe Zahl $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, für die die Gleichung (N) bei beliebiger rechter Seite $g \in R$ eindeutig nach f auflösbar ist, heißt „Vollwert" von (N).

a_j heißt „singulärer Wert" von (N) oder (N_0), wenn es ein Elementenpaar x, y_j gibt, so daß gilt

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} x - a_j A x - a_j^2 B x + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k x - a_j \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} y_j = o, \\ \text{wobei } H_j x = o, \quad y_j \in \left[W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right], \quad \|x\| + \|y_j\| > 0. \end{cases}$$

Gilt speziell $y_j \in W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, so gibt es ein Element z_j mit $y_j = \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} z_j$; (1.1) lautet dann

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} x - a_j A x - a_j^2 B x + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k x - H_j z_j = o, \\ \text{wobei } H_j x = o, \ \|x\| + \|z\| > 0. \end{cases}$$

Der letzte Fall tritt z.B. ein, wenn H_j von endlichem Range ist (Miranda-Charasow-Problem); es gilt dann bekanntlich (vgl. z.B. [6], S. 192)

$$W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \left[W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Wir bezeichnen $\{x, y_j\}$ als ein zu a_j gehörendes „singuläres Elementenpaar". Gilt speziell $x \neq o$, so heißt a_j „singulärer Eigenwert", $\{x, y_j\}$ „singuläres Eigenelementenpaar" und x „singuläres Eigenelement".

1.e. Die Abbildung

$$V_\lambda = \lambda A + \lambda^2 B - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k$$

ist offenbar für jedes $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ vollstetig. Wir vermerken uns daher als einfache Folgerung der Riesz-Schauder-Theorie den

SATZ 1. *Jede komplexe Zahl $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ ist entweder (regulärer) Eigenwert oder Vollwert von* (N).

2. Linearisierung von (N)

2.a. DEFINITIONEN. Wir definieren folgende Mengen:

$$L = \{x \mid Bx = o\}, \quad L_k = \{x \mid H_k x = o\} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

L, L_k $(k = 1, \ldots, n)$ sind offenbar Teilräume (abgeschlossene Linearmannigfaltigkeiten) in R.

Weiter betrachten wir die abgeschlossenen Hüllen der Wertebereiche von B und H_k $(k = 1, \ldots, n)$:

$$M = \overline{B(R)}, \quad M_k = \overline{H_k(R)} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Wegen der Vollständigkeit von R gelten die Zerlegungen in die direkten Summen

$$R = L \oplus M, \quad R = L_k \oplus M_k \quad (k = 1, \ldots, n);$$

vgl. [6], S. 98, S. 115 ff., S. 285/286.

Die Projektionen auf M bzw. M_k nennen wir P bzw. P_k:

$$M = P(R), \quad M_k = P_k(R) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Es gilt

$$P^2 = P, \quad P_k^2 = P_k \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

und

$$B = BP = PB, \quad H_k = H_k P_k = P_k H_k \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{2.2}$$

vgl. [6], S. 218.

FOLGERUNG. Mit den Bezeichnungen von 1.b gilt

$$\begin{cases} B^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} P = P B^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} P_k = P_k \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} \\ (k = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{2.3}$$

BEWEIS. Es ist z. B. wegen (2.2)

$$\|B^{\frac{1}{2}} f - B^{\frac{1}{2}} P f\|^2 = (B^{\frac{1}{2}}(E - P) f, B^{\frac{1}{2}}(E - P) f) = ((E - P) f, B f - B P f) = 0,$$

für jedes $f \in R$. Also ist $B^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} P$. Ferner ist nach einem bekannten Satze $B^{\frac{1}{2}}$ mit P vertauschbar, vgl. [5], S. 262/263. Also gilt $B^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} P = P B^{\frac{1}{2}}$.

2.b. DEFINITIONEN. Wir bilden den Produktraum

$$\mathfrak{R} = \underbrace{R \times R \times R \times \cdots \times R}_{2 + n \text{ Faktoren}}$$

mit den Elementen

$$\mathfrak{f} = \{f, f', f_1, \ldots, f_n\}, \quad \mathfrak{g} = \{g, g', g_1, \ldots, g_n\}, \quad \text{usw.}$$
$$0 = \{o, o, o, \ldots, o\} \quad \text{Nullelement.}$$

$\mathfrak{E}$ bezeichne die identische Abbildung in $\mathfrak{R}$.

In $\mathfrak{R}$ definieren wir das skalare Produkt

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = (f, g) + (f', g') + \sum_{k=1}^{n} (f_k, g_k) \tag{2.4}$$

und dadurch die Norm

$$\|\mathfrak{f}\|_{\mathfrak{R}}^2 = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_{\mathfrak{R}} = \|f\|^2 + \|f'\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2. \tag{2.5}$$

Addition und skalare Multiplikation der Elemente von $\mathfrak{R}$ nehmen wir wie üblich (komponentenweise) vor. Dann wird $\mathfrak{R}$ mit dem definiten Skalarprodukt (2.4) und der dadurch erzeugten Norm (2.5) offenbar linear, unendlichdimensional, vollständig und separabel, also ein Hilbertscher Raum.

2.c. Die Matrix

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} A & B & \frac{1}{a_1} H_1 & \cdots & \frac{1}{a_i} H_i & \cdots & \frac{1}{a_n} H_n \\ P & & & & & & \\ P_1 & & \frac{1}{a_1} P_1 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ P_i & & & & \frac{1}{a_i} P_i & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ P_n & & & & & & \frac{1}{a_n} P_n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

— die nicht bezeichneten Stellen sind mit Θ auszufüllen — definiert in $\mathfrak{R}$ die lineare und beschränkte Abbildung (vgl. [6], S. 157)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{R}\mathfrak{f};$$

ausgeschrieben lautet sie

$$g = Af + Bf' + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} H_i f_i,$$
$$g' = Pf,$$
$$g_i = P_i f + \frac{1}{a_i} P_i f_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

2.d. Es sei λ eine komplexe Zahl und $\mathfrak{f}$ irgendein Element aus $\mathfrak{R}$. Das Bild von $\mathfrak{f}$ mittels der Abbildung $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{R})$ nennen wir $\mathfrak{s}$:

$$(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{R})\mathfrak{f} = \mathfrak{s}. \tag{$\mathfrak{L}$}$$

Die Lösungen $\mathfrak{f} \neq 0$ der homogenen Gleichung

$$(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{R})\mathfrak{f} = 0 \tag{$\mathfrak{L}_0$}$$

heißen Eigenelemente und die zugehörigen λ Eigenwerte von ($\mathfrak{L}$), ($\mathfrak{L}_0$) oder $\mathfrak{R}$.

Jede komplexe Zahl λ, für die ($\mathfrak{L}$) bei beliebiger rechter Seite $\mathfrak{s}$ eindeutig nach $\mathfrak{f}$ auflösbar ist, heißt Vollwert von ($\mathfrak{L}$) oder $\mathfrak{R}$.

Gleichung ($\mathfrak{L}$) ist nach 2.c mit folgendem System äquivalent:

$$f - \lambda A f - \lambda B f' - \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} H_k f_k = s, \tag{2.7}$$

$$f' - \lambda P f = s', \tag{2.8}$$

$$\left(E - \frac{\lambda}{a_k} P_k\right) f_k - \lambda P_k f = s_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.9}$$

2.e. Es sei zunächst $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Wegen (2.2) folgt aus (2.8)

$$B f' = \lambda B f + B s'$$

und aus (2.9)

$$-\frac{1}{a_k} H_k f_k = \frac{\lambda}{\lambda - a_k} H_k f + \frac{1}{\lambda - a_k} H_k s_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Damit ergibt sich aus (2.7)

$$f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = s + \lambda B s' - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - a_k} H_k s_k. \tag{2.10}$$

Hieraus erkennt man leicht: Aus der eindeutigen Lösbarkeit von ($\mathfrak{L}$) für jede rechte Seite $\mathfrak{s}$ folgt die eindeutige Lösbarkeit von (N) für jede rechte Seite g.

Es sei umgekehrt (N) für jede rechte Seite eindeutig auflösbar. Bei willkürlich gegebenem $\mathfrak{s}$ ist dann das Element f nach (2.10) eindeutig festgelegt. f' ergibt sich (eindeutig) aus (2.8). Da das Spektrum einer Projektion nur aus den Eigenwerten 0 und 1 besteht (vgl. [6], S. 295), sind wegen $\lambda \neq a_k$ die Elemente f_k (eindeutig) durch (2.9) festgelegt. Gleichung (2.7) ist infolge der Gültigkeit von (2.8), (2.9) und (2.10) erfüllt. Also ist ($\mathfrak{L}$) für jede rechte Seite $\mathfrak{s}$ eindeutig nach $\mathfrak{f}$ auflösbar.

Wir fassen zusammen:

LEMMA. *Die Gleichungen* (N) *und* ($\mathfrak{L}$) *sind für dieselben* $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ *für beliebige rechte Seiten* $g \in R$ *bzw.* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{R}$ *eindeutig lösbar.*

2.f. LEMMA. *Die Gleichungen* (N) *und* ($\mathfrak{L}$) *haben dieselben Eigenwerte* $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

BEWEIS. α) Es sei $\mathfrak{f} \neq 0$ Lösung von ($\mathfrak{L}_0$). Dann gilt infolge (2.10) bei $s = s' = s_1 = \cdots = s_n = o$ auch Gleichung (N_0). $f = o$ würde wegen (2.8) und (2.9) nach sich ziehen $f' = o$ und $f_k = o$ $(k = 1, \ldots, n)$. Das bedeutete aber $\mathfrak{f} = 0$. Also gilt (N_0) mit $f \neq o$.

β) Es sei $f \neq o$ Lösung von (N_0). Mit f' aus (2.8) bei $s' = o$ und mit f_k aus (2.9) bei $s_k = o$ ergibt sich dann $\mathfrak{f} \neq 0$ als Lösung von ($\mathfrak{L}_0$).

2.g. Folgerung von Satz 1, Lemma 2.e und Lemma 2.f.

LEMMA. *Jede komplexe Zahl* $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ *ist entweder Eigenwert oder Vollwert von* $\mathfrak{R}$.

2.h. Wir betrachten jetzt Gleichung $(\mathfrak{L})$ für den Fall $\lambda = a_j$. Aus (2.7) erhalten wir wegen (2.8) und (2.9) $(k \neq j)$ an Stelle von (2.10)

$$(2.11)\quad \begin{cases} f - a_j A f - a_j^2 B f + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \dfrac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k f - H_j f_j \\ \qquad = s + a_j B s' - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \dfrac{a_j}{a_j - a_k} H_k s_k, \end{cases}$$

während aus (2.9) für $k = j$ folgt

$$(2.12)\qquad (E - P_j) f_j - a_j P_j f = s_j$$

und

$$(2.13)\qquad - a_j P_j f = P_j s_j.$$

2.i. BEHAUPTUNG. Es sei $\mathfrak{f} = \{f, f', f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_n\}$ Eigenelement zum Eigenwert von a_j von $(\mathfrak{L})$. Dann gilt $f \neq o$.

BEWEIS. Es sei $f = o$.

Dann folgt aus (2.8): $f' = o$ und aus (2.9): $f_k = o$ $(k = 1, \ldots, n;\ k \neq j)$.

Aus (2.12) ergibt sich: $(E - P_j) f_j = o$, d.h. nach 2.a $f_j \in M_j$.

Andererseits ist wegen (2.11): $H_j f_j = o$, d.h. nach 2.a $f_j \in L_j$. Also gilt auch $f_j = o$ und somit insgesamt $\mathfrak{f} = 0$.

2.j. LEMMA. *Es sei a_j Eigenwert von $(\mathfrak{L}_0)$. Dann ist a_j singulärer Eigenwert von (N_0).*

BEWEIS. Wegen $s = s' = s_1 = \cdots = s_n = o$ ist Gleichung (2.11) identisch mit (1.2). $H_j f = o$ gilt wegen (2.13) und $\|f\| > 0$ wegen 2.i.

BEMERKUNG. Man überlegt sich leicht, daß die Umkehrung der Aussage von Lemma 2.j im allgemeinen nicht richtig ist. Lediglich bei Bestehen von (1.2) mit $x \neq o$ ist a_j Eigenwert von $(\mathfrak{L}_0)$.

Das ist z.B. der Fall, wenn

$$W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \left[W\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

gilt (vgl. 1.b und 1.d), und dafür ist hinreichend, daß H_j einen endlichen Rang hat; vgl. [6], S. 192. Den sehr einfachen Beweis hierfür unterlassen wir.

2.k. Es sei H_j streng positiv. $H_j f = o$ zieht nach sich $f = o$, oder (s. 2.a) $P_j = E$. Aus (1.1) folgt dann $x = o$, daraus weiter $\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} y = o$, also auch $H_j y = o$, d.h. $y = o$. Also ist a_j kein singulärer Wert von (N).

Wir zeigen, daß $(\mathfrak{L})$ für $\lambda = a_j$ (vgl. hierzu 2.h) nicht mit jeder rechten Seite $\mathfrak{s}$ lösbar ist. Dazu beachten wir den bekannten Sachverhalt, daß es wegen der Vollstetigkeit von H_j ein Element $h \in R$ mit $h \notin W(H_j)$ gibt. Angenommen $(\mathfrak{E} - a_j \mathfrak{A})\mathfrak{f} = \mathfrak{s}$ wäre mit $\mathfrak{s} = \{-h, o, o, \ldots, o\}$ lösbar, dann folgt aus (2.13) $f = o$ und damit aus (2.11) $H_j f_j = h$, im Widerspruch zur Voraussetzung über h.

Wir fassen zusammen:

LEMMA. *Falls H_j streng definit ist, kann a_j weder singulärer Wert von* (N_0) *noch Vollwert von* $(\mathfrak{L})$ *sein.*

2.l. Wir nehmen jetzt an, daß die Abbildungen $H_1, \ldots, H_n$ von endlichem Range sind (Miranda-Charasow-Problem). Dann folgt wegen

$$M_k = P_k(R) = \overline{H_k(R)} = H_k(R) \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad \text{(vgl. 2.a)},$$

daß die Teilräume M_k endlichdimensional sind. Die Projektionen P_k sind ebenfalls von endlichem Range, und zwar vom gleichen wie die entsprechenden H_k. Da jede Abbildung endlichen Ranges vollstetig ist (vgl. [6], S. 312), enthält $\mathfrak{R}$, vgl. (2.6), nur vollstetige Abbildungen, abgesehen von P. Damit ergibt sich, daß $\mathfrak{R}^2$ gebildet nach den üblichen Regeln der Matrizenmultiplikation, vgl. [6], S. 176) vollstetig in $\mathfrak{R}$ wird.

Für $\mathfrak{R}$ gelten also die Aussagen der Riesz-Schauder-Theorie. Mit 2.f und 2.j folgt daher

SATZ 2. *Sind die Abbildungen $H_1, \ldots, H_n$ von endlichem Range, so bilden die (regulären und singulären) Eigenwerte von* (N_0) *eine endliche oder abzählbar unendliche Menge. Im letzten Falle häufen sich die Eigenwerte gegen Unendlich.*

2.m. BEMERKUNG. Satz 2 gilt allgemeiner für die Aufgabe

$$f - \sum_{i=1}^{m} \lambda^i A_i f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = g,$$

wobei $A_1, \ldots, A_m, H_1, \ldots, H_n$ lineare vollstetige Abbildungen in einem Banachschen Raume sind; $H_1, \ldots, H_m$ sind außerdem von endlichem Range und $a_1, \ldots, a_n$ irgendwelche komplexe Zahlen (verschieden von Null).

Man linearisiert hier mittels der Matrix-Transformation

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & \frac{1}{a_1} H_1 & \cdots & \frac{1}{a_i} H_i & \cdots & \frac{1}{a_n} H_n \\ E & & & & & & & & \\ & E & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E\ \Theta & & & & & \\ E & & & & \frac{1}{a_1} E & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \\ E & & & & & & \frac{1}{a_i} E & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ E & & & & & & & & \frac{1}{a_n} E \end{pmatrix};$$

die nicht bezeichneten Stellen sind wieder mit Θ auszufüllen.

Der Beweis entspricht unserem obigen Vorgehen. Die unter 2.a eingeführten Größen und damit verbundenen Aussagen sind hierbei ohne Bedeutung.

Im Hinblick auf unsere Zielsetzung wird diese Verallgemeinerung nicht weiter verfolgt.

3. Symmetrisierung von $\mathfrak{R}$

3.a. DEFINITION. Wir betrachten in $\mathfrak{R}$ die lineare und beschränkte Abbildung (vgl. [6], S. 175)

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} E & & & & \\ & B & & & \\ & & \frac{1}{a_1} H_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_n} H_n \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\mathfrak{H}\mathfrak{f} = \left\{f, Bf', \frac{1}{a_1} H_1 f_1, \ldots, \frac{1}{a_n} H_n f_n\right\}. \tag{3.1}$$

Unter den Voraussetzungen in 1.a ist offenbar $\mathfrak{H}$ symmetrisch und positiv:

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \geq 0 \qquad \text{für alle } \mathfrak{f} \in \mathfrak{R}.$$

Es existiert die lineare, beschränkte, positive symmetrische Abbildung

$$\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} E & & & & \\ & B^{\frac{1}{2}} & & & \\ & & \left(\frac{1}{a_1} H_1\right)^{\frac{1}{2}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \left(\frac{1}{a_n} H_n\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

3.b. LEMMA. *$\mathfrak{R}$ wird durch $\mathfrak{H}$ stark symmetrisiert; d.h.*

α) es ist $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ symmetrisch in $\mathfrak{R}$,

β) aus $\mathfrak{H}\mathfrak{f} = 0$ folgt $\mathfrak{R}\mathfrak{f} = 0$.

(Vgl. hierzu [6], S. 250ff., S. 258ff., S. 370ff.)

BEWEIS. α) Die Symmetrie von $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ erkennt man sofort durch Ausführung der Matrizenmultiplikation von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{R}$.

β) Nach 2.c gilt

$$\begin{cases} \mathfrak{R}\mathfrak{f} = \left\{Af + Bf' + \frac{1}{a_1} H_1 f_1 + \cdots + \frac{1}{a_n} H_n f_n, Pf, \right. \\ \qquad \left. P_1 f + \frac{1}{a_1} P_1 f_1, \ldots, P_n f + \frac{1}{a_n} P_n f_n\right\}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Beachtet man, daß nach 2.a $P_k f_k = o$ mit $H_k f_k = o$ $(k = 1, \ldots, n)$ äquivalent ist, so erkennt man durch Vergleich von (3.1) mit (3.2) die Gültigkeit von β.

3.c. DEFINITION. Wir betrachten in $\mathfrak{R}$ die lineare und beschränkte Abbildung

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} E & & & \\ & P & & \\ & & P_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & P_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathfrak{P}^2=\mathfrak{P}$, d.h. $\mathfrak{P}$ ist Projektion. Ferner ist

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\mathfrak{R}, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\mathfrak{H}, \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{H}^{\natural}=\mathfrak{H}^{\natural}\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\mathfrak{H}^{\natural}. \tag{3.5}$$

Der Beweis von (3.3) und (3.4) erfolgt durch Ausführung der Matrizenmultiplikationen. (3.5) ergibt sich unter Beachtung von 2.a, Folgerung.

3.d. MIRANDA-CHARASOW-PROBLEM (die Abbildungen $H_1, \ldots, H_n$ sind von endlichem Range). Nach 2.1 ist $\mathfrak{R}^2$ vollstetig in $\mathfrak{R}$; wegen der starken Symmetrisierung von $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{H}$ (Lemma 3.b) läßt sich daher auf $\mathfrak{R}$ die wohlbekannte Theorie der vollstetigen symmetrisierbaren Abbildungen (vgl. [6], S. 370ff.) anwenden.

Nach Lemma 2.f, Lemma 2.j (Bemerkung) ist die Menge der Eigenwerte von $\mathfrak{R}$ mit der Menge der (regulären und singulären) Eigenwerte von (N_0) identisch und es geht aus den obigen Überlegungen hervor, daß dabei die Eigenelemente von $\mathfrak{R}$ und (N_0) eineindeutig einander entsprechen. Daher lassen sich die bekannten Spektralaussagen für $\mathfrak{R}$ [Existenz eines reellen Punktspektrum, Extremaleigenschaften der Eigenwerte, Maximum-Minimum-Prinzip, Entwicklungssätze nach den Eigenelementen, Auflösungsformel zu (N)] unmittelbar auf die Aufgaben (N) bzw. (N_0) umschreiben. Man erhält auf diese Weise einen einfachen Zugang für eine erschöpfende Behandlung des Miranda-Charasow-Problems.

3.e. DEFINITION. Es sei

$$\mathfrak{L}=\{\mathfrak{f}\,|\,\mathfrak{H}\mathfrak{f}=0\};\qquad \mathfrak{M}=[\mathfrak{H}(\mathfrak{R})].$$

BEMERKUNG. Es gilt wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$, nach 2.a, 3.a und 3.c

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{L}\oplus\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{L}=\{\mathfrak{f}\,|\,\mathfrak{P}\mathfrak{f}=0\};\qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{P}(\mathfrak{R}).$$

3.f. DEFINITION. Es bezeichnen (s. 2.a, 2.b, 3.e)

Z den Quotientenraum von R modulo L: $Z=R/L$

Z_k den Quotientenraum von R modulo L_k: $Z_k=R/L_k$ $\quad(k=1,\ldots,n)$

$\mathfrak{Z}$ den Quotientenraum von $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{Z}=\mathfrak{R}/\mathfrak{L}$;

vgl. hierzu [6], S. 99ff., S. 115ff., S. 218ff., S. 398ff.

1. FOLGERUNG. Bezeichnen wir die Elemente der einzelnen Quotientenräume mit

$$[f]'\in Z,\quad [f]_k\in Z_k\quad(k=1,\ldots,n),\quad [f]\in\mathfrak{Z},$$

so gilt

$$[\mathfrak{f}]=\{f\}\times[f]'\times[f]_1\times\cdots\times[f]_n.$$

Dabei ist

$$f'\in[f]',\quad f_k\in[f]_k\quad(k=1,\ldots,n),\quad \mathfrak{f}\in[\mathfrak{f}].$$

[0] bezeichne das Nullelement in $\mathfrak{Z}$.

Es ist also (vgl. 3.e) $\mathfrak{f}_1\in[\mathfrak{f}]$, $\mathfrak{f}_2\in[\mathfrak{f}]$ äquivalent mit $\mathfrak{H}(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{f}_2)=\mathfrak{P}(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{f}_2)=0$, und das bedeutet auch $\mathfrak{f}_1-\mathfrak{f}_2\in\mathfrak{L}$.

2. FOLGERUNG. Wenn $\mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}]$, dann gilt

$$\mathfrak{P}\mathfrak{f} = \mathfrak{P}([\mathfrak{f}]) \in [\mathfrak{f}]. \tag{3.6}$$

3.g. In Z, Z_k $(k = 1, \ldots, n)$ und $\mathfrak{Z}$ definieren wir skalare Produkte in folgender Weise (vgl. [6], S. 218ff.).

$$([f]', [g]')_Z = (Bf', g'), \quad f' \in [f]', \quad g' \in [g]'$$

$$([f]_k, [g]_k)_{Z_k} = (H_k f_k, g_k), \quad f_k \in [f]_k, \quad g_k \in [g]_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

und [s. hierzu 3.a, (2.4)]

$$\left\{ \begin{aligned} ([\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} &= (\mathfrak{H}\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}, \mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = (f, g) + ([f]', [g]')_Z + \\ &\quad + ([f]_1, [g]_1)_{Z_1} + \cdots + ([f]_n, [g]_n)_{Z_n}, \quad \mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}], \mathfrak{g} \in [\mathfrak{g}]. \end{aligned} \right. \tag{3.7}$$

Damit wird in $\mathfrak{Z}$ die Norm festgelegt durch [s. hierzu 3.a, (2.5)]

$$\|[\mathfrak{f}]\|_{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{H}\mathfrak{f}, \mathfrak{f})^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}, \mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f})^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{R}} = \|\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}\|_{\mathfrak{R}}, \quad \mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}]. \tag{3.8}$$

Der Quotientenraum $\mathfrak{Z}$ bildet mit der eben eingeführten Metrik einen Hilbertschen Raum (vgl. die in 3.f zitierte Literatur). Dieser ist offenbar separabel, aber nicht notwendig vollständig (vgl. [6], S. 221); es können z. B. die Elemente $[\mathfrak{f}_{(n)}]$ eine Fundamentalfolge in $\mathfrak{Z}$ bilden, ohne daß dies von $\mathfrak{P}\mathfrak{f}_{(n)} \in [\mathfrak{f}_{(n)}]$ in $\mathfrak{R}$ der Fall zu sein braucht.

3.h. DEFINITION. Wir betrachten in $\mathfrak{Z}$ die Abbildungen

$$[\mathfrak{A}][\mathfrak{f}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{f}], \quad [\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}][\mathfrak{f}] = [\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}].$$

Vgl. [6], S. 220 und 398.

Die identische Abbildung in $\mathfrak{Z}$ wird mit $[\mathfrak{E}]$ bezeichnet:

$$[\mathfrak{E}][\mathfrak{f}] = [\mathfrak{f}].$$

Es ist $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}$ verschieden von der Nullabbildung in $\mathfrak{R}$; demnach ist $[\mathfrak{A}]$ nicht gleich der Nullabbildung in $\mathfrak{Z}$ (vgl. 3.g). Aus (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) folgt

$$\left\{ \begin{aligned} ([\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} &= (\mathfrak{P}\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}, \mathfrak{P}\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}]), \mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{g}]))_{\mathfrak{R}} \\ &= (\mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}][\mathfrak{f}]), \mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}][\mathfrak{g}]))_{\mathfrak{R}}, \end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

$$\|[\mathfrak{f}]\|_{\mathfrak{Z}} = \|\mathfrak{P}\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}\|_{\mathfrak{R}} = \|\mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}])\|_{\mathfrak{R}} = \|\mathfrak{P}([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}][\mathfrak{f}])\|_{\mathfrak{R}}. \tag{3.10}$$

LEMMA. *$[\mathfrak{A}]$ ist linear, symmetrisch und beschränkt in $\mathfrak{Z}$.*

BEWEIS. Die Linearität ist klar. Symmetrie: Es gilt unter Beachtung von 3.f, 3.g und 3.b(α) für beliebige Elemente $[\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}] \in \mathfrak{Z}$

$$\begin{aligned} ([\mathfrak{A}][\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} &= ([\mathfrak{A}\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{H}\mathfrak{A}\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{f}, \mathfrak{H}\mathfrak{A}\mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} \\ &= (\mathfrak{H}\mathfrak{f}, \mathfrak{A}\mathfrak{g})_{\mathfrak{R}} = ([\mathfrak{f}], [\mathfrak{A}\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} = ([\mathfrak{f}], [\mathfrak{A}][\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}}. \end{aligned}$$

Beschränktheit: Im Falle der Vollständigkeit von $\mathfrak{Z}$ könnte die Beschränktheit von $[\mathfrak{A}]$ nach einer bekannten Schlußweise (vgl. [6], S. 166) aus der Symmetrie von $[\mathfrak{A}]$ gefolgert werden; $\mathfrak{Z}$ ist aber im allgemeinen nicht vollständig (s. Bemerkung zu 3.g). Wegen der Beschränktheit von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{R}$ und der

starken Symmetrisierung von $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{H}$ folgt die Beschränktheit von $[\mathfrak{K}]$ in $\mathfrak{Z}$ nach einer interessanten Überlegung von W. T. Reid [4], S. 44; vgl. auch [6], S. 452/453.

3.i. Definition (vgl. 0.f). Es bezeichnen $\varrho(\mathfrak{K})$ bzw. $\sigma_P(\mathfrak{K})$ die Resolventenmenge (Menge der Vollwerte) bzw. das Punktspektrum von $\mathfrak{K}$; entsprechend verstehen sich die Bezeichnungen $\varrho([\mathfrak{K}])$ bzw. $\sigma_P([\mathfrak{K}])$ bezüglich $[\mathfrak{K}]$.

3.j. Lemma. *Es gilt* $\sigma_P(\mathfrak{K}) = \sigma_P([\mathfrak{K}])$.

Beweis. α) Es sei $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{f} \neq 0$. Dann folgt

$$[0] = [\mathfrak{E}\mathfrak{f} - \lambda\mathfrak{K}\mathfrak{f}] = [\mathfrak{E}\mathfrak{f}] - [\lambda\mathfrak{K}\mathfrak{f}] = [\mathfrak{E}][\mathfrak{f}] - \lambda[\mathfrak{K}][\mathfrak{f}] = ([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}].$$

Wegen $\mathfrak{f} \neq 0$ gilt $f \neq o$ nach 2.f Beweis α und 2.i; also ist $\mathfrak{P}\mathfrak{f} \neq 0$ (vgl. 3.c); d.h. $[\mathfrak{f}] \neq [0]$ (vgl. 3.e, 3.f) ist Eigenelement.

β) Es sei $([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}] = [0]$, $[\mathfrak{f}] \neq [0]$; d.h. es existiert ein Element $\mathfrak{f} \notin \mathfrak{L}$, so daß $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{f} = \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} \in \mathfrak{L}$. Dann folgt unter Beachtung von (3.3), 3.c, 3.e

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{f} = \mathfrak{P}\mathfrak{f} - \lambda\mathfrak{K}\mathfrak{P}\mathfrak{f} = (\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{P}\mathfrak{f} = \mathfrak{P}\mathfrak{s} = 0,$$

bei $\mathfrak{P}\mathfrak{f} \neq 0$; d.h. $\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ ist Eigenelement.

Aus α) und β) folgt die Behauptung.

3.k. Lemma. *Es gilt* $\varrho(\mathfrak{K}) = \varrho([\mathfrak{K}])$.

Beweis. α) Es sei $\lambda \in \varrho(\mathfrak{K})$; d.h. die Gleichung $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{f} = \mathfrak{s}$ ist eindeutig lösbar für jedes $\mathfrak{s} \in \mathfrak{K}$. Dann folgt

$$[\mathfrak{s}] = [\mathfrak{E}\mathfrak{f} - \lambda\mathfrak{K}\mathfrak{f}] = [\mathfrak{E}\mathfrak{f}] - \lambda[\mathfrak{K}\mathfrak{f}] = [\mathfrak{E}][\mathfrak{f}] - \lambda[\mathfrak{K}][\mathfrak{f}] = ([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}].$$

Die Lösung $[\mathfrak{f}]$ ist eindeutig, denn aus

$$([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}] = [0] \quad \text{folgt} \quad [\mathfrak{f}] = [0],$$

da sonst $\lambda \in \sigma_P(\mathfrak{K})$ wegen 3.j.

β) Es sei $\lambda \in \varrho([\mathfrak{K}])$; d.h. die Gleichung $([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}] = [\mathfrak{s}]$ ist eindeutig lösbar für jedes $[\mathfrak{s}] \in \mathfrak{Z}$,

oder: zu beliebigem $\mathfrak{s} \in \mathfrak{K}$ existiert ein Element $\tilde{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{K}$, so daß $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{s} + \tilde{\mathfrak{s}}$, wobei $\tilde{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{L}$, d.h. $\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{s}} = 0$.

Hieraus folgt unter Beachtung von (3.3)

$$\tilde{\mathfrak{f}} - \tilde{\mathfrak{s}} - \lambda\mathfrak{K}\tilde{\mathfrak{f}} + \lambda\mathfrak{K}\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{s}} = (\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})(\tilde{\mathfrak{f}} - \tilde{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{s}.$$

Setzen wir $\tilde{\mathfrak{f}} - \tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{f}$, dann wird $(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K})\mathfrak{f} = \mathfrak{s}$. Die Lösung $\mathfrak{f}$ ist eindeutig; anderenfalls wäre λ Eigenwert von $\mathfrak{K}$ und wegen 3.j auch Eigenwert von $[\mathfrak{K}]$.

Aus α) und β) folgt die Behauptung.

3.l. Die Quotientenräume Z, Z_k $(k = 1, \ldots, n)$, $\mathfrak{Z}$ sind mit der in 3.g eingeführten Metrik im allgemeinen nicht vollständig.

Es seien $\overline{Z}, \overline{Z}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\overline{\mathfrak{Z}}$ die durch Vervollständigung entstehenden Hilbertschen Räume; vgl. [6], S. 95 und S. 111.

Das skalare Produkt von $[f], [g] \in \overline{\mathfrak{Z}}$ und die Norm von $[f] \in \overline{\mathfrak{Z}}$ bezeichnen wir mit $([f], [g])_{\overline{\mathfrak{Z}}}$ und $\|[f]\|_{\overline{\mathfrak{Z}}}$. Unter $\overline{[\mathfrak{R}]}$ bzw. $\overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}$ verstehen wir die Erweiterungen von $[\mathfrak{R}]$ bzw. $[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]$ auf $\overline{\mathfrak{Z}}$ (unter Beibehaltung derselben Schranken), vgl. [6], S. 134; die Erweiterung von $[\mathfrak{E}]$ auf $\overline{\mathfrak{Z}}$ nennen wir entsprechend $\overline{[\mathfrak{E}]}$.

FOLGERUNG. Aus (3.8) und (3.10) folgt $\overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}[f], \overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}[g] \in \mathfrak{Z}$, für $[f], [g] \in \overline{\mathfrak{Z}}$, und somit gilt unter Beachtung von (3.9):

$$([f], [g])_{\overline{\mathfrak{Z}}} = (\mathfrak{P}(\overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}[f]), \mathfrak{P}(\overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}[g]))_{\mathfrak{R}}, \tag{3.11}$$

$$\|[f]\|_{\overline{\mathfrak{Z}}} = \|\mathfrak{P}(\overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}[f])\|_{\mathfrak{R}}. \tag{3.12}$$

3.m. $[\mathfrak{R}]$ und $\overline{[\mathfrak{R}]}$ besitzen im allgemeinen nicht dasselbe Spektrum; vgl. [3], S. 32. Es gilt z.B. $\sigma_P([\mathfrak{R}]) \subset \sigma_P(\overline{[\mathfrak{R}]})$. Wir verfolgen die Änderung des Punktspektrums genauer. Es sei

$$(\overline{[\mathfrak{E}]} - \lambda \overline{[\mathfrak{R}]})[f] = [0], \quad [f] \neq [0], \quad [f] \in \overline{\mathfrak{Z}}. \tag{3.13}$$

Wegen der Vollständigkeit von R gilt dabei

$$[f] = \{f\} \times [f]' \times [f]_1 \times \cdots \times [f]_n$$

mit

$$f \in R, \quad [f]' \in \overline{Z}, \quad [f]_k \in \overline{Z}_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

(3.13) bedeutet das Bestehen einer Folge von Gleichungen

$$([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{R}])[\mathfrak{f}_\nu] = [\mathfrak{s}_\nu], \quad [\mathfrak{f}_\nu] \in \mathfrak{Z}, \quad [\mathfrak{s}_\nu] \in \mathfrak{Z} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{3.14}$$

wobei (im Sinne der Metrik 3.g) gilt $[\mathfrak{f}_\nu] \to [f]$, $[\mathfrak{s}_\nu] \to [0]$; dabei ist

$$[\mathfrak{f}_\nu] = \{f_\nu\} \times [f_\nu]' \times [f_\nu]_1 \times \cdots \times [f_\nu]_n,$$

$$[\mathfrak{s}_\nu] = \{s_\nu\} \times [s_\nu]' \times [s_\nu]_1 \times \cdots \times [s_\nu]_n,$$

und es kann offenbar $f_\nu = f$ gewählt werden.

Es sei $\mathfrak{f}_\nu \in [\mathfrak{f}_\nu]$; dann existiert wegen (3.14) eine Folge $\mathfrak{s}_\nu \in [\mathfrak{s}_\nu]$, so daß gilt

$$(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{R})\mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{s}_\nu, \tag{3.15}$$

wobei

$$\mathfrak{f}_\nu = \{f, f'_\nu, f_{\nu 1}, \ldots, f_{\nu n}\},$$

$$\mathfrak{s}_\nu = \{s_\nu, s'_\nu, s_{\nu 1}, \ldots, s_{\nu n}\},$$

und es bilden $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{f}_\nu$ und $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{s}_\nu$ Fundamentalfolgen, insbesondere $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{s}_\nu \to 0$; d.h. es gilt im Sinne der Metrik in R (s. 3.a)

$$\begin{cases} f_\nu \to f \\ B^{\frac{1}{2}} f'_\nu \to h' \\ \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} f_{\nu k} \to h_k \in \left[W\left(\left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad (k = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.16}$$

und

$$\begin{cases} s_\nu \to 0 \\ B^{\frac{1}{2}} s'_\nu \to 0 \\ \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} s_{\nu k} \to 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{3.17}$$

Gleichung (3.15) ist mit folgendem System äquivalent, vgl. (2.7), (2.8), (2.9):

$$f - \lambda A f - \lambda B f'_\nu - \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} H_k f_{\nu k} = s_\nu, \tag{3.18}$$

$$f'_\nu - \lambda P f = s'_\nu, \tag{3.19}$$

$$\left(E - \frac{\lambda}{a_k} P_k\right) f_{\nu k} - \lambda P_k f = s_{\nu k} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3.20}$$

3.n. Es sei $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; vgl. 2.e. Dann lassen sich f'_ν und $f_{\nu k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ explizit aus (3.19) und (3.20) berechnen und es ergibt sich mit diesen Werten aus (3.18)

$$f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = s_\nu + \lambda B s'_\nu - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - a_k} H_k s_{\nu k},$$

so daß schließlich mit (3.17) folgt

$$f - \lambda A f - \lambda^2 B f + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} H_k f = o.$$

Dabei gilt $f \neq o$; anderenfalls folgte aus (3.19) und (3.20) wegen (3.17) $[\mathfrak{f}_\nu] \to [0]$, d.h. $[\mathfrak{f}] = [0]$.

Es sei $\mathfrak{f}^* \in \mathfrak{R}$ das durch f mit (2.8) und (2.9) eindeutig festgelegte Eigenelement (vgl. 2.d, 2.e) zum Eigenwert λ der Gleichung $(\mathfrak{L}_0)$, vgl. Lemma 2.f:

$$\mathfrak{f}^* = \{f, f'^*, f_1^*, \ldots, f_n^*\}.$$

Dann gilt nach (2.8), (3.19)

$$f'_\nu - f'^* = s'_\nu$$

und nach (2.9), (3.20)

$$\left(E - \frac{\lambda}{a_k} P_k\right)(f_{\nu k} - f_k^*) = s_{\nu k} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

d.h. (vgl. 2.e)

$$f_{\nu k} - f_k^* = \left(E - \frac{\lambda}{a_k} P_k\right)^{-1} s_{\nu k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Damit folgt weiter wegen (3.17)

$$\lim B^{\frac{1}{2}} f'_\nu = B^{\frac{1}{2}} f'^* \quad \text{und} \quad \lim \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} f_{\nu k} = \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} f_k^* \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Also konvergiert $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{f}_\nu$ (im Sinne der Metrik 2.b) gegen $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{f}^*$. Das bedeutet $[\mathfrak{f}_\nu] \to [\mathfrak{f}^*] \in \mathfrak{Z}$ (im Sinne der Metrik 3.g), woraus schließlich $[\mathfrak{f}^*] = [\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z}$ folgt.

Wir fassen die Ergebnisse von 3.m und 3.n zusammen.

LEMMA. *Aus* $([\mathfrak{E}] - \lambda [\overline{\mathfrak{R}}])[\mathfrak{f}] = [0]$, $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ $[\mathfrak{f}] \neq [0]$, $[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z}$ *folgt* $[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z}$; *d.h. bei der Erweiterung von* $[\mathfrak{R}]$ *zu* $[\overline{\mathfrak{R}}]$ *werden keine neuen Eigenelemente zu Eigenwerten* $\lambda \neq a_k$ *gewonnen.*

COROLLAR. *Die zu den Eigenwerten* $\lambda \neq a_k$ *gehörenden Eigenelemente von* (N_0) *und* $[\overline{\mathfrak{R}}]$ *lassen sich eineindeutig einander zuordnen.*

Zufolge der Gleichungen

$$x' = \lambda P x, \quad \text{vgl. (2.8) mit } s' = o$$

und

$$x_k = \lambda \left(E - \frac{\lambda}{a_k} P_k\right)^{-1} P_k x \qquad (k = 1, \ldots, n), \quad \text{vgl. (2.9) mit } s_k = o$$

wird durch

$$\{x, x', x_1, \ldots, x_n\} = \mathfrak{x} \in [\mathfrak{x}]$$

ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen den (zum selben Eigenwert $\lambda \neq a_k$ gehörenden) Eigenelementen $x \in R$ und $[\mathfrak{x}] \in \mathfrak{Z}$ geliefert.

Weiter bezeichnen wir [vgl. 3.a, (3.5), (3.6), 3.h]

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{P}\mathfrak{y} = \mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{x} = \mathfrak{P}\left([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}][\mathfrak{x}]\right) = \{x, y', y_1, \ldots, y_n\}, \tag{3.21}$$

wobei also [s. (2.3), (2.8), (2.9)]

$$y' = B^{\frac{1}{2}} x' = \lambda B^{\frac{1}{2}} x, \tag{3.22}$$

$$y_k = \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} x_k = -\frac{\lambda a_k}{\lambda - a_k} \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} x \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3.23}$$

Offenbar sind demnach auch die zum selben Eigenwert λ gehörenden Eigenelemente x und die durch (3.21) definierten Elemente $\mathfrak{y}$ eineindeutig einander zugeordnet.

3.o. Wir betrachten (3.13) für $\lambda = a_j$; vgl. 3.m. Aus (3.18), (3.19), (3.20) ergibt sich (vgl. 2.h)

$$\left\{\begin{aligned} f - a_j A f - a_j^2 B f + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k f - H_j f_{\nu j} &= s_\nu + \\ &+ a_j B s_\nu' - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j}{a_j - a_k} H_k s_{\nu k}. \end{aligned}\right. \tag{3.24}$$

Gleichung (3.20) lautet für $k = j$

$$(E - P_j) f_{\nu j} - a_j P_j f = s_{\nu j}, \tag{3.25}$$

also gilt für alle ν [vgl. (2.1) und (2.13)]

$$-a_j P_j f = P_j s_{\nu j}. \tag{3.26}$$

Wegen (3.16) gilt

$$\left\{\begin{aligned} &H_j f_{\nu j} = a_j \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} f_{\nu j} \to a_j \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} h_j, \\ &\text{mit} \quad h_j \in \left[W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{3.27}$$

Also folgt mit (3.17) aus (3.24) und (3.26)

$$f - a_j A f - a_j^2 B f + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k f - a_j \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} h_j = o, \qquad H f = o. \tag{3.28}$$

Dabei gilt $\|f\| + \|h_j\| > 0$; anderenfalls würde aus (3.19), (3.20) für $k \neq j$ wegen (3.17) und aus (3.16) (3. Gleichung mit $k = j$) folgen

$$B^{\frac{1}{2}} f'_\nu \to o, \quad \left(\frac{1}{a_k} H_k\right)^{\frac{1}{2}} f_{\nu k} \to o \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad \text{d.h. } [\mathfrak{f}] \to [0];$$

das bedeutete aber $[\mathfrak{f}] = [0]$.

Durch Vergleich von (3.28) und (3.27) mit (1.1) erkennen wir nunmehr, daß $\lambda = a_j$ infolge Gleichung (3.13) singulärer Wert von (N_0) ist.

3.p. Es sei a_j singulärer Wert von (N_0) mit dem zugehörigen singulären Elementenpaar x, y_j; vgl. Definitionsgleichung (1.1).

Wegen $y_j \in \left[W\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$ existiert eine Folge $f_{\nu j}$ $(= 1, 2, \ldots)$ mit

$$y_{\nu j} = \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} f_{\nu j} \to y_j. \tag{3.29}$$

Wir setzen $x = f$, $y_j = h_j$ und definieren mit f und $f_{\nu j}$ zwei Folgen

$$\mathfrak{f}_\nu = \{f, f', f_1, \ldots, f_{\nu j}, \ldots, f_n\}$$
$$\mathfrak{s}_\nu = \{s_\nu, o, o, \ldots, s_{\nu j}, \ldots, o\},$$

$\mathfrak{f}_\nu, \mathfrak{s}_\nu \in \mathfrak{R}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ durch das Gleichungssystem

$$f - a_j A f - a_j^2 B f + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2}{a_j - a_k} H_k f - H_j f_{\nu j} = s_\nu, \qquad f' = a_j P f, \tag{3.30}$$

$$\left(E - \frac{a_j}{a_k} P_k\right) f_k - a_j P_k f = o \quad \text{(Definition von } f_k) \qquad (k = 1, \ldots, n,\ k \neq j),$$

$$(E - P_j) f_{\nu j} - a_j P_j f = s_{\nu j}. \tag{3.31}$$

Damit gilt nach 2.d und 2.h

$$(\mathfrak{E} - a_j \mathfrak{R}) \mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{s}_\nu. \tag{3.32}$$

Aus (3.29) und (3.30) folgt wegen (1.1) $s_\nu \to o$. Weiterhin gilt nach (3.31) unter Beachtung von 1.b, (2.2) und wegen $H_j f = o$

$$\left(\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} s_{\nu j}, \left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} s_{\nu j}\right) = \frac{1}{a_j^2} (H_j s_{\nu j}, s_{\nu j}) = (o, s_{\nu j}) = 0.$$

Daraus ergibt sich insgesamt $[\mathfrak{s}_\nu] \to [0]$. Aus (3.29) und der Definition von $\mathfrak{f}_\nu$ folgt wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$: $[\mathfrak{f}_\nu] \to [\mathfrak{f}] \in \mathfrak{F}$. Also ergibt sich schließlich aus (3.32)

$$([\mathfrak{E}] - a_j \overline{[\mathfrak{R}]})\,[\mathfrak{f}] = [0];$$

wegen $\|f\| + \|h_j\| > 0$ gilt offenbar $[\mathfrak{f}] \neq [0]$.

Wir fassen die Ergebnisse von 3.o und 3.p zusammen.

LEMMA. *a_j ist genau dann Eigenwert von $\overline{[\mathfrak{R}]}$, wenn a_j singulärer Wert von (N_0) ist.*

COROLLAR. *Die zu den Werten $\lambda = a_k$ gehörenden singulären Elementenpaare von (N_0) und Eigenelemente von $\overline{[\mathfrak{R}]}$ lassen sich eineindeutig einander zuordnen.*

Das Elementenpaar $x, y_j \in R$ und das entsprechende Eigenelement $[\mathfrak{x}] \in \overline{\mathfrak{Z}}$ stehen in folgendem Zusammenhang:

$$[\mathfrak{x}] = \{x\} \times [x]' \times [x]_1 \times \cdots [x]_j \times \cdots \times [x]_n;$$

dabei gilt

$$[x]' \in Z \quad \text{und} \quad x' \in [x]' \quad \text{mit} \quad x' = a_j P x, \quad \text{vgl. (2.8)};$$

$$[x]_k \in Z_k \quad \text{und} \quad x_k \in [x]_k \quad \text{mit} \quad x_k = a_j \left(E - \frac{a_j}{a_k} P_k\right)^{-1} P_k x, \quad \text{vgl. (2.9)}$$

$$(k = 1, \ldots, n, \; k \neq j);$$

$$[x]_j \in \overline{Z}_j, \quad \text{wobei} \quad [x]_j = \lim [x_\nu]_j \quad \text{und} \quad [x_\nu]_j \in Z_j \quad \text{mit} \quad x_{\nu j} \in [x_\nu]_j;$$

weiter ist

$$\left(\frac{1}{a_j} H_j\right)^{\frac{1}{2}} x_{\nu j} \to y_j; \tag{3.33}$$

vgl. 3.p, insbesondere (3.29) bei $f_{\nu j} = x_{\nu j}$ und 3.m, insbesondere (3.16), $k = j$, 3. Gleichung mit $f_{\nu j} = x_{\nu j}$ und $h_j = y_j$.

Wir betrachten

$$[\mathfrak{y}] = \overline{[\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]}\,[\mathfrak{x}]; \quad \text{vgl. 3.a Folgerung, 3.h, 3.l.} \tag{3.34}$$

Es ist (s. oben, insbesondere (3.33) $[\mathfrak{y}] \in \mathfrak{Z}$. Mit $\mathfrak{y} = \mathfrak{P}([\mathfrak{y}])$ ergibt sich nunmehr in Analogie zu (3.21) [vgl. (3.6), 3.h, 3.l]

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{P}\mathfrak{y} = \mathfrak{P}\left([\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}}]\,[\mathfrak{x}]\right) = \{x, y', y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n\}, \tag{3.35}$$

wobei y' bzw. y_k $(k = 1, \ldots, n, \; k \neq j)$ durch (3.22) und (3.23) gegeben sind.

Offenbar sind die zum selben Werte $\lambda = a_j$ gehörenden Elementenpaare x, y_j und die durch (3.35) definierten Elemente $\mathfrak{y}$ eineindeutig einander zugeordnet.

3.q. Als Folgerung von Lemma 2.f, Lemma 3.j und Lemma 3.n (vgl. auch Corollar 3.n) vermerken wir noch als Ergänzung zu Lemma 3.p das

LEMMA. *$\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ ist genau dann Eigenwert von $\overline{[\mathfrak{R}]}$, wenn λ regulärer Eigenwert von (N_0) ist.*

3.r. Die lineare, beschränkte, symmetrische Abbildung $\overline{[\mathfrak{R}]}$ ist verschieden von der Nullabbildung (vgl. 3.h). Daraus folgt aus bekannten Sätzen der Spektraltheorie, daß das Spektrum von $\overline{[\mathfrak{R}]}$ nicht leer ist, nur reell sein kann und ferner nur aus Punktspektrum (Eigenwerten) und kontinuierlichem Spektrum besteht; das Residualspektrum ist leer, vgl. [2], S. 49.

Es sei H_j streng definit. Dann ist a_j nach Lemma 2.k, Lemma 3.k und Lemma 3.p weder Vollwert der symmetrischen Abbildung $[\mathfrak{R}]$ und ihrer Erweiterung $\overline{[\mathfrak{R}]}$ (vgl. [3], S. 32), noch Eigenwert von $\overline{[\mathfrak{R}]}$; es gehört also a_j zum kontinuierlichen Spektrum von $\overline{[\mathfrak{R}]}$.

3.s. LEMMA. *In einem Hilbertschen Raum sei S eine lineare, symmetrische (also auch beschränkte) Abbildung. Es sei a ein isolierter Punkt von $\Sigma_c(S)$* (vgl. 0.f). *Dann ist a Häufungspunkt von $\Sigma_p(S)$.*

BEWEIS. Es sei a kein Häufungspunkt von $\Sigma_p(S)$. Da bekanntlich $\Sigma_r(S)$ leer ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall $J=[\alpha,\beta]$, mit $\alpha<a<\beta$ und $J\cap\Sigma(S)=a$.

Es sei $\{E_\mu\}$ die zu S gehörende Spektralschar, vgl. [5], S. 270.

Dann gilt

$$E_\mu = E_\alpha, \quad \alpha \leqq \mu < a$$
$$E_\mu = E_\beta, \quad a < \mu \leqq \beta.$$

Da aber $a\in\Sigma_c(S)$, gilt

$$E_\alpha = \lim_{\mu\to\alpha-0} E_\mu = E_a = \lim_{\mu=\alpha+0} E_\mu = E_\beta.$$

Also ist E_μ konstant in J; d.h. J ist frei von Elementen der Menge $\Sigma(S)$, im Widerspruch zur Voraussetzung $J\cap\Sigma(S)=a$.

Bemerkung. Offenbar bleibt die Aussage des Lemmas richtig, wenn die Mengen $\Sigma_c(S)$, $\Sigma_p(S)$ bzw. durch $\sigma_c(S)$, $\sigma_p(S)$ ersetzt werden.

3.t. Bei Erweiterung der symmetrischen Abbildung $[\mathfrak{R}]$ zu $\overline{[\mathfrak{R}]}$ bleibt die Menge der Vollwerte $\lambda\neq a_k$ $(k=1,\ldots,n)$ unverändert; vgl. hierzu Satz 1, Lemma 2.e, Lemma 3.k und [3], S. 32. Wir erhalten daraus das

LEMMA. *Die Mengen der Vollwerte $\lambda\neq a_k$ $(k=1,\ldots,n)$ zu* (N) *und $\overline{[\mathfrak{R}]}$ stimmen überein.*

3.u. Aus 3.q, 3.r, 3.s, 3.t ergibt sich jetzt der

SATZ 3. *Ist die Abbildung H_j streng definit, dann ist a_j Häufungspunkt von regulären Eigenwerten der Gleichung* (N_0).

3.v. Wegen der Separabilität von $\overline{\mathfrak{Z}}$ bilden die Eigenwerte von $\overline{[\mathfrak{R}]}$ eine höchstens abzählbare Menge; vgl. [1], S. 146. Wir erhalten daraus in Verbindung mit Lemma 3.p, Lemma 3.q und 3.r den

SATZ 4. *Die (regulären und singulären) Eigenwerte von* (N_0) *sind reell und bilden eine abzählbare Menge.*

Gleichung (N_0) *besitzt mindestens einen regulären Eigenwert oder singulären Wert.* (Vgl. hierzu Satz 2.)

4. Entwicklungen nach Eigenelementen von (N_0)

4.a. ORTHONORMIERUNG DER EIGENLÖSUNGEN. Es bezeichne $[\mathfrak{x}]_\nu$ ein orthonormiertes, vollständiges System von Eigenlösungen von $\overline{[\mathfrak{R}]}$, d.h. eine wegen der Separabilität von $\overline{\mathfrak{Z}}$ abzählbare Basis (oder ein Koordinatensystem) in dem von allen Eigenlösungen von $\overline{[\mathfrak{R}]}$ aufgespannten Teilraum, wobei (vgl. 3.g, 3.l)

$$([\mathfrak{x}]_\nu, [\mathfrak{x}]_\mu)_{\overline{\mathfrak{Z}}} = \delta_{\nu\mu}. \tag{4.1}$$

λ_ν bedeute den zu $[\mathfrak{x}]_\nu$ gehörenden Eigenwert:

$$[\mathfrak{x}]_\nu - \lambda_\nu \overline{[\mathfrak{R}]}\,[\mathfrak{x}]_\nu = [0]. \tag{4.2}$$

Für das den Eigenelementen $[\mathfrak{x}]_\nu\in\overline{\mathfrak{Z}}$ nach (3.21) und (3.35) eineindeutig zugeordnete System

$$\mathfrak{y}_\nu = \{x_\nu, y'_\nu, y_{1\nu}, \ldots, y_{n\nu}\} \in \mathfrak{R}$$

folgt aus (4.1) wegen (3.11)

$$(4.3)\quad \begin{cases} (\{\mathfrak{x}\}_\nu, \{\mathfrak{x}\}_\mu)_{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{y}_\nu, \mathfrak{y}_\mu)_{\mathfrak{R}} \\ \qquad = (x_\nu, x_\mu) + (y'_\nu, y'_\mu) + (y_{1\nu}, y_{1\mu}) + \cdots + y_{n\nu}, y_{n\mu}) = \delta_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Dem vollständigen System $\{\mathfrak{x}\}_\nu$ entspricht somit ein vollständiges System von regulären Eigenelementen x_ν und singulären Elementenpaaren $x_\nu, y_{j\nu}$, das nach (4.3) orthonormiert ist.

(4.3) kann weiter umgeschrieben werden, wobei beachtet werden muß, ob λ_ν, λ_μ reguläre Eigenwerte sind oder nicht. Sind λ_ν, λ_μ reguläre Eigenwerte, so folgt aus (4.3) unter Beachtung von (3.19) und (3.20)

$$(x_\nu, x_\mu) + \lambda_\nu \lambda_\mu (B x_\nu, x_\mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_\nu \lambda_\mu a_k}{(\lambda_\nu - a_k)(\lambda_\mu - a_k)} (H_k x_\nu, x_\mu) = \delta_{\nu\mu}.$$

Ist λ_ν regulärer Eigenwert, $\lambda_\mu = a_j$ singulärer Wert, dann gilt

$$(x_\nu, x_\mu) + \lambda_\nu a_j (B x_\nu, x_\mu) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\lambda_\nu a_j a_k}{(\lambda_\nu - a_k)(a_j - a_k)} (H_k x_\nu, x_\mu) -$$

$$- \frac{\lambda_\nu a_j}{\lambda_\nu - a_j} \left(\left(\frac{1}{a_k} H_k \right)^{\frac{1}{2}} x_\nu, y_{j\mu} \right) = 0.$$

Entsprechend ergibt sich die Orthogonalitätsbedingung für den Fall, daß $\lambda_\nu = a_p$, $\lambda_\mu = a_j$ $(a_p \neq a_j)$ beide singuläre Werte sind.

Schließlich sind die zum singulären Werte $\lambda_\nu = a_j$ gehörenden Elementenpaare normiert durch

$$(x_\nu, x_\nu) + a_j^2 (B x_\nu, x_\nu) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j^2 a_k}{(a_j - a_k)^2} (H_k x_\nu, x_\nu) + (y_{j\nu}, y_{j\nu}) = 1.$$

4.b. Die Grundlage für die Ergebnisse dieses Abschnitts bildet ein bekanntes Theorem von DUNFORD; vgl. [2], S. 49, Theorem 4, (iii). Es lautet:

Besteht die Menge $\Sigma(T)$ (vgl. 0.f) der linearen, symmetrischen Abbildung T (definiert auf dem Hilbertschen Raum R) aus der abzählbaren Menge $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$, so läßt sich jedes Element $x \in R$ in der Form darstellen $x = \Sigma x_i$, $T x_i = \mu_i x_i$.

Hieraus folgt zunächst $Tx = \sum T x_i = \sum \mu_i x_i$.

In der eben erhaltenen Summe sind nur die Summanden mit $\mu_i \neq 0$, $x_i \neq o$ von Belang. Das bedeutet, für die Entwicklung von Tx interessieren nur die zu $\sigma_p(T)$ gehörenden Eigenelemente (vgl. 0.f):

$$(4.4)\qquad x_i = \lambda_i T x_i, \qquad x_i \neq o.$$

Es sei y_j ein orthonormiertes, vollständiges System von Eigenlösungen bezüglich (4.4), vgl. 4.a. Dann gilt also (vgl. [6], S. 114)

$$Tx = \sum c_j y_j.$$

Die Abbildung $\overline{[\mathfrak{R}]}$ erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes von DUNFORD (vgl. 3.h, 3.l, Satz 1, Lemma 3.t, 3.v). Also gilt im Sinne der Norm-Topologie in $\mathfrak{Z}$ (vgl. 3.1)

$$\overline{[\mathfrak{R}]}\,[\mathfrak{f}] = \sum c_\nu [\mathfrak{x}]_\nu, \tag{4.5}$$

wobei [vgl. (4.2)]

$$[\mathfrak{x}]_\nu = \lambda_\nu \overline{[\mathfrak{R}]}\,[\mathfrak{x}]_\nu.$$

Die Summation in (4.4) erstreckt sich über sämtliche Funktionen des in 4.a definierten und nach (4.1) orthonormierten Systems. Daher gilt für die Koeffizienten c_ν

$$c_\nu = (\overline{[\mathfrak{R}]}\,[\mathfrak{f}], [\mathfrak{x}]_\nu)_{\mathfrak{Z}} = ([\mathfrak{f}], \overline{[\mathfrak{R}]}\,[\mathfrak{x}]_\nu)_{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\lambda_\nu}([\mathfrak{f}], [\mathfrak{x}]_\nu)_{\mathfrak{Z}}. \tag{4.6}$$

Ab jetzt sei $[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}]$. Dann folgt wegen 3.h, (3.12), (3.21), (3.35) aus (4.5):

$$\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{R} \mathfrak{f} = \sum c_\nu \mathfrak{y}_\nu, \tag{4.7}$$

im Sinne der in 2.b definierten Norm-Konvergenz bezüglich $\mathfrak{R}$. Aus (4.6) erhalten wir wegen (3.11), (3.21), (3.35)

$$c_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}(\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{f}, \mathfrak{y}_\nu)_{\mathfrak{R}}. \tag{4.8}$$

4.c. Aus (4.7) mit (4.8) erhalten wir nunmehr ein System von Entwicklungssätzen für unsere nichtlinearen Gleichungen (N) und (N_0).

Die Berechnung von $\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{R} \mathfrak{f}$ nach (2.6) und 3.a (Folgerung) ergibt

$$\mathfrak{H}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{R} \mathfrak{f} = \begin{cases} \left\{ A f + B f' + \frac{1}{a_1} H_1 f_1 + \cdots + \frac{1}{a_n} H_n f_n, \right. \\ B^{\frac{1}{2}} f, \\ \left(\frac{1}{a_1} H_1\right)^{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{a_1} H_1\right)^{\frac{1}{2}} f_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{1}{a_i} H_i\right)^{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{a_i} H_i\right)^{\frac{1}{2}} f_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left. \left(\frac{1}{a_n} H_n\right)^{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{a_n} H_n\right)^{\frac{1}{2}} f_n \right\}. \end{cases}$$

Durch Vergleich mit der rechten Seite von (4.7) folgen wegen (2.5) unter Beachtung von (3.21), (3.22), (3.23), (3.35) die Entwicklungen

$$A f + B f' + \frac{1}{a_1} H_1 f_1 + \cdots + \frac{1}{a_i} H_i f_i + \cdots + \frac{1}{a_n} H_n f_n = \sum c_\nu x_\nu, \tag{4.9}$$

$$B^{\frac{1}{2}} f = \sum c_\nu \lambda_\nu B^{\frac{1}{2}} x_\nu, \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{1}{a_i} H_i\right)^{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{a_i} H_i\right)^{\frac{1}{2}} f_i = \sum c_\nu y_{i\nu} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.11}$$

Die Koeffizienten c_ν errechnen sich nach (4.8) unter Beachtung von 3.a (Folgerung) und (3.22) zu

$$(4.12)\qquad \begin{cases} c_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\Big[(f, x_\nu) + \lambda_\nu (B^{\frac{1}{2}} f', B^{\frac{1}{2}} x_\nu) + \Big(\Big(\frac{1}{a_1} H_1\Big)^{\frac{1}{2}} f_1, y_{1\nu}\Big) + \cdots \\ \qquad \cdots + \Big(\Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} f_i, y_{i\nu}\Big) + \cdots + \Big(\Big(\frac{1}{a_n} H_n\Big)^{\frac{1}{2}} f_n, y_{n\nu}\Big)\Big]. \end{cases}$$

Durch weitere Spezialisierung von $\mathfrak{f}$ erhalten wir aus (4.9), (4.10), (4.11) mit (4.12) schließlich die gesuchten Entwicklungen.

Für die Größen $y_{i\nu}$ beachten wir noch im Falle eines regulären Eigenwertes (3.23).

Die Summationen erstrecken sich über sämtliche Funktionen des nach (4.3) orthonormierten Systems der regulären Eigenelemente x_ν und singulären Elementenpaare $x_\nu, y_{i\nu}$. Alle Konvergenzen verstehen sich wegen (2.5) im Sinne der Norm-Topologie bezüglich R.

4.d. ZUSAMMENSTELLUNG DER ENTWICKLUNGSSÄTZE. α) Folgerungen aus (4.9), (4.12).

$$(4.13)\qquad f = \varphi,\ f' = f_1 = \cdots = f_n = o; \qquad A\varphi = \sum \frac{1}{\lambda_\nu}(\varphi, x_\nu).$$

$$(4.14)\qquad f' = \varphi,\ f = f_1 = \cdots = f_n = o; \qquad B\varphi = \sum (B\varphi, x_\nu)\, x_\nu.$$

$$(4.15)\qquad \begin{cases} f_i = \varphi,\ f = f' = f_k = o \qquad (k = 1, \ldots, n,\ k \neq i); \\ \frac{1}{a_i} H_i \varphi = \sum \frac{1}{\lambda_\nu}\Big(\Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} \varphi, y_{i\nu}\Big) x_\nu; \end{cases}$$

oder infolge (3.23), wobei hier und im folgenden $\sum_{a_i}$ die Summation über sämtliche zu a_i gehörenden x_ν bzw. $y_{i\nu}$ unseres orthonormierten Systems der Eigenwerte und singulären Elementenpaare bedeutet:

$$(4.16)\qquad \frac{1}{a_i} H_i \varphi = -\sum_{\lambda_\nu \neq a_i} \frac{1}{\lambda_\nu - a_i} (H_i \varphi, x_\nu)\, x_\nu + \sum_{a_i} \frac{1}{a_i}\Big(\Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} \varphi, y_{i\nu}\Big) x_\nu.$$

β) Folgerungen aus (4.10), (4.12).

$$(4.17)\qquad f = \varphi,\ f' = f_1 = \cdots = f_n = o; \qquad B^{\frac{1}{2}}\varphi = \sum (\varphi, x_\nu)\, B^{\frac{1}{2}} x_\nu.$$

$$(4.18)\qquad f' = \varphi,\ f = f_1 = \cdots = f_n = o; \qquad o = \sum \lambda_\nu (B\varphi, x_\nu)\, B^{\frac{1}{2}} x_\nu.$$

$$(4.19)\qquad \begin{cases} f_i = \varphi,\ f = f' = f_k = o \qquad (k = 1, \ldots, n,\ k \neq i); \\ o = \sum \Big(\Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} \varphi, y_{i\nu}\Big) B^{\frac{1}{2}} x_\nu; \end{cases}$$

oder auch, vgl. (4.15), (4.16):

$$(4.20)\qquad o = -\sum_{\lambda_\nu \neq a_i} \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - a_i} (H_i \varphi, x_\nu)\, B^{\frac{1}{2}} x_\nu + \sum_{a_i} \Big(\Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} \varphi, y_{i\nu}\Big) B^{\frac{1}{2}} x_\nu.$$

γ) Folgerungen aus (4.11), (4.12).

$$(4.21)\qquad f = \varphi,\ f' = f_1 = \cdots = f_n = o; \qquad \Big(\frac{1}{a_i} H_i\Big)^{\frac{1}{2}} \varphi = \sum \frac{1}{\lambda_\nu} (\varphi, x_\nu)\, y_{i\nu}$$

oder auch

$$(4.22)\quad \left(\frac{1}{a_i}H_i\right)^{\frac{1}{2}}\varphi = -\sum_{\lambda_\nu \neq a_i}\frac{a_i}{\lambda_\nu - a_i}(\varphi, x_\nu)\left(\frac{1}{a_i}H_i\right)^{\frac{1}{2}}x_\nu + \sum\frac{1}{a_i}(\varphi, x_\nu)\,y_{i\nu}.$$

$$(4.23)\quad f' = \varphi,\ f = f_1 = \cdots = f_n = o;\qquad o = \sum(B\varphi, x_\nu)\,y_{j\nu}.$$

$$(4.24)\quad \begin{cases} f_i = \varphi\ (j \neq i),\ f = f' = f_k = o \qquad (k = 1, \ldots, n,\ k \neq j); \\ o = \sum\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\left(\frac{1}{a_j}H_j\right)^{\frac{1}{2}}\varphi, y_{j\nu}\right)y_{i\nu}. \end{cases}$$

$$(4.25)\quad \begin{cases} f_i = \varphi,\ f = f' = f_k = o \qquad (k = 1, \ldots, n,\ k \neq i); \\ \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{a_i}H_i\right)^{\frac{1}{2}}\varphi = \sum\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\left(\frac{1}{a_i}H_i\right)^{\frac{1}{2}}\varphi, y_{i\nu}\right)y_{i\nu}. \end{cases}$$

Auf die weitere Umschreibung von (4.23), (4.24) und (4.25) wollen wir verzichten.

5. Auflösungsformel zu (N)

Als einfache Folge des Vorangehenden ergibt sich die Auflösungsformel zu (N).

5.a. Ausgehend von der Abbildung $[\overline{\mathfrak{R}}]$ (s. 3.l) betrachten wir die inhomogene Gleichung

$$(5.1)\quad (\overline{[\mathfrak{E}]} - \lambda\,\overline{[\mathfrak{R}]})\,[\mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}];$$

wir setzen für den Zusammenhang mit (N) $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ voraus.

Infolge des Entwicklungssatzes (4.5) für $[\overline{\mathfrak{R}}]$ ergibt sich nach bekannten Überlegungen (vgl. z.B. die Ausführungen in [5], S. 233/234, die unmittelbar für unseren Fall zutreffen) zu (5.1) die Auflösungsformel

$$(5.2)\quad [\mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}] + \sum\gamma_\nu[\mathfrak{x}]_\nu.$$

Die (im Sinne der Norm-Topologie in $\overline{\mathfrak{Z}}$ konvergente) Summation erstreckt sich über alle Eigenelemente $[\mathfrak{x}]_\nu$ (mit den zugehörigen Eigenwerten λ_ν) des in 4.a definierten Systems. Für die Koeffizienten γ_ν gilt

$$(5.3)\quad \begin{cases} \gamma_\nu = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}([\mathfrak{g}], [\mathfrak{x}]_\nu), & \text{falls} \quad \lambda_\nu \neq \lambda \\ \gamma_\nu \quad \text{beliebig}, & \text{falls} \quad \lambda_\nu = \lambda. \end{cases}$$

Wir beachten hierbei, daß wegen 1.e (Vollstetigkeit von V_λ), Lemma 3.q, 3.n Corollar zu einem Eigenwert $\lambda \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ nur endlich viele Eigenfunktionen $[\mathfrak{x}]_\nu$ unseres Systems gehören.

Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von (5.2) mit (5.3) ist die Orthogonalitätsrelation

$$(5.4)\quad ([\mathfrak{g}], [\mathfrak{x}]_\nu) = 0 \quad \text{für alle } [\mathfrak{x}]_\nu \text{ mit } \lambda_\nu = \lambda.$$

5.b. Mit Hilfe der rechten Seite g von (N) definieren wir uns das Element

$$(5.5)\quad \mathfrak{g} = \{g, o, o, \ldots, o\} \in \mathfrak{N}.$$

Es sei $\mathfrak{g} \in [\mathfrak{g}]$ und $[\mathfrak{f}] = \{f\} \times [f]' \times [f]_1 \times \cdots \times [f]_n$ die im Falle der Auflösbarkeit zugehörige Lösung von (5.1). Ferner bezeichne $\mathfrak{f} = \{f, f', f_1, \ldots, f_n\}$ das durch f und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ nach (2.8) und (2.9) festgelegte Element. Die Gleichungen (N) und (2.10) sind nunmehr identisch, und zwischen $\lambda, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ besteht der Zusammenhang

$$(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{K})\mathfrak{f} = \mathfrak{g}.$$

Hieraus folgt weiter

$$([\mathfrak{E}] - \lambda[\mathfrak{K}])[\mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}],$$

so daß also $\mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}]$, $[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z}$.

Wegen (5.2), (5.5) und (3.6) gilt weiter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{f} = \mathfrak{g} + \sum \gamma_\nu \mathfrak{P}([\mathfrak{x}]_\nu);$$

die Konvergenz versteht sich im Sinne der Norm-Topologie von $\mathfrak{R}$. Hieraus erhalten wir schließlich nach (2.5)

$$f = g + \sum \gamma_\nu x_\nu.$$

Für γ_ν ergibt sich nach (5.3), (5.5) und 3.c

$$\gamma_\nu = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}(g, x_\nu), \quad \text{falls} \quad \lambda_\nu \neq \lambda$$

$$\gamma_\nu \quad \text{beliebig}, \quad \text{falls} \quad \lambda_\nu = \lambda.$$

Damit haben wir unter Beachtung von (5.4) den

Satz 5. *Für die Lösbarkeit von Gleichung* (N) *ist notwendig und hinreichend, daß* $(g, x_\nu) = 0$ *gilt für alle zu* $\lambda = \lambda_\nu$ *gehörenden Eigenelemente* x_ν. *Im Falle der Lösbarkeit gilt die Auflösungsformel*

$$f = g + \sum \gamma_\nu x_\nu, \quad \textit{wobei} \quad \gamma_\nu = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}(g, x_\nu), \quad \textit{falls} \quad \lambda_\nu \neq \lambda$$

$$\gamma_\nu \quad \textit{beliebig}, \quad \textit{falls} \quad \lambda_\nu = \lambda.$$

Die Reihenentwicklung konvergiert im Sinne der Norm bezüglich R und erstreckt sich über sämtliche regulären und singulären Eigenelemente (vgl. 1.d) *des nach* (4.3) *orthonormierten Systems.*

Literatur

Teil A

(*1*) Faber, O.: Zur Theorie der gedämpften Schwingungen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 289–313 (1914). — (*2*) Tamarkin, D.: On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter. Ann. of Math. (2) **28**, 127–152 (1927). — (*3*) Anghelutza, T.: Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation de Fredholm. C. R. Acad. Sci. Paris: **188**, 536–539 (1929). — (*4*) Anghelutza, T.: Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation de Fredholm. Bull. math. Soc. Roumaine **35**, 23–35 (1933). — (*5*) Cioranescu, N.: Sur l'équation intégrale linéaire à limites fixes at à un paramètre. Bull. Sc. math. (2) **58**, 270–272 (1934). — (*6*) Cioranescu, N.: Sur l'équation intégrale linéaire à limites fixes et à un paramètre. Rend. Sem. Mat. Padova **5**, 81–98 (1934). — (*7*) Piazza, N.: Sulla distribuzione asintotica degli autovalori di una certa equazione integrale. Relat. Soc. Gioeniae Catinensis (2) **67**, 49–55 (1935). — (*8*) Miranda, C.: Su di una classe di equazioni integrali il cui nucleo e funzione del parametro. Rend.

Circ. mat. Palermo **60**, 286–304 (1936/37). – (*9*) MIRANDA, C.: Su di un problema al contorno relativo all' equazione del calore. Rend. Sem. Mat. Padova **8** (1937). – (*10*) MIRANDA, C.: Su alcuni sviluppi in serie procedenti per funzioni non necessariamente ortogonali. Atti primo Congr. Un. mat. Ital. Firenze **1937**, 200–202. – (*11*) MIRANDA, C.: Su alcuni sviluppi in serie procedenti per funzioni non necessariamente ortogonali. Acta Pontificia Acad. Sci. **3**, 1–4 (1939). – (*12*) MIRANDA, C.: Alcune generalizzazioni delle serie di funzioni e loro applicazioni. Conf. di Mat. e Fis. del Sem. Mat. Torino, 1938–1940. – (*13*) MIRANDA, C.: Nuovi contributi alla teoria delle equazioni integrali lineari con nucleo dipendente dal parametro. Mem. Acad. Sci. Torino I (2) **70**, 23–51 (1940). – (*14*) MIRANDA, C.: Sulle equazioni integrali il cui nucleo e funzione lineare del parametro. Atti Acad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. (7) **2**, 117–123 (1940). – (*15*) MIRANDA, C.: Equazioni integrali con nucleo funzione del parametro: Teoria ed Applicazioni. Rend. Sem. Mat. Roma **12**, 67–82 (1952/53). – (*16*) MANIA, B.: Autovalori di nuclei dipendenti dal parametro. Ann. Scuola norm. sup., Pisa, Sci. fis. mat. (2) **8**, 89–104 (1939). – (*17*) IGLISCH, R.: Über lineare Integralgleichungen mit vom Parameter abhängenden Kern. Math. Ann. **117**, 127–139 (1940). – (*18*) TAYLOR, E. A.: Linear operations which depend analytically on a parameter. Ann. of Math. **39**, 574–593 (1938). – (*19*) GRECO, D.: Sulla convergenze degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. Rend. Acc. Sc. Fis. e. Mat. Napoli s. 4a, **17** (1939). – (*20*) GRECO, D.: Su un problema ai limiti per un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Giorn. di Mat. **2(78)**, 216–237 (1948/49). – (*21*) GRECO, D.: Gli sviluppi in serie di autosoluzioni in un problema ai limiti relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Giorn. di Mat. **3 (79)**, 86–120 (1949/50). – (*22*) GRECO, D.: Una nuova applicazione del metodo delle transformate alla risoluzione di un Problema al contorno per un'equazione di tipo parabolico. Giorn. di Mat. **4 (80)**, 102–128 (1950/51). – (*23*) GIRAUD, G.: Équations de Fredholm dont le noyaux est fonction holomorphe d'un paramètre: équations analogues où figurent des intégrales principales. C. R. Acad. Sci. Paris **211**, 47–49 (1940). – (*24*) GIRAUD, G.: Équations de Fredholm dont le noyau est fonction holomorphe d'un paramètre. Bull. Sci. math. (2) **64**, 225–244 (1940). – (*25*) CHARASOW, D. F.: Über lineare Integralgleichungen, deren Kerne ganze rationale Funktionen eines Parameters sind. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **6**, 663–669 (1945) [Russisch]. – (*26*) CHARASOW, D. F.: Über die Eigenwerte von Integralgleichungen, deren Kerne ganze rationale Funktionen des Parameters sind. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **14** (1946) [Russisch]. – (*27*) CHARASOW, D. F.: Einige Eigenschaften der Eigenfunktionen und der Resolventen von Integralgleichungen mit bezüglich des Parameters rationalen Kernen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **8**, 205–210 (1947) [Russisch]. – (*28*) CHARASOW, D. F.: Über lineare Integralgleichungen, deren Kern ein Polynom zweiten Grades bezüglich des Parameters ist. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **8**, 275–281 (1947) [Russisch]. – (*29*) CHARASOW, D. F.: Über lineare Integralgleichungen mit verallgemeinerten Kernen vom Martyschen Typus. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **17** (1949) [Russisch]. – (*30*) CHARASOW, D. F.: Über die Verteilung der Eigenwerte von Integralgleichungen mit rationalen Kernen hinsichtlich des Parameters. Doklady Akad. Nauk SSSR **71** (6) (1950) [Russisch]. – (*31*) CHARASOW, D. F.: Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf die Lösung gewisser Funktionalgleichungen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **12**, 3–9 (1951) [Russisch]. – (*32*) CHARASOW, D. F.: Anwendungen der Integralgleichungen mit von einem Parameter abhängenden Kernen auf einige Randwertaufgaben in der Theorie der Differentialgleichungen. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **18**, 265–306 (1951) [Russisch]. – (*33*) CHARASOW, D. F.: Über eine Klasse linearer Gleichungen in Hilberträumen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **13**, 65–72 (1952) [Russisch]. – (*34*) CHARASOW, D. F.: Zur Theorie linearer Gleichungen in Banachräumen. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat Inst. Razmadze **19**, 163–171 (1953) [Russisch]. – (*35*) CHARASOW, D. F.: Über eine allgemeine Methode von KANTOROWITSCH zur Lösung von Funktionalgleichungen.

Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **20**, 279–296 (1954) [Russisch]. — (*36*) Charasow, D. F.: Zur Theorie der Polynomabhängigkeit von Operatoren in Hilberträumen. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **20**, 297–315 (1954) [Russisch]. — (*37*) Charasow, D. F.: Einige Probleme der Spektraltheorie von Operatoren, die meromorph vom Parameter abhängen. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **21**, 145–168 (1955) [Russisch]. — (*38*) Charasow, D. F.: Über Randwertaufgaben in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100** (2), 217–220 (1955) [Russisch]. — (*39*) Charasow, D. F.: Zur Untersuchung von Randwertaufgaben bei elliptischen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100** (3), 421–424 (1955) [Russisch]. — (*40*) Charasow, D. F.: Über Spektralentwicklungen gewisser linearer Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR **102** (2), 693–696 (1955) [Russisch]. — (*41*) Charasow, D. F.: Einige Probleme zur Ermittlung von Eigenwerten und Näherungslösungen bei Funktionalgleichungen in Banachräumen. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk mat. Inst. Razmadze **22**, 237–250 (1956) [Russisch]. — (*42*) Charasow, D. F.: Einige Probleme zur Theorie der linearen symmetrisierbaren Operatoren. Mat. Sbornik **42** (84), 129–178 (1957) [Russisch]. — (*43*) Charasow, D. F.: Über eine Klasse von Operatoren, die nichtlinear vom Parameter abhängen. Doklady Akad. Nauk SSSR **112** (5), 819–822 (1957) [Russisch]. — (*44*) Gochberg, I. Z.: Über lineare Operatoren, die analytisch von einem Parameter abhängen. Doklady Akad. Nauk SSSR **78** (2) (1951) [Russisch]. — (*45*) Gochberg, I. Z., u. A. S. Markus: Über eine charakteristische Eigenschaft des Kernes eines linearen Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR **105**, 893–896 (1955) [Russisch]. — (*46*) Gagaew, B. M.: Über die Existenz von Eigenwerten bei Integralgleichungen, deren Kerne ganze rationale Funktionen des Parameters sind. Ukrainskij Mat. J. IV **2**, 120–123 (1952) [Russisch]. — (*47*) Atkinson, F. V.: A spectral problem for completely continuous operators. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **3**, 53–60 (1952). — (*48*) Sz.-Nagy, B.: On a spectral problem of Atkinson. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **3**, 61–66 (1952). — (*49*) Müller, P. H.: Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Math. Nachr. **12**, 173–181 (1954). — (*50*) Müller, P. H.: Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **17**, 195–197 (1956). — (*51*) Gasimow, Č. M.: Über eine Integralgleichung, deren Kern eine analytische Funktion des Parameters ist. Trudy Aserb. Inst. **4**, 47–60 (1954) [Russisch]. — (*52*) Markowa, W. A.: Einige Probleme zu linearen Integralgleichungen, die vom Parameter abhängen. Uč. sap. Pensensk. gos. ped. Inst. **2**, 39–46 (1955) [Russisch].

Teil B

[*1*] Cook, R. G.: Linear Operators. London 1953. — [*2*] Dunford, N.: Spectral theory in abstract spaces and Banach algebras. Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems. Oklahoma 1951. — [*3*] Hille, E.: Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — [*4*] Reid, W. T.: Symmetrisable completely continuous linear transformations in Hilbert space. Duke math. J. **18**, 41–56 (1951). — [*5*] Riesz-B. et Sz.-Nagy, F.: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [*6*] Zaanen, A. C.: Linear Analysis. Amsterdam 1953.

Dresden, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 2. Juni 1958)

BARTHEL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 407–429 (1959)

Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz[1]

Von
WOLDEMAR BARTHEL

Einleitung

Während der Brunn-Minkowskische Satz über die Inhalte der Parallelschnitte eines konvexen Körpers Aufschluß gibt, behandelt ein Satz von BUSEMANN [2] die Schnitte eines konvexen Körpers durch ein Büschel nichtparalleler Hyperebenen. BUSEMANN formuliert sein Resultat folgendermaßen:

Im n-dimensionalen euklidischen Raum sei K ein konvexer Körper, L_{n-2} ein ihn schneidender $(n-2)$-dimensionaler linearer Raum und P_2 eine 2-dimensionale Ebene senkrecht zu L_{n-2} im Punkt O. Für alle Halbhyperebenen H_{n-1}, die von L_{n-2} begrenzt sind, werde das $(n-1)$-dimensionale Volumen $V(H_{n-1} \cap K)$ auf dem Strahl $H_{n-1} \cap P_2$ von O aus abgetragen. Die dabei entstehende Kurve ist konvex.

An diesen „Satz vom Brunn-Minkowskischen Typ" knüpft sich natürlich die Frage, wie er sich tatsächlich zum Brunn-Minkowskischen Satz verhält. Weiterhin wäre zu klären, ob er wie dieser in Wirklichkeit affinen Charakter besitzt (was nach der obigen Fassung durchaus fraglich erscheint) und sich ebenfalls weithin von Konvexitätsvoraussetzungen befreien läßt. Nun wurde dem Brunn-Minkowskischen Satz, welcher für die verbindende Linearschar $(1-\vartheta)\mathfrak{K}_0+\vartheta\mathfrak{K}_1$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$ zweier kompakter Mengen gilt, von ERHARD SCHMIDT [8], [9] und HADWIGER [5] ein Spiegeltheorem gegenübergestellt. Dieses bezieht sich auf den übrigen Teil der geeignet fortgesetzten Linearschar ($\vartheta < 0$ bzw. $\vartheta > 1$). Es wäre also ferner zu fragen, ob auch dem Busemannschen Satz ein entsprechendes Spiegeltheorem korrespondiert.

Unter den skizzierten Gesichtspunkten werden wir die wesentliche Aussage des Busemannschen Satzes in einer *affininvarianten Ungleichung* zusammenfassen. Dem Beweis wird der klassische symmetrisierungsfreie Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes[2]) sowie die Busemannsche Idee einer zweifachen Anwendung der Jensenschen Ungleichung zugrunde liegen. Allerdings werden wir den Beweisgang so auf möglichst geringe Konvexitätsvoraussetzungen modifizieren, wie dies DINGHAS-SCHMIDT [4] und in allgemeinerer Form BUSEMANN [3] für den Brunn-Minkowskischen Satz getan haben[3]).

[1]) Vorliegende Abhandlung umfaßt einen ersten Teil der Habilitationsschrift, die der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br. am 14. Juni 1957 vorgelegt wurde.

[2]) Vgl. BONNESEN-FENCHEL [1] S. 88–91, wo sich auch genaue Angaben der Originalliteratur befinden.

[3]) Ohne Konvexitätsvoraussetzungen wurde der Brunn-Minkowskische Satz erstmals von LUSTERNIK [7] mittels Symmetrisierungen bewiesen.

Da wir den Beweis für beliebige Hyperebenenbüschel führen, enthält er in natürlicher Weise einen Induktionsbeweis für den Brunn-Minkowskischen Satz. In der Tat gewinnt man auch aus der Brunn-Minkowskischen Ungleichung durch Anwendung der Jensenschen Ungleichung die oben angekündigte Ungleichung des Busemannschen Satzes in ihrer Spezialisierung auf ein Parallelbüschel. Besondere Schwierigkeiten bietet jedoch die *Diskussion des Gleichheitszeichens* in dieser Ungleichung. Die von BUSEMANN in [2] S. 31 angegebene Bedingung ist zwar hinreichend, aber der Beweis ihrer Notwendigkeit ist nicht erschöpfend. Tatsächlich ist die notwendige und hinreichende Gleichheitsbedingung, die ja auch affininvariant sein muß, umfassender. Ihr Beweis ist unter unseren recht allgemeinen Voraussetzungen sehr weitläufig. Die bei der Gleichheitsdiskussion für den Brunn-Minkowskischen Satz bewährte Methode, die sich auf die Gleichberechtigung verschiedener Raumrichtungen stützt, ist bei einem beliebigen Hyperebenenbüschel jedenfalls nicht mehr verwendbar. Schließlich stellen wir auch für den Busemannschen Satz ein *Spiegeltheorem* auf.

HADWIGER [5] hat den Formalismus der Minkowskischen Addition, der dem Brunn-Minkowskischen Satz angemessen ist, in eleganter Weise durch eine Minkowskische Subtraktion erweitert. Es scheint uns daher nützlich, auch eine dem Busemannschen Satz und seinem Spiegeltheorem adäquate Operation mit Mengen einzuführen und ihre Rechenregeln zu untersuchen. Sie entspricht einer Art „harmonischer Mittelbildung", weshalb wir sie als *harmonische Linearkombination* bezeichnen wollen.

1. Linearscharen von Mengen in einem Halbbüschel

Im $(n+1)$-dimensionalen affinen Raum R_{n+1} $(n \geqq 1)$ betrachten wir ein *Halbbüschel*, das aus allen von einer festen $(n-1)$-dimensionalen Ebene T begrenzten (abgeschlossenen) Halbhyperebenen besteht, die eine feste zu T windschiefe Gerade schneiden. In diese Redewendung werde eingeschlossen, daß der Träger T auch uneigentlich, d.h. das „Halbbüschel" ein Parallelbüschel sein kann. Ein Halbbüschel soll nun gekennzeichnet werden durch

einen Ursprung O auf der ausgezeichneten Geraden,

einen Basisvektor L auf dieser Geraden,

Basisvektoren Z_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n-1)$ des Trägers,

einen Vektor Y_0, der mit den Z_ϱ die Halbhyperebene durch O aufspannt

und eine Zahl ω, so daß der Vektor $Y_1 \overset{\text{def}}{=} Y_0 + \omega L$ in der Halbhyperebene liegt, die durch den Endpunkt des von O abgetragenen Vektors L geht.

Während der Fall $\omega = 0$ gerade ein Parallelbüschel darstellt, handelt es sich für $\omega \neq 0$ um ein Halbbüschel, dessen Träger durch den Punkt Q geht, der durch

$$\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{\omega} Y_0 \tag{1.1}$$

bestimmt ist.

Im folgenden soll jede Halbhyperebene des Halbbüschels durch ihren Schnittpunkt mit der ausgezeichneten Geraden $(L)_O$[4]) charakterisiert werden, d.h. durch dessen affine Koordinate λ im Koordinatensystem $O; L$ auf dieser Geraden. Weiterhin sollen in allen Halbhyperebenen Basisvektoren festgelegt werden, nämlich der von den parallelen Geraden uL und Y_0+vL aus der Hyperebene λ ausgeschnittene Vektor

$$Y_\lambda \overset{\text{def}}{=} Y_0 + \lambda\omega L \tag{1.2}$$

und die Basisvektoren Z_ϱ des Trägers. Alle diese Basen $Y_\lambda, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ sind natürlich affininvariant miteinander verbunden.

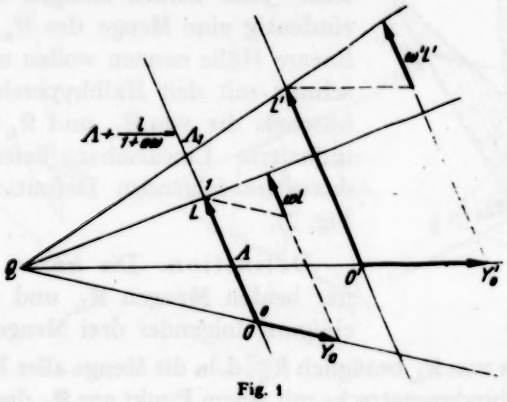

Fig. 1

Eine *äquivalente Erzeugung* unseres Halbbüschels wird, wenn man die entsprechenden neuen Größen mit einem Strich bezeichnet, gegeben durch (vgl. Fig. 1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &\equiv \Lambda L + a Y_\Lambda, && (1 + a\omega > 0), \\ L' &\equiv l L, && (l \neq 0), \\ Y_0' &\equiv c Y_\Lambda, && (c \neq 0). \end{aligned}$$

Hierbei sind die Kongruenzen stets $\mathrm{mod}(Z_\varrho)$ zu verstehen. Den Zusammenhang zwischen der Koordinate λ und λ' einer Halbhyperebene findet man durch Berechnung des Schnittpunktes der Halbhyperebene λ mit der Geraden $\overrightarrow{OO'} + \lambda' L'$, nämlich

$$\lambda = \Lambda + \lambda' \frac{l}{1 + a\omega}.$$

Damit ergibt sich aus $Y_0' + \omega' L' \equiv \gamma Y_{\left(\Lambda + \frac{l}{1 + a\omega}\right)}$ auch die neue Zahl

$$\omega' = \frac{\omega c}{1 + a\omega}.$$

[4]) In dieser Arbeit bezeichne $(X_\varrho) = (X_1, \ldots, X_\varrho)$ einen Vektorraum oder eine nur bis auf Translationen festgelegte Ebene, die von Vektoren $X_1, \ldots, X_\varrho$ aufgespannt wird. $(X_\varrho)_P$ sei dann der lineare Unterraum, welcher durch Abtragen der Vektoren aus (X_ϱ) im Punkt P entsteht.

Geometrisch evident ist schließlich die Kongruenz

$$Y'_{\lambda'} \equiv c\, Y_\lambda .$$

Es seien jetzt $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ zwei nicht-leere Punktmengen, die jeweils in den verschiedenen Halbhyperebenen λ_0 und λ_1 liegen und vorerst mit einer Ausnahme beliebig sein können: Haben nämlich im Fall $\omega \neq 0$ *beide* Mengen einen nicht-leeren Durchschnitt mit dem Träger, so soll

$$\mathfrak{R}_{\lambda_0} \cap T = \mathfrak{R}_{\lambda_1} \cap T$$

sein. Jene beiden Mengen bestimmen dann eindeutig eine Menge des R_{n+1}, die wir ihre lineare Hülle nennen wollen und deren Durchschnitt mit den Halbhyperebenen des Halbbüschels die von $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ im Halbbüschel induzierte Linearschar liefert. Wir geben dazu die folgenden Definitionen (vgl. auch Fig. 2).

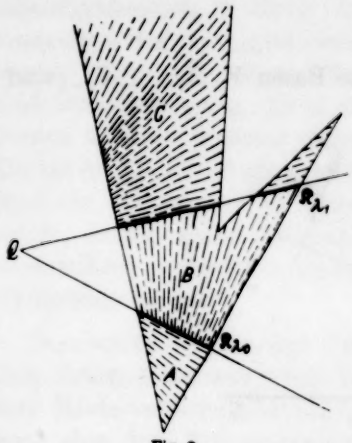

Fig. 2

Definition. Die *lineare Hülle* $[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]$ der beiden Mengen $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ ist die Vereinigung folgender drei Mengen:

A. *Kernschatten* von $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ bezüglich $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$, d.h. die Menge aller Punkte des R_{n+1}, für welche *jede* Verbindungsstrecke mit einem Punkt aus $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ die Menge $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ trifft.

B. *Verbindungsmenge* von $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$, d.h. die Vereinigung aller Verbindungsstrecken je eines Punktes aus $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$.

C. *Kernschatten* von $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ bezüglich $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$.

Definition. Die von den Mengen $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ im Halbbüschel *induzierte Linearschar* sei

$$[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} \overset{\text{def}}{=} [\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}] \cap \left(\text{Halbhyperebene } (1-t)\,\lambda_0 + t\,\lambda_1\right)$$

für jede reelle Zahl t.

Der Parameter t dieser Linearschar ist eine nur von den Halbhyperebenen der Mengen $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ und dem Halbbüschel abhängige Größe; denn er ist invariant beim Übergang zu einer äquivalenten Erzeugung des Halbbüschels. Wir vermerken noch, daß der Teil $0 \leqq t \leqq 1$ einer Linearschar stets aus nicht-leeren Mengen besteht, während für $t<0$ oder $t>1$ auch Leermengen auftreten können. Für alle nicht-leeren Mengen der Schar gilt eine bemerkenswerte Relation.

Satz. *Wenn* $[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} \neq \emptyset$ *ist für ein bestimmtes* t, *so gilt bei* $t \leqq 0$

$$[[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{\lambda_0} < \mathfrak{R}_{\lambda_0} \tag{1.3}$$

und bei $0 \leqq t$, *aber* $t \neq 1$

$$\mathfrak{R}_{\lambda_0} < [[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{\lambda_0}. \tag{1.4}$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{K}_\lambda = [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}$. Für $t \leqq 0$ ist $\mathfrak{K}_\lambda$ als Schnitt mit dem Kernschatten von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ bezüglich $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ definiert (vgl. Fig. 3), so daß *jede* Verbindungsstrecke eines Punktes aus $\mathfrak{K}_\lambda$ mit einem Punkt aus $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ die Menge $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ schneiden muß. Daraus folgt (1.3). Im Fall $0 \leqq t < 1$ ist $\mathfrak{K}_\lambda$ als Schnitt der Verbindungsmenge von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ erklärt (vgl. Fig. 4), so daß die Verbindungsstrecke eines Punktes aus $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ mit *jedem* Punkt aus $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ die Menge $\mathfrak{K}_\lambda$ schneidet. Also gilt (1.4). Für $1 < t$ wird $\mathfrak{K}_\lambda$ als Schnitt des Kernschattens von $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ bezüglich $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ gewonnen (vgl. Fig. 5), daher muß die Verbindungsstrecke eines Punktes aus $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ mit *jedem* Punkt aus $\mathfrak{K}_\lambda$ die

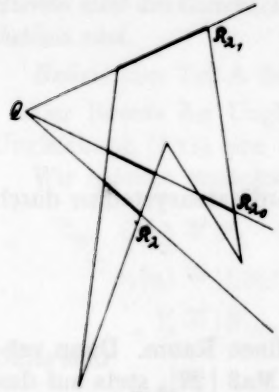

Fig. 3

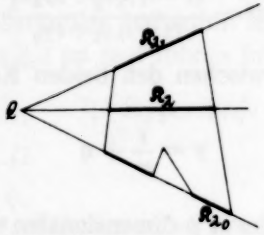

Fig. 4

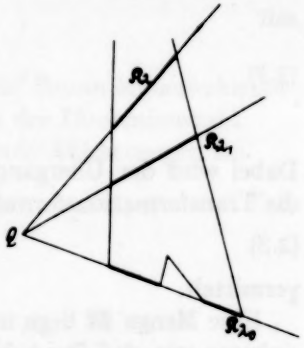

Fig. 5

Menge $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ treffen. Dies ergibt wieder (1.4). Schließlich zeigen die Beispiele der jeweiligen Abbildungen, daß in (1.3) und (1.4) im allgemeinen keine Mengengleichheit besteht.

2. Busemannscher und Brunn-Minkowskischer Satz

In diesem Abschnitt werden wir uns nur mit jenem Teil der Linearschar $[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}$ beschäftigen, für den $0 \leqq t \leqq 1$ ist. Gibt man dann die Punkte $P_i \in \mathfrak{K}_{\lambda_i}$ in der Form

$$\overrightarrow{OP_i} = \lambda_i L + \eta_i Y_{\lambda_i} + z_i^\varrho Z_\varrho \tag{2.1}$$

vor, so bestimmen sich die Punkte $P \in [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}$, die dargestellt sind durch

$$\overrightarrow{OP} = \big((1-t)\lambda_0 + t\lambda_1\big) L + \eta\, Y_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} + z^\varrho Z_\varrho, \tag{2.2}$$

als Schnitte der Halbhyperebene $(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1$ mit allen Geraden $\overrightarrow{OP_0} + \xi \overrightarrow{P_0 P_1}$. Aus der entsprechenden Gleichung erhält man unter Berücksichtigung von (1.2) die gesuchten Komponenten

$$\begin{cases} \eta = (1-\xi)\,\eta_0 + \xi\,\eta_1 \\ z^\varrho = (1-\xi)\, z_0^\varrho + \xi\, z_1^\varrho, \end{cases} \tag{2.3}$$

wobei

$$1 - \xi = \frac{(1-t)(1+\eta_1\omega)}{1 + ((1-t)\eta_1 + t\eta_0)\,\omega}, \qquad \xi = \frac{t(1+\eta_0\omega)}{1 + ((1-t)\eta_1 + t\eta_0)\,\omega} \tag{2.4}$$

ist.

Wenn man sich auf den Fall $\omega \neq 0$ beschränken kann, ist es zweckmäßiger, den durch (1.1) definierten Punkt Q als Ursprung zu wählen. Dann geht die Darstellung (2.1) der Punkte $P_i \in \mathfrak{K}_{\lambda_i}$ wegen (1.2) in

$$\overrightarrow{QP_i} = y_i Y_{\lambda_i} + z_i^\varrho Z_\varrho \tag{2.5}$$

über. Entsprechend erhält man aus (2.2) und (2.3) für die Punkte

$$P \in [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}, \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

die Gleichung

$$\overrightarrow{QP} = y\, Y_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} + z^\varrho Z_\varrho \tag{2.6}$$

mit

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_0 y_1}{(1-t)\, y_1 + t\, y_0} \\ z^\varrho = \dfrac{(1-t)\, y_1 z_0^\varrho + t\, y_0 z_1^\varrho}{(1-t)\, y_1 + t\, y_0}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dabei wird der Übergang zwischen den beiden Koordinatensystemen durch die Transformationsformel

$$y = \frac{1}{\omega} + \eta \tag{2.8}$$

vermittelt.

Eine Menge $\mathfrak{M}$ liege in einem p-dimensionalen affinen Raum. Dann vereinbaren wir, daß ihr p-dimensionales Lebesguesches Maß $|\mathfrak{M}|_p$ stets auf das Parallelotop als Maßeinheit bezogen werden soll, welches von den Basisvektoren aufgespannt wird, die in jenem p-dimensionalen Raum ausgezeichnet worden sind. In diesem Zusammenhang sei nochmals darauf hingewiesen, daß in jeder der Halbhyperebenen λ des Halbbüschels die Basisvektoren $Y_\lambda, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ gewählt wurden. Dabei besteht für die nach (1.2) definierten Vektoren Y_λ die für alle t gültige Beziehung

$$Y_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} = (1-t)\, Y_{\lambda_0} + t\, Y_{\lambda_1}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt den zentralen Satz über Linearscharen von Mengen in einem Halbbüschel formulieren.

Busemannscher Satz:

A. *Jeweils in den verschiedenen Halbhyperebenen λ_0 und λ_1 eines Halbbüschels seien $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ein konvexer Körper und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine kompakte Menge, die beide positives n-dimensionales Maß haben und die nicht beide den Träger T schneiden. Daraus folgt für die induzierte Linearschar mit $0<t<1$*

$$|[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n^{-1} \leqq (1-t)\, |\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1} + t\, |\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{-1}. \tag{2.9}$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine Parallelprojektion von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ist.

B. *Diese Behauptung bleibt richtig, wenn beide $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ konvexe Körper mit positivem n-dimensionalen Maß sind sowie*

$$\mathfrak{K}_{\lambda_0} \cap T = \mathfrak{K}_{\lambda_1} \cap T \quad \text{und} \quad |\mathfrak{K}_{\lambda_i} \cap T|_{n-1} > 0 \tag{2.10}$$

ist.

Die für beliebiges ω gültige Ungleichung (2.9) läßt sich im Spezialfall $\omega = 0$ natürlich wesentlich verschärfen durch den klassischen

Satz von BRUNN-MINKOWSKI:

In den verschiedenen Hyperebenen λ_0 und λ_1 eines Parallelbüschels seien jeweils $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ein konvexer Körper mit $|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n > 0$ und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine kompakte Menge. Daraus folgt für die Scharmengen mit $0 < t < 1$

$$|(1-t)\,\mathfrak{K}_{\lambda_0} + t\,\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{1/n} \geqq (1-t)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{1/n} + t\,|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{1/n}. \tag{2.11}$$

Hierbei steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ homothetisch sind.

Beweis von Teil A des Busemannschen Satzes:

Der Beweis der Ungleichung (2.9) enthält für die Brunn-Minkowskische Ungleichung (2.11) eine vollständige Induktion nach der Dimensionszahl.

Wir nehmen zunächst $n \geqq 2$ an und führen folgende Abkürzungen ein

$$\mathfrak{k}_i(\eta_i) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{K}_{\lambda_i} \cap (Z_0)_{P_i}, \qquad P_i \in \text{Hyperebene } \lambda_i, \qquad (i = 0; 1)$$
$$v_i(\eta_i) \overset{\text{def}}{=} |\mathfrak{k}_i(\eta_i)|_{n-1},$$
$$V_i \overset{\text{def}}{=} |\mathfrak{K}_{\lambda_i}|_n > 0.$$

Dann sind

$$\tau(\eta_i) \overset{\text{def}}{=} V_i^{-1} \int_{-\infty}^{\eta_i} v_i(u)\,du \tag{2.12}$$

monotone, absolut stetige Funktionen. Für sie setzen wir noch

$$\alpha_i \overset{\text{def}}{=} \sup\{\eta_i \mid \tau(\eta_i) = 0\}, \qquad \beta_i \overset{\text{def}}{=} \inf\{\eta_i \mid \tau(\eta_i) = 1\}. \tag{2.13}$$

Weil nun $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ein konvexer Körper sein sollte, so ist $\tau(\eta_0)$ für $\alpha_0 \leqq \eta_0 \leqq \beta_0$ sogar eine streng monotone, differenzierbare Funktion. Sie besitzt also eine Umkehrfunktion $\eta_0 = \eta_0(\tau)$ mit $0 \leqq \tau \leqq 1$, die für $0 < \tau < 1$ wegen (2.12) und $v_0(\eta_0) > 0$ die Ableitung

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = V_0 v_0^{-1}(\eta_0(\tau)) \tag{2.14}$$

hat. Dann ist auch

$$\eta_0(\eta_1) \overset{\text{def}}{=} \eta_0(\tau(\eta_1)) \tag{2.15}$$

eine monotone, absolut stetige Funktion mit

$$\begin{cases} \eta_0(\alpha_1) = \alpha_0 \\ \alpha_0 < \eta_0(\eta_1) < \beta_0 \qquad \text{für } \eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \\ \eta_0(\beta_1) = \beta_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

und aus (2.14) sowie (2.12) folgt

$$\frac{d\eta_0}{d\eta_1} = \frac{V_0}{V_1} \frac{v_1(\eta_1)}{v_0(\eta_0(\eta_1))} \qquad \text{für fast alle } \eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]. \tag{2.17}$$

Durch Substitution von $\eta_0(\eta_1)$ in (2.4) und (2.3a) gewinnt man jetzt für $\alpha_1 \leqq \eta_1 \leqq \beta_1$ eine streng monotone, absolut stetige Funktion

$$\eta(\eta_1) = (1-\xi(\eta_1))\,\eta_0(\eta_1) + \xi(\eta_1)\,\eta_1, \tag{2.18}$$

so daß jedem η ihres Wertebereichs genau ein $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ zugeordnet wird. Für die zueinander fremden Mengen

$$\mathfrak{k}(\eta) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} (1-\xi(\eta_1))\,\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) + \xi(\eta_1)\,\mathfrak{k}_1(\eta_1) & \text{für } \eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1] \text{ mit } \mathfrak{k}_1(\eta_1) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.19}$$

haben wir die Relation

$$[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} > \bigcup_{\eta} \mathfrak{k}(\eta),$$

die zur ersten Abschätzung führt

$$|[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1}\, d\eta. \tag{2.20}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung der Brunn-Minkowskische Satz für die Dimension $n-1$ gilt, folgt aus (2.19) für die dort in der ersten Zeile betrachteten η_1 die zweite Abschätzung

$$|\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \geqq \left[(1-\xi(\eta_1))\, v_0^{\frac{1}{n-1}}(\eta_0(\eta_1)) + \xi(\eta_1)\, v_1^{\frac{1}{n-1}}(\eta_1)\right]^{n-1} \tag{2.21}$$

Für alle $\eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ mit $v_1(\eta_1) > 0$ ist sogar $0 < \xi(\eta_1) < 1$, so daß wir weiter erhalten

$$= \left[(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right)^{\frac{1}{n}} \left\{v_0\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{\frac{1}{n-1}} + \xi\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)^{\frac{1}{n}} \left\{v_1\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\right]^{n-1}.$$

Wenden wir hierauf die Jensensche Ungleichung[5]) an, so ergibt sich unsere dritte Abschätzung

$$|\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \geqq \left[\frac{(1-\xi)^2}{1-t}\frac{V_0}{v_0} + \frac{\xi^2}{t}\frac{V_1}{v_1}\right]^{-1} \left\{(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right)^{\frac{1}{n}} + \xi\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n. \tag{2.22}$$

Andererseits ist nach (2.18) und (2.4)

$$d\eta = \frac{(1-\xi)^2}{1-t}\, d\eta_0 + \frac{\xi^2}{t}\, d\eta_1$$

und damit nach (2.17) für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ mit $v_1(\eta_1) > 0$

$$d\eta = \frac{v_1}{V_1}\left[\frac{(1-\xi)^2}{1-t}\frac{V_0}{v_0} + \frac{\xi^2}{t}\frac{V_1}{v_1}\right] d\eta_1. \tag{2.23}$$

---

[5]) Für zwei positive Zahlen v_0, v_1 und $0 < t < 1$ werde

$$M_p = \begin{cases} [(1-t)\, v_0^p + t\, v_1^p]^{1/p} & \text{für } p \neq 0 \\ v_0^{1-t}\, v_1^t & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist M_p eine für $-\infty < p < +\infty$ monoton wachsende Funktion, also für $p < q$ stets $M_p \leqq M_q$, wobei Gleichheit nur für $v_0 = v_1$ besteht.

Bei obiger Anwendung muß $p = -1$ und $q = \frac{1}{n-1}$ gesetzt werden. — Vgl. auch HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA [6].

Hieraus und aus (2.22) gewinnt man die für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ mit $v_1(\eta_1) > 0$ gültige Ungleichung

$$|\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \frac{d\eta}{d\eta_1} \geqq \left\{(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right)^{\frac{1}{n}} + \xi\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n \cdot \frac{v_1}{V_1}.$$

Weil sie aber für $v_1 = 0$ sicher richtig ist, gilt sie sogar für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$. Daher folgt aus (2.20)

$$(2.24)\quad |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n \geqq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\{(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right)^{\frac{1}{n}} + \xi\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n \cdot \frac{v_1}{V_1} d\eta_1.$$

Im Spezialfall $\omega = 0$ ist $\xi = t$; wir haben dann also die Brunn-Minkowskische Ungleichung (2.11) bewiesen. Dagegen können wir im allgemeinen Fall nochmals die Jensensche Ungleichung anwenden. Mit dieser vierten Abschätzung erhalten wir schließlich die gesuchte Ungleichung

$$(2.25)\qquad |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n \geqq \{(1-t) V_0^{-1} + t V_1^{-1}\}^{-1}.$$

Steht in dieser Relation das Gleichheitszeichen, so muß bei der vierten Abschätzung von (2.24) nach (2.25) die Gleichheit erhalten bleiben, also nach der Gleichheitsbedingung der Jensenschen Ungleichung

$$(2.26)\qquad \frac{1-\xi(\eta_1)}{1-t} V_0 = \frac{\xi(\eta_1)}{t} V_1 \qquad \text{für fast alle } \eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$$

sein. Für $\omega = 0$ heißt dies $V_0 = V_1$, was mit der Gleichheitsbedingung des Brunn-Minkowskischen Satzes bereits die Behauptung liefert. Wir können uns also bei der weiteren Diskussion des Gleichheitszeichens in (2.25) auf den Fall $\omega \neq 0$ beschränken.

Für die gemäß (2.15) erklärte Zuordnung folgt dann aus (2.4) und (2.26)

$$(2.27)\qquad y_1 V_0 = y_0 V_1 \qquad \text{für fast alle } y_i \in (a_i, b_i),$$

wenn wir mittels der Transformation (2.8) zum Ursprung Q übergehen und

$$a_i = \frac{1}{\omega} + \alpha_i, \qquad b_i = \frac{1}{\omega} + \beta_i$$

setzen. Hieraus ergibt sich, daß

$$2.28)\qquad y_1 Y_{\lambda_1} - y_0 Y_{\lambda_0} = y_0\left(\frac{V_1}{V_0} Y_{\lambda_1} - Y_{\lambda_0}\right) \qquad \text{für fast alle } y_0 \in (a_0, b_0)$$

parallele Vektoren sind. Andererseits erhält man aus (2.27) und (2.17)

$$(2.29)\qquad v_0(y_0) = v_1(y_1) \qquad \text{für fast alle } y_0 \in (a_0, b_0).$$

Diese Identität umfaßt bereits die Gleichheitsbedingung der dritten Abschätzung. Bei der zweiten Abschätzung (2.21) zieht Gleichheit die Homothetie von $\mathfrak{k}_0(y_0)$ und $\mathfrak{k}_1(y_1)$ für fast alle $y_0 \in (a_0, b_0)$ nach sich. Wegen (2.29) muß daher

$$(2.30)\qquad \mathfrak{k}_1(y_1) \text{ translationsgleich zu } \mathfrak{k}_0(y_0) \qquad \text{für fast alle } y_0 \in (a_0, b_0)$$

sein mit der durch (2.28) festgelegten Verschiebungsrichtung

$$VY_{\lambda_1} - Y_{\lambda_0} + c^{\varrho}(y_0) Z_{\varrho}, \quad \text{wobei} \quad V \overset{\text{def}}{=} \frac{V_1}{V_0}. \tag{2.31}$$

Sei $N \subset [a_0, b_0]$ die Nullmenge, für welche diese Translationsgleichheit noch nicht nachgewiesen werden konnte, so soll zunächst gezeigt werden, daß die in $C_{[a_0,b_0]}N$[6]) definierten Funktionen $c^{\varrho}(y_0)$ geeignet auf N erweitert werden können. Um dabei Fallunterscheidungen zu vermeiden, wählen wir den Vektor Y_{λ_0} so, daß die Koordinaten $y_0 > 0$ sind. $y_0 = 0$ kann nämlich für keinen Punkt aus $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ auftreten, weil dann wegen (2.27) und der Kompaktheit von $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ auch $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ den Träger T schneiden müßte, was ausgeschlossen war. Nun bilden wir für jedes $y_0 \in [a_0, b_0]$ die Funktionen[7])

$$\begin{cases} \underline{z}_0^{\mu}(y_0) = \inf \{z_0^{\mu} | P_0 \in \mathfrak{k}_0(y_0)\} \\ \overline{z}_0^{\mu}(y_0) = \sup \{z_0^{\mu} | P_0 \in \mathfrak{k}_0(y_0)\}, \end{cases} \tag{2.32}$$

die bei *festem* μ einen Teil des Randes der Parallelprojektion von $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ längs $(Z_1, \ldots, Z_{\mu-1}, Z_{\mu+1}, \ldots, Z_n)$ in die 2-dimensionale Ebene $(Y_{\lambda_0}, Z_{\mu})_Q$ darstellen. Sie sind also eine nach unten konvexe bzw. konkave Funktion und deshalb stetig sowie einseitig differenzierbar (vgl. BONNESEN-FENCHEL [*1*] S. 18—20). Weiter setzen wir

$$\underline{\lim}\, c^{\mu}(y_0) = \underline{c}^{\mu}, \quad \overline{\lim}\, c^{\mu}(y_0) = \overline{c}^{\mu} \qquad \text{für } y_0 \to \tilde{y}_0,$$

wobei $\tilde{y}_0 \in N$ und $y_0 \in C_{[a_0,b_0]}N$ ist, und wählen in $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ zwei konvergente Punktfolgen $\underline{P}_{0k}$ und $\overline{P}_{0k}$, für die

$$\underline{y}_{0k} \in C_{[a_0,b_0]}N, \quad \underline{y}_{0k} \to \tilde{y}_0, \quad c^{\mu}(\underline{y}_{0k}) \to \underline{c}^{\mu}$$

$$\underline{z}_{0k}^{\varrho} \to \begin{cases} \underline{z}_0^{\mu}(\tilde{y}_0) & \text{für } \varrho = \mu \\ \text{geeigneter Wert} & \text{für } \varrho \neq \mu \end{cases}$$

und analog

$$\overline{y}_{0k} \in C_{[a_0,b_0]}N, \quad \overline{y}_{0k} \to \tilde{y}_0, \quad c^{\mu}(\overline{y}_{0k}) \to \overline{c}^{\mu}$$

$$\overline{z}_{0k}^{\varrho} \to \begin{cases} \overline{z}_0^{\mu}(\tilde{y}_0) & \text{für } \varrho = \mu \\ \text{geeigneter Wert} & \text{für } \varrho \neq \mu. \end{cases}$$

Vermöge der Translationsgleichheit (2.30) und (2.31) wird jetzt eine Abbildung von $P_0 \in \mathfrak{R}_{\lambda_0}$ in $P_1 \in \mathfrak{R}_{\lambda_1}$ für $y_0 \in C_{[a_0,b_0]}N$ definiert:

$$\overrightarrow{QP_1} = y_0 V Y_{\lambda_1} + (z_0^{\varrho} + y_0 c^{\varrho}(y_0)) Z_{\varrho}. \tag{2.33}$$

Unter dieser Abbildung gehen unsere beiden Punktfolgen aus $\mathfrak{R}_{\lambda_0}$ in Punktfolgen aus $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ mit den Grenzpunkten $\underline{P}_1$ bzw. $\overline{P}_1$ über, für die

$$\begin{cases} \underline{y}_1 = \overline{y}_1 = \tilde{y}_0 V \\ \underline{z}_1^{\varrho} = \underline{z}_0^{\mu}(\tilde{y}_0) + \tilde{y}_0 \underline{c}^{\mu}, \quad \overline{z}_1^{\varrho} = \overline{z}_0^{\mu}(\tilde{y}_0) + \tilde{y}_0 \overline{c}^{\mu} \quad \text{für } \varrho = \mu \end{cases} \tag{2.34}$$

[6]) $C_{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ bezeichne das Komplement der Menge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ bezüglich der Menge $\mathfrak{B}$.

[7]) Wegen der Bezeichnungen vgl. bereits jetzt Fig. 6.

ist und die wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ zu $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ gehören. Hieraus und aus der Gleichheitsbedingung für die erste Abschätzung (2.20) folgt dann

$$[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \overline{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1} < [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1} = \bigcup_y \left(\mathfrak{k}(y) \cup \mathfrak{n}(y)\right),$$

wobei $\mathfrak{n}(y) < (Z_\varrho)_P$ fremd zu $\mathfrak{k}(y)$ und fast überall $|\mathfrak{n}(y)|_{n-1} = 0$ ist. Weil jedoch $[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \overline{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}$ durch Vereinigung zweier konvexer Körper mit Innenpunkten entsteht, muß sogar gelten

$$[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \overline{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1} \cap (Z_\varrho)_P < \mathfrak{k}(y) \qquad \text{für fast alle } y. \tag{2.35}$$

Dabei ist noch

$$\mathfrak{k}(y) \text{ translationsgleich zu } \mathfrak{k}_0(y_0) \text{ für fast alle } y_0 \in [a_0, b_0], \tag{2.36}$$

wenn man

$$y = \frac{y_0 V}{(1-t)V + t} \tag{2.37}$$

setzt. Projiziert man nun $[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \overline{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}$ längs $(Z_1, \ldots, Z_{\mu-1}, Z_{\mu+1}, \ldots, Z_{n-1})$ in die 2-dimensionale Ebene $(Y_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}, Z_\mu)_Q$, so erhält man wieder die Vereinigung zweier konvexer Bereiche, deren Rand nach (2.32), (2.34) und (2.7) teilweise durch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} y = \dfrac{x\,\tilde{y}_0 V}{(1-t)\,\tilde{y}_0 V + t\,x} \\ \underline{z}^\mu(x) = \dfrac{(1-t)\,\tilde{y}_0 V\,\underline{z}_0^\mu(x) + t\,x\,\underline{z}_1^\mu}{(1-t)\,\tilde{y}_0 V + t\,x} \\ \text{bzw.} \\ \overline{z}^\mu(x) = \dfrac{(1-t)\,\tilde{y}_0 V\,\overline{z}_0^\mu(x) + t\,x\,\overline{z}_1^\mu}{(1-t)\,\tilde{y}_0 V + t\,x} \end{cases} \tag{2.38}$$

gegeben wird. Da aber bei der betrachteten Projektion für die Bilder der Mengen von (2.35) die entsprechende Relation in der 2-dimensionalen Ebene $(Y_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}, Z_\mu)_Q$ bestehen muß, folgt zusammen mit (2.36)

$$\overline{z}^\mu(x) - \underline{z}^\mu(x) \leqq \overline{z}_0^\mu(y_0) - \underline{z}_0^\mu(y_0) \qquad \text{für fast alle } y_0 \in [a_0, b_0].$$

Hieraus gewinnt man nach Einsetzen der entsprechenden Größen (2.38) und (2.34) sowie anschließendem Grenzübergang $y_0 \to \tilde{y}_0$ (folglich auch $x \to \tilde{y}_0$) die Ungleichung

$$\overline{c}^\mu - \underline{c}^\mu \leqq 0.$$

Es existiert also der Grenzwert

$$\lim c^\varrho(y_0) = \overline{c}^\varrho = \underline{c}^\varrho \qquad \text{für} \quad y_0 \in C_{[a_0, b_0]}N, \qquad y_0 \to \tilde{y}_0 \in N,$$

und die durch (2.34) gegebenen Punkte $\underline{P}_1, \overline{P}_1$ besitzen tatsächlich extremale z_1^μ-Koordinaten bezüglich aller Punkte aus $\mathfrak{k}_1(\tilde{y}_0 V)$. Natürlich gelten diese Überlegungen auch für $\tilde{y}_0 \in C_{[a_0, b_0]}N$, was dann die Stetigkeit der Funktionen

$c^{\varrho}(y_0)$ in $C_{[a_0, b_0]}N$ beweist. Im folgenden wollen wir diese Funktionen durch die Festsetzung

$$c^{\varrho}(\tilde{y}_0) \overset{\text{def}}{=} \lim c^{\varrho}(y_0) \qquad \text{für} \quad y_0 \in C_{[a_0, b_0]}N, \quad y_0 \to \tilde{y}_0 \in N$$

auf das ganze Intervall $[a_0, b_0]$ erweitern.

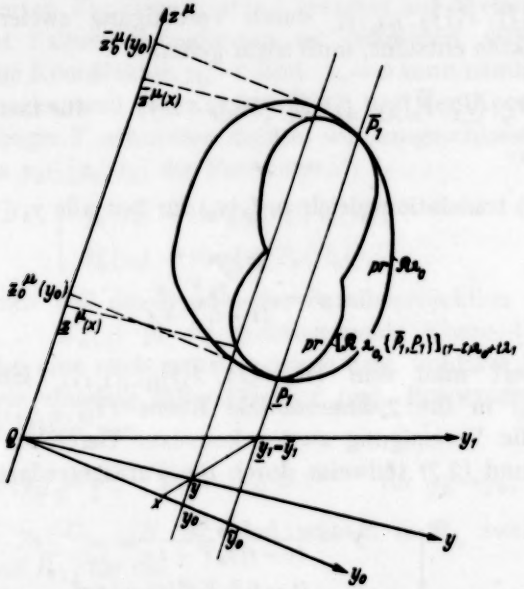

Fig. 6 stellt die Projektion des 3-dimensionalen Raumes $(Y_{\lambda_0}, Y_{\lambda_1}, Z_{\mu})_Q$ längs der Richtung $V Y_{\lambda_1} - Y_{\lambda_0} + c^{\varrho}(\tilde{y}_0) Z_{\varrho}$ auf eine 2-dimensionale Ebene dar

Zu jedem $\tilde{P}_0 \in \mathfrak{k}_0(\tilde{y}_0)$ mit $\tilde{y}_0 \in N$ gibt es nun eine Punktfolge $P_{0k} \in \mathfrak{R}_{\lambda_0}$ mit $y_{0k} \in C_{[a_0, b_0]}N$ und $P_{0k} \to \tilde{P}_0$. Ihr entspricht unter der Abbildung (2.33) eine konvergente Punktfolge in $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$, deren Grenzpunkt $\tilde{P}_1$ durch

$$\overrightarrow{QP_1} = \tilde{y}_0 V Y_{\lambda_1} + (\tilde{z}_0^{\varrho} + \tilde{y}_0 c^{\varrho}(\tilde{y}_0)) Z_{\varrho}$$

bestimmt ist und in $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ liegt. Dies heißt aber, daß $\mathfrak{k}_1(\tilde{y}_0 V)$ eine Menge enthält, die translationsgleich zu $\mathfrak{k}_0(\tilde{y}_0)$ ist.

Jetzt müssen wir noch die Konstanz der Funktionen $c^{\varrho}(y_0)$ im Intervall $[a_0, b_0]$ nachweisen[8]). Dazu betrachten wir für ein beliebiges $\tilde{y}_0 \in [a_0, b_0]$ wiederum die Menge $[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \bar{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} \cap (Z_{\varrho})_P$. Sie liegt nunmehr einerseits in der Menge, die durch Translation von $\mathfrak{k}_0(y_0)$ in die Halbhyperebene $(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1$ längs der Richtung

$$V Y_{\lambda_1} - Y_{\lambda_0} + c^{\varrho}(\tilde{y}_0) Z_{\varrho} \tag{2.39}$$

gewonnen wird, während andererseits die Beziehung (2.35) und (2.36) mit der Translationsrichtung (2.31) besteht. Bei der Translation eines Punktes P_0 in

[8]) Vgl. für diese Schlüsse Fig. 6.

die Halbhyperebene $(1-t)\lambda_0+t\lambda_1$ längs einer Richtung $VY_{\lambda_1}-Y_{\lambda_0}+c^\varrho Z_\varrho$ gilt aber für den Bildpunkt P

$$\overrightarrow{QP}=\frac{y_0 V}{(1-t)V+t}\,Y_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}+\Big(z_0^\varrho+\frac{t\,y_0\,c^\varrho}{(1-t)V+t}\Big)Z_\varrho,$$

also für die Differenz der z^ϱ-Koordinaten der entsprechenden Bildpunkte bei den Translationen (2.31) und (2.39)

$$\Delta z^\varrho=\frac{t\,y_0}{(1-t)V+t}\left(c^\varrho(y_0)-c^\varrho(\tilde{y}_0)\right). \tag{2.40}$$

Wir wählen wieder ein festes μ und projizieren die in der Halbhyperebene $(1-t)\lambda_0+t\lambda_1$ betrachteten Mengen auf die 2-dimensionale Ebene $(Y_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}, Z_\mu)_Q$ längs der übrigen Vektoren Z_ϱ $(\varrho\neq\mu)$, wobei die Enthaltenseinsrelationen bestehen bleiben. Dann muß für die durch (2.32) und (2.38) gegebenen extremalen Koordinaten von $\mathfrak{k}_0(y_0)$ bzw. $[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \{\underline{P}_1, \overline{P}_1\}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}\cap(Z_\varrho)_P$ bezüglich Z_μ wenigstens für fast alle $y_0\in[a_0, b_0]$ gelten

$$|\Delta z^\mu|\leqq\bar{z}_0^\mu(y_0)-\underline{z}_0^\mu(y_0)-\left(\bar{z}^\mu(x)-\underline{z}^\mu(x)\right).$$

Hat man einen Wert $y_0\in[a_0, b_0]$, für den das Bestehen dieser Ungleichung noch nicht gesichert ist, so wählen wir eine gegen y_0 konvergierende Folge $y_{0k}\in C_{[a_0,b_0]}N$, für welche die Ungleichung gilt. Wegen der oben gewonnenen Eigenschaften von $c^\varrho(y_0)$ und der Stetigkeit der übrigen in die Ungleichung eingehenden Funktionen folgt dann durch Grenzübergang die Gültigkeit der Ungleichung für y_0, also für das ganze Intervall $[a_0, b_0]$. Mit $\bar{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)-\underline{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)=\bar{z}^\mu(\tilde{y}_0)-\underline{z}^\mu(\tilde{y}_0)$ erhalten wir weiter

$$\left|\frac{\Delta z^\mu}{y_0-\tilde{y}_0}\right|\leqq\left|\frac{\bar{z}_0^\mu(y_0)-\bar{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)}{y_0-\tilde{y}_0}-\frac{\underline{z}_0^\mu(y_0)-\underline{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)}{y_0-\tilde{y}_0}-\frac{\bar{z}^\mu(x)-\bar{z}^\mu(\tilde{y}_0)}{y_0-\tilde{y}_0}+\frac{\underline{z}^\mu(x)-\underline{z}^\mu(\tilde{y}_0)}{y_0-\tilde{y}_0}\right|. \tag{2.41}$$

Wie oben bereits bemerkt, sind aber die Funktionen in (2.32) und damit in (2.38) einseitig differenzierbar, so daß wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert der rechten Seite dieser Ungleichung für $y_0\to\tilde{y}_0\pm0$ berechnen können. Aus (2.38) und (2.37) folgt nämlich

$$x(y_0)=\frac{(1-t)\,\tilde{y}_0\,y_0\,V}{(1-t)\,\tilde{y}_0\,V+t(\tilde{y}_0-y_0)}$$

und somit für die gesuchten Grenzwerte

$$\bar{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-\underline{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-\left(\bar{z}_\pm^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-\underline{z}_\pm^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)\right)x'(\tilde{y}_0)=\bar{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-\underline{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-$$
$$-\left(\frac{(1-t)\,\tilde{y}_0\,V\,[\bar{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)-\underline{z}_{0\pm}^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)]+t\,[\bar{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)-\underline{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)]}{\tilde{y}_0\,((1-t)\,V+t)}-\frac{[\bar{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)-\underline{z}_0^\mu(\tilde{y}_0)]\,t}{\tilde{y}_0\,((1-t)\,V+t)}\right)\times$$
$$\times\frac{(1-t)\,V+t}{(1-t)\,V}=0.$$

Dann existiert auch der Grenzwert der linken Seite von (2.41) und nach (2.40) die Ableitung

$$c^{\mu\prime}(\tilde{y}_0)=0.$$

Dies gilt für jedes μ, also ist

$$c^{\varrho}(\tilde{y}_0) = c^{\varrho} = \text{const} \qquad \text{für } \tilde{y}_0 \in [a_0, b_0].$$

Hiermit haben wir bewiesen, daß bei Gleichheit in (2.9) sowohl $[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}$ als auch $\mathfrak{K}_{\lambda_t}$ die Parallelprojektion von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ in die Halbhyperebene $(1-t)\lambda_0+t\lambda_1$ bzw. λ_1 längs der Richtung

$$V Y_{\lambda_1} - Y_{\lambda_0} + c^{\varrho} Z_{\varrho} \tag{2.42}$$

enthalten muß und sich von dieser Projektion höchstens um eine Menge mit n-dimensionalem Maß Null unterscheiden darf. Aber jeder Punkt aus $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$, der nicht in der Projektion von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ liegt, bewirkt, daß sich $[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}$ von der genannten Projektion um eine Menge von positivem n-dimensionalen Maß unterscheidet. Also ist für Gleichheit in (2.9) notwendig, daß $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ durch Parallelprojektion auseinander hervorgehen, da offenbar jede Projektionsrichtung auf die Form (2.42) gebracht werden kann.

Jetzt bleibt noch der Fall $n = 1$ zu untersuchen. Hierzu brauchen wir nur den eben für $n > 1$ geführten Beweis zu spezialisieren, indem wir das nulldimensionale Maß einführen durch

$$|\mathfrak{m}|_{n-1} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{m} \neq \emptyset \\ 0, & \text{wenn } \mathfrak{m} = \emptyset. \end{cases}$$

Während dann die Überlegungen bis zur ersten Abschätzung (2.20) erhalten bleiben, entfällt die 2. und 3. Abschätzung. Dafür folgt aus (2.23) direkt die Gleichung

$$|\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \frac{d\eta}{d\eta_1} = \left\{(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t} V_0\right) + \xi\left(\frac{\xi}{t} V_1\right)\right\} \frac{v_1}{V_1}$$

für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ und somit wieder (2.24). Im Spezialfall $\omega = 0$ ist damit die Brunn-Minkowskische Ungleichung für $n = 1$ bewiesen, also die Induktionsvoraussetzung des obigen Beweises vollständig gesichert. Im Fall $\omega \neq 0$ folgt wiederum nach der vierten Abschätzung die Behauptung (2.25). Die Gleichheitsbedingung ergibt sich aus den Betrachtungen bis Gl. (2.29) sowie der Bemerkung, daß $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ kompakt ist und ein Punkt außerhalb des Intervalles $[a_1, b_1]$ Ungleichheit in (2.20) zur Folge hat.

Beweis von Teil B des Busemannschen Satzes: Auch hier verfolgen wir nur die Modifikationen, die an dem eben geführten Beweis vorgenommen werden müssen. Da jetzt beide Mengen $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ konvexe Körper sind, die den Träger T schneiden, ist die in (2.18) eingehende Funktion $\xi(\eta_1)$ in einem Endpunkt des Intervalles $[\alpha_1, \beta_1]$ nicht mehr definiert. Diese aus (2.4) erkennbare Eigenschaft versagt uns, auf die absolute Stetigkeit der in (2.18) definierten Substitutionsfunktion $\eta(\eta_1)$ zu schließen. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ ist jedoch die in (2.15) eingeführte Funktion $\eta_0(\eta_1)$ in (α_1, β_1) sogar stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{d\eta_0}{d\eta_1} = \frac{V_0}{V_1} \frac{v_1(\eta_1)}{v_0(\eta_0(\eta_1))}.$$

Dann läßt sich $\xi(\eta_1)$ nach der Regel von DE L'HOSPITAL stetig auf den kritischen Endpunkt $\eta_1 = -\frac{1}{\omega}$ des Intervalles $[\alpha_1, \beta_1]$ fortsetzen, weil dort nach Voraussetzung $v_0 = v_1 > 0$ ist:

$$\xi\left(-\frac{1}{\omega}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{t V_0}{(1-t) V_1 + t V_0}.$$

Die Funktion $\eta(\eta_1)$ in (2.18) ist also in $[\alpha_1, \beta_1]$ stetig sowie in (α_1, β_1) stetig differenzierbar, so daß sie als Substitutionsfunktion für das jetzt Riemannsche Integral in (2.20) dienen kann. Der weitere Beweis verläuft wie oben, allerdings sind bei der Diskussion des Gleichheitszeichens wesentliche Vereinfachungen möglich. Weil nämlich $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ konvex ist, sind die durch (2.31) eingeführten Funktionen $c^{\varrho}(y_0)$ für alle $y_0 \in (0, b_0]$ definiert, so daß wir nur die Konstanz dieser Funktion zu zeigen haben. Auf den dabei ausgeschlossenen Wert $y_0 = 0$ können die Funktionen wegen der Voraussetzung (2.10) natürlich stetig erweitert werden.

3. Die Spiegeltheoreme

Beim Busemannschen als auch beim Brunn-Minkowskischen Satz wurde nur der zwischen den beiden Mengen $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$, $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ liegende Teil der von ihnen im Halbbüschel induzierten Linearschar betrachtet. Wir wollen jetzt für den übrigen Teil dieser Linearschar die entsprechenden entgegengesetzten Ungleichungen nachweisen.

Spiegeltheorem zum Busemannschen Satz:

A. *Jeweils in den verschiedenen Halbhyperebenen λ_0 und λ_1 eines Halbbüschels seien $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ein konvexer Körper und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine kompakte Menge, die beide positives n-dimensionales Maß haben und die nicht beide den Träger T schneiden. Daraus folgt für alle Mengen der induzierten Linearschar mit $t > 1$, die beschränkt sind und positives n-dimensionales Maß besitzen,*

$$(3.1)^{9}) \qquad |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n^{-1} \geqq (1-t)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1} + t\,|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{-1}.$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn eine maßgleiche Teilmenge von $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine Parallelprojektion von $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ist.

B. *Diese Aussage A ist äquivalent zu Teil A des Busemannschen Satzes.*

C. *Beide $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ seien konvexe Körper mit positivem Maß, die entweder nicht beide den Träger schneiden oder für die*

$$\mathfrak{K}_{\lambda_0} \cap T = \mathfrak{K}_{\lambda_1} \cap T \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{K}_{\lambda_i} \cap T|_{n-1} > 0$$

ist. Dann gilt die Behauptung A sogar für $t < 0$ und $t > 1$. Außerdem sind die den drei Fällen $t < 0$, $0 < t < 1$, $1 < t$ entsprechenden Aussagen des Busemannschen Satzes bzw. seines Spiegeltheorems untereinander äquivalent.

[9]) Es ist zu beachten, daß man im Gegensatz zum Busemannschen Satz bei dieser Ungleichung nicht ohne weiteres zum reziproken Wert übergehen darf, da die rechte Seite auch negativ sein könnte.

Beweis von Teil A: Für $t>1$, also $1-t<0$ gilt nach (1.3)

$$\mathfrak{K}_{\lambda_1} > [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}]_{\lambda_1}.$$

Nun ist aber $\lambda_1=(1-\tau)\lambda_0+\tau\left((1-t)\lambda_0+t\lambda_1\right)$ mit

$$0<\tau=\frac{1}{t}<1.$$

Man kann deshalb auf die rechte Seite der Ungleichung

$$|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n \geqq |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}]_{\lambda_1}|_n \tag{3.2}$$

den Busemannschen Satz anwenden. Sie ist also

$$\geqq \left((1-\tau)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1}+\tau\,|[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}|_n^{-1}\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{\tau}\,|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{-1} \leqq \frac{1-\tau}{\tau}\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1}+|[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}|_n^{-1},$$

was bereits die fragliche Ungleichung darstellt. Soll in ihr das Gleichheitszeichen stehen, so erfordert dies Gleichheit in (3.2) und (3.3). Letztere führt aber auf die Gleichheitsbedingung des Busemannschen Satzes, welche dann mit der Gleichheit in (3.2) die Behauptung liefert.

Beweis der Äquivalenz B: Für $0<t<1$ gilt nach (1.4)

$$\mathfrak{K}_{\lambda_1} < [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}]_{\lambda_1}$$

und somit

$$0<|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n \leqq |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}]_{\lambda_1}|_n.$$

Weil jetzt $\lambda_1=(1-\tau)\lambda_0+\tau\left((1-t)\lambda_0+t\lambda_1\right)$ mit $\tau=\frac{1}{t}>1$ ist, kann auf die rechte Seite der Ungleichung

$$|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{-1} \geqq |[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}]_{\lambda_1}|_n^{-1}$$

das Spiegeltheorem angewandt werden, also

$$\geqq (1-\tau)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1}+\tau\,|[\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}|_n^{-1}.$$

Daraus erhält man unmittelbar die Ungleichung des Busemannschen Satzes. Die Diskussion des Gleichheitszeichens verläuft ähnlich wie in Teil A.

Beweis von Teil C: Aus dem obigen Beweis erkennt man, daß das Spiegeltheorem auch unter den veränderten Voraussetzungen im Falle $t>1$ bestehen bleibt. Weil für $t<0$ aber $1-t>1$ ist, folgt daraus

$$|[\mathfrak{K}_{\lambda_1}, \mathfrak{K}_{\lambda_0}]_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_0}|_n^{-1} \geqq t\,|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{-1}+(1-t)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{-1},$$

also das Spiegeltheorem im Falle $t<0$.

Auch die für beliebiges ω gültige Spiegelungleichung (3.1) kann im Fall $\omega = 0$ wesentlich verschärft[10]) werden durch das auf ERHARD SCHMIDT [8], [9] und HADWIGER [5] zurückgehende

Spiegeltheorem zum Brunn-Minkowskischen Satz:

A. *Jeweils in den verschiedenen Hyperebenen λ_0 und λ_1 eines Parallelbüschels seien $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ein konvexer Körper mit $|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n > 0$ und $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ eine kompakte Menge. Daraus folgt für die nicht-leeren Scharmengen[11]) mit $t > 1$*

$$|(1-t)\,\mathfrak{K}_{\lambda_0} + t\,\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{1/n} \geqq (1-t)\,|\mathfrak{K}_{\lambda_0}|_n^{1/n} + t\,|\mathfrak{K}_{\lambda_1}|_n^{1/n}.$$

Hierbei steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn eine maßgleiche Teilmenge von $\mathfrak{K}_{\lambda_1}$ homothetisch zu $\mathfrak{K}_{\lambda_0}$ ist.

B. *Die Aussage A ist äquivalent zum Brunn-Minkowskischen Satz.*

C. *Sind beide $\mathfrak{K}_{\lambda_i}$ konvexe Körper, so gilt die Behauptung A auch für $t < 0$. Außerdem sind die den drei Fällen $t < 0$, $0 < t < 1$, $1 < t$ entsprechenden Aussagen des Brunn-Minkowskischen Satzes bzw. seines Spiegeltheorems untereinander äquivalent.*

Auf den Beweis können wir hier verzichten, da er analog dem des Spiegeltheorems zum Busemannschen Satz verläuft.

4. Harmonische Linearkombination von Mengen

Bei den Anwendungen des Brunn-Minkowskischen Satzes hat es sich als fruchtbar erwiesen, von der Linearschar in einem Parallelbüschel zu ihrer Parallelprojektion in eine der n-dimensionalen Büschelhyperebenen überzugehen. Dort kann man dann noch eine Multiplikation $\alpha\mathfrak{K}$ einer Menge mit einer Zahl $\alpha \geqq 0$ als Homothetie bezüglich des Ursprunges einführen, wodurch sich die Projektionen der Linearscharen zu Linearkombinationen $\alpha\mathfrak{K}_0 + \beta\mathfrak{K}_1$ erweitern lassen, deren Koeffizienten nicht beide negativ sind. Diese *Minkowskischen Linearkombinationen* sind im allgemeinen von der Wahl des Ursprunges abhängig, nur für eine Koeffizientensumme $\alpha + \beta = 1$ tritt Unabhängigkeit vom Ursprung ein. Wir wollen auf diesen bei BONNESEN-FENCHEL [1]

[10]) Daß es sich tatsächlich um eine Verschärfung handelt, erkennt man aus folgender Ungleichung: Für zwei positive Zahlen v_0, v_1 und $t > 1$ gilt

$$\left((1-t)\,v_0^{1/n} + t\,v_1^{1/n}\right)^n \leqq \left((1-t)\,v_0^{-1} + t\,v_1^{-1}\right)^{-1},$$

wenn die rechte Seite positiv ist. Setzt man nämlich diese rechte Seite gleich v, so erhält man

$$v_1 = \left(\frac{t-1}{t}\,v_0^{-1} + \frac{1}{t}\,v^{-1}\right)^{-1} \qquad \text{mit } 0 < \frac{1}{t} < 1.$$

Daraus folgt aber mittels der Jensenschen Ungleichung (vgl. Fußnote 5)

$$v_1 \leqq \left(\frac{t-1}{t}\,v_0^{1/n} + \frac{1}{t}\,v^{1/n}\right)^n,$$

was unmittelbar zu der behaupteten Ungleichung führt.

[11]) Bei einem Parallelbüschel ($\omega = 0$) schreibt man allgemein

$$(1-t)\mathfrak{K}_{\lambda_0} + t\mathfrak{K}_{\lambda_1} \text{ statt } [\mathfrak{K}_{\lambda_0}, \mathfrak{K}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}.$$

und HADWIGER [5] entwickelten Kalkul nicht weiter eingehen, sondern uns mit einer entsprechenden Entwicklung für eigentliche Halbbüschel ($\omega \neq 0$) beschäftigen. Dabei werden wir, den neuen Zwecken entsprechend, die Voraussetzungen gegenüber der Theorie der Halbbüschel etwas verändern. In einem n-dimensionalen affinen Raum R_n ($n \geqq 1$) seien ein $(n-1)$-dimensionaler (eigentlicher) Unterraum T und eine dazu nicht parallele, durch einen Vektor Y gegebene Richtung ausgezeichnet. Alle weiteren Betrachtungen sollen sich in dem *mit der ausgezeichneten Richtung versehenen Raum* $C_{R_n}T$ abspielen, für dessen Mengen wir eine Reihe von Operationen erklären werden. Hierzu führen wir zweckmäßigerweise folgendes Koordinatensystem ein:

Ursprung $Q \in T$,
Vektor Y,
Basisvektoren Z_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, n-1$) von T.

Jeder Punkt $P \in C_{R_n}T$ werde nun durch die zugehörigen Koordinaten gekennzeichnet:

$$P = (y, z^\varrho) \quad \text{mit} \quad y \neq 0.$$

Definition *der harmonischen Linearkombination:*

Gegeben seien zwei nicht-leere Mengen $\mathfrak{R}_i \subset C_{R_n}T$, $(i = 0; 1)$ und zwei reelle Zahlen α, β, von denen mindestens eine positiv ist. Dann setzen wir für $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$ (aber nicht $\alpha = \beta = 0$)

$$(\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha y_0^{-1} + \beta y_1^{-1}}, \frac{\alpha y_0^{-1} z_0^\varrho + \beta y_1^{-1} z_1^\varrho}{\alpha y_0^{-1} + \beta y_1^{-1}} \right) \middle| (y_i, z_i^\varrho) \in \mathfrak{R}_i \right\},$$

für $\alpha > 0, \beta < 0$

$$(\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left\{ (y, z^\varrho) \middle| \text{ für } \textit{jedes } (y_1, z_1^\varrho) \in \mathfrak{R}_1 \ \exists \text{ ein } (y_0, z_0^\varrho) \in \mathfrak{R}_0 \text{ mit } (y, z^\varrho) = \left(\frac{1}{\alpha y_0^{-1} + \beta y_1^{-1}}, \frac{\alpha y_0^{-1} z_0^\varrho + \beta y_1^{-1} z_1^\varrho}{\alpha y_0^{-1} + \beta y_1^{-1}} \right) \right\}$$

und für $\alpha < 0, \beta > 0$

$$(\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \overset{\text{def}}{=} (\beta \mathfrak{R}_1^{-1} + \alpha \mathfrak{R}_0^{-1})^{-1}.$$

Im allgemeinen kann man die harmonische Linearkombination zweier Mengen durch die im folgenden erklärten Operationen zusammensetzen.

Definition *der Multiplikation und Spiegelung in der ausgezeichneten Richtung:*

Für eine nicht-leere Menge $\mathfrak{R} \subset C_{R_n}T$ und eine Zahl $\alpha > 0$ setzen wir

$$\alpha * \mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \{(\alpha y, z^\varrho) \,|\, (y, z^\varrho) \in \mathfrak{R}\}$$
$$\mathfrak{R}^* \overset{\text{def}}{=} \{(-y, z^\varrho) \,|\, (y, z^\varrho) \in \mathfrak{R}\}.$$

Definition *der harmonischen Addition und Subtraktion:*

Für zwei nicht-leere Mengen $\mathfrak{R}_i \subset C_{R_n}T$, $(i = 0; 1)$ sei

$$(\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left(\frac{1}{y_0^{-1} + y_1^{-1}}, \frac{y_0^{-1} z_0^\varrho + y_1^{-1} z_1^\varrho}{y_0^{-1} + y_1^{-1}} \right) \middle| (y_0, z_0^\varrho) \in \mathfrak{R}_0, (y_1, z_1^\varrho) \in \mathfrak{R}_1 \right\}$$

und

$$(4.1)\quad \begin{cases} (\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \\ \quad \overset{\text{def}}{=} \left\{ (y, z^\varrho) \,\middle|\, \text{für } \textit{jedes } (y_1, z_1^\varrho) \in \mathfrak{R}_1 \curvearrowright \left(\frac{1}{y^{-1} + y_1^{-1}},\ \frac{y^{-1} z^\varrho + y_1^{-1} z_1^\varrho}{y^{-1} + y_1^{-1}} \right) \in \mathfrak{R}_0 \right\}. \end{cases}$$

Die durch die eben eingeführten Operationen entstehenden Mengen sind natürlich als Mengen in $C_{R_n} T$ aufzufassen und können leer sein. Wie man leicht bestätigt, bleiben alle Operationen invariant beim Übergang zu einem neuen Ursprung $Q' \in T$, einem neuen Vektor $Y' = c\,Y$ in der ausgezeichneten Richtung ($c \neq 0$) und neuen Basisvektoren Z'_ϱ von T. *Unsere Definitionen im $C_{R_n} T$ hängen also nur von der ausgezeichneten Richtung ab.* Dabei ist erwähnenswert, daß die Menge $\left((1-t)\,\mathfrak{R}_0^{-1} + t\,\mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1}$ mit beliebigem t auch noch von dieser Richtung unabhängig ist.

Bei der Formulierung der Eigenschaften dieser Operationen ist zu beachten, daß keine Menge, auf die eine der eben definierten Operationen ausgeübt wird, also auch keine erst durch eine Rechnung gewonnene Menge leer sein darf.

Satz[12]). Für $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_i \subset C_{R_n} T$ und $\alpha, \beta > 0$ gilt:

$$(4.2a)\quad \alpha * (\beta * \mathfrak{R}) = (\alpha\beta) * \mathfrak{R},$$

$$(4.2b)\quad 1 * \mathfrak{R} = \mathfrak{R},$$

$$(4.2c)\quad \alpha * \mathfrak{R}^* = (\alpha * \mathfrak{R})^*,$$

$$(4.2d)\quad (\mathfrak{R}^*)^* = \mathfrak{R},$$

$$(4.3a)\quad (\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = C(C\,\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{*-1})^{-1},$$

$$(4.3b)\quad (\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = C(C\,\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{*-1})^{-1},$$

$$(4.4)\quad (\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = (\mathfrak{R}_1^{-1} + \mathfrak{R}_0^{-1})^{-1},$$

$$(4.5a)\quad \left((\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{-1}) + \mathfrak{R}_2^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathfrak{R}_0^{-1} + (\mathfrak{R}_1^{-1} + \mathfrak{R}_2^{-1})\right)^{-1},$$

$$(4.5b)\quad \left((\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1}) - \mathfrak{R}_2^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathfrak{R}_0^{-1} - (\mathfrak{R}_1^{-1} + \mathfrak{R}_2^{-1})\right)^{-1},$$

$$(4.5c)\quad \left((\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1}) + \mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1} \subset \mathfrak{R}_0,$$

$$(4.5d)\quad \left((\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{-1}) - \mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1} \supset \mathfrak{R}_0,$$

$$(4.5e)\quad \left(\mathfrak{R}_1^{-1} - (\mathfrak{R}_1^{-1} - \mathfrak{R}_0^{-1})\right)^{-1} \supset \mathfrak{R}_0,$$

$$(4.6a)\quad \alpha * (\mathfrak{R}_0^{-1} \pm \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = \left((\alpha * \mathfrak{R}_0)^{-1} \pm (\alpha * \mathfrak{R}_1)^{-1}\right)^{-1},$$

$$(4.6b)\quad \left((\mathfrak{R}_0^{-1} \pm \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1}\right)^* = (\mathfrak{R}_0^{*-1} \pm \mathfrak{R}_1^{*-1})^{-1},$$

$$(4.7a)\quad (\alpha\,\mathfrak{R}_0^{-1} + \beta\,\mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = \left((\alpha^{-1} * \mathfrak{R}_0)^{-1} + (\beta^{-1} * \mathfrak{R}_1)^{-1}\right)^{-1},$$

$$(4.7b)\quad (\alpha\,\mathfrak{R}_0^{-1} + 0\,\mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} = \alpha^{-1} * \mathfrak{R}_0,$$

$$(4.7c)\quad \left(\alpha\,\mathfrak{R}_0^{-1} + (-\beta)\,\mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1} = \left((\alpha^{-1} * \mathfrak{R}_0)^{-1} - (\beta^{-1} * \mathfrak{R}_1)^{-1}\right)^{-1}.$$

[12]) $C\mathfrak{R}$ ist die Komplementärmenge von $\mathfrak{R}$ bezüglich $C_{R_n} T$. Es können keine Mißverständnisse auftreten, wenn wir folgende einfachere Schreibweise benutzen:

$$C\,\mathfrak{R}^{-1} = (C\,\mathfrak{R})^{-1}, \qquad \mathfrak{R}^{*-1} = (\mathfrak{R}^*)^{-1}, \qquad (\mathfrak{R}_0^{-1} \pm \mathfrak{R}_1^{-1}) = ((\mathfrak{R}_0^{-1} \pm \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1})^{-1}$$

usw.

Die Eigenschaften (4.2), (4.4), (4.6) und (4.7) folgen sofort aus den entsprechenden Definitionen.

Beweis von (4.3). Nach (4.1) ist

$$C(\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1}$$
$$= \left\{(\tilde{y}, \tilde{z}^0) \mid \exists \text{ ein } (y_1, z_1^0) \in \mathfrak{R}_1 \text{ mit } \left(\frac{1}{\tilde{y}^{-1} + y_1^{-1}}, \frac{\tilde{y}^{-1}\tilde{z}^0 + y_1^{-1} z_1^0}{\tilde{y}^{-1} + y_1^{-1}}\right) \in C\,\mathfrak{R}_0\right\}$$
$$= \left\{(\tilde{y}, \tilde{z}^0) \mid \exists\, (y_1, z_1^0) \in \mathfrak{R}_1 \text{ und } (\tilde{y}_0, \tilde{z}_0^0) \in C\,\mathfrak{R}_0 \text{ mit } (\tilde{y}, \tilde{z}^0) = \left(\frac{1}{\tilde{y}_0^{-1} - y_1^{-1}}, \frac{\tilde{y}_0^{-1}\tilde{z}_0^0 - y_1^{-1} z_1^0}{\tilde{y}_0^{-1} - y_1^{-1}}\right)\right\}$$
$$= (C\,\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{*-1})^{-1}.$$

Daraus folgt sofort auch (4.3 b).

Beweis von (4.5). Beide Mengen von (4.5 a) sind gleich

$$\left\{\left(\frac{1}{y_0^{-1} + y_1^{-1} + y_2^{-1}}, \frac{y_0^{-1} z_0^0 + y_1^{-1} z_1^0 + y_2^{-1} z_2^0}{y_0^{-1} + y_1^{-1} + y_2^{-1}}\right) \Big| (y_i, z_i^0) \in \mathfrak{R}_i\right\}.$$

Andererseits ist dann

$$\begin{aligned}\left((\mathfrak{R}_0^{-1} - \mathfrak{R}_1^{-1}) - \mathfrak{R}_2^{-1}\right)^{-1} &= C\left((C\,\mathfrak{R}_0^{-1} + \mathfrak{R}_1^{*-1}) + \mathfrak{R}_2^{*-1}\right)^{-1} \\ &= C\left(C\,\mathfrak{R}_0^{-1} + (\mathfrak{R}_1^{*-1} + \mathfrak{R}_2^{*-1})\right)^{-1} \\ &= C\left(C\,\mathfrak{R}_0^{-1} + (\mathfrak{R}_1^{-1} + \mathfrak{R}_2^{-1})^*\right)^{-1} \\ &= \left(\mathfrak{R}_0^{-1} - (\mathfrak{R}_1^{-1} + \mathfrak{R}_2^{-1})\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Der Beweis der Relationen (4.5 c) bis (4.5 e) erfolgt ganz analog dem des Satzes in Nr. 1.

Nunmehr stellen wir den Zusammenhang zwischen Linearscharen in einem Halbbüschel und harmonischen Linearkombinationen in einer seiner Halbhyperebenen her.

Projektionssatz. *In einem eigentlichen Halbbüschel* ($\omega \neq 0$) *mit dem Träger T bestimmt die n-dimensionale Halbhyperebene* $\lambda = 0$ *einen Raum* $C_{R_n} T$, *mit dem sie den n-dimensionalen Halbraum H gemeinsam hat. Dann gilt für die Parallelprojektion pr längs L auf* $C_{R_n} T$

$$(4.8) \qquad pr\,[\mathfrak{R}_{\lambda_0}, \mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} = H \cap \left((1-t)\,(pr\,\mathfrak{R}_{\lambda_0})^{-1} + t\,(pr\,\mathfrak{R}_{\lambda_1})^{-1}\right)^{-1}.$$

Zum *Beweis* brauchen wir nur von der Darstellung (2.6) und (2.7) auszugehen, um wegen $pr\,Y_\lambda = Y_0$ sofort den durch (4.8) vermittelten Zusammenhang zwischen den Definitionen der Linearschar (Nr. 1) und der harmonischen Linearkombination zu erhalten.

In diesem Satz tritt eine gewisse Verschiedenheit der Definitionen der Linearschar und der harmonischen Linearkombination zutage. Diese ist darin begründet, daß der Busemannsche Satz nur in einem Halbbüschel, im allgemeinen aber nicht in einem Büschel gilt. Dagegen erlaubt gerade die harmonische Linearkombination von Mengen, die in den beiden *verschiedenen* Halbräumen von $C_{R_n} T$ liegen, den für den Kalkül wichtigen Zusammenhang

(4.3) zwischen harmonischer Addition und Subtraktion. Dennoch ermöglicht uns der Projektionssatz, bekannte Eigenschaften der Linearscharen in einem Halbbüschel auf harmonische Linearkombinationen zu übertragen.

Satz. *Ist $\mathfrak{R}$ eine konvexe Menge, die ganz in einem Halbraum von $C_{R_n}T$ liegt, und $\alpha+\beta>0$, so gilt*

$$(\alpha\,\mathfrak{R}^{-1}+\beta\,\mathfrak{R}^{-1})^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta}*\mathfrak{R}. \tag{4.9}$$

Besteht dagegen für die Menge $\mathfrak{R}$ nur die Bedingung $0<k<|y|<K$ mit festen Schranken k und K, so ist

$$(\mathfrak{R}^{-1}-\mathfrak{R}^{-1})^{-1}=\emptyset. \tag{4.10}$$

Liegt $\mathfrak{R}$ ganz in einem Halbraum von $C_{R_n}T$, so folgt (4.10) *bereits aus der Bedingung $0<k<|y|$.*

Beweis von (4.9). Nach (4.7) kann man sich auf den Fall

$$\big((1-t)\,\mathfrak{R}^{-1}+t\,\mathfrak{R}^{-1}\big)^{-1}=\mathfrak{R}$$

beschränken. Dem letzten Satz gemäß betrachten wir in einem Halbbüschel über dem fraglichen Halbraum von $C_{R_n}T$ zwei Mengen $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ mit $pr\,\mathfrak{R}_{\lambda_i}=\mathfrak{R}$. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{R}$ ist die lineare Hülle $[\mathfrak{R}_{\lambda_0},\mathfrak{R}_{\lambda_1}]$ ein Zylinder, dessen Erzeugenden in der Projektionsrichtung liegen, und damit für jedes t

$$pr\,[\mathfrak{R}_{\lambda_0},\mathfrak{R}_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}=\mathfrak{R}.$$

Beweis von (4.10). Nach Voraussetzung existiert für die Punkte $(y,z^{\varrho})\in\mathfrak{R}$ mindestens eines der Zahlenpaare

$$0<I\overset{\text{def}}{=}\inf\{y>0\}\leqq S\overset{\text{def}}{=}\sup\{y>0\} \tag{4.11}$$

oder

$$i\overset{\text{def}}{=}\inf\{y<0\}\leqq s\overset{\text{def}}{=}\sup\{y<0\}<0. \tag{4.12}$$

Es sei jetzt $(y_0,z_0^{\varrho})\in C_{R_n}T$ mit $y_0>0$.

Wenn das Zahlenpaar (4.11) existiert, so folgt

$$y_0^{-1}+I^{-1}>I^{-1}>0 \quad \text{also} \quad 0<\frac{1}{y_0^{-1}+I^{-1}}<I.$$

Wählt man demnach einen Punkt $(y,z^{\varrho})\in\mathfrak{R}$, dessen y hinreichend nahe bei I liegt, so ist

$$\left(\frac{1}{y_0^{-1}+y^{-1}},\frac{y_0^{-1}z_0^{\varrho}+y^{-1}z^{\varrho}}{y_0^{-1}+y^{-1}}\right)\notin\mathfrak{R}$$

und damit $(y_0,z_0^{\varrho})\notin(\mathfrak{R}^{-1}-\mathfrak{R}^{-1})^{-1}$.

Wenn es dagegen das Zahlenpaar (4.11) nicht gibt, so existiert wenigstens das Zahlenpaar (4.12), und man erhält $y_0^{-1}+i^{-1}>i^{-1}$. Entweder ist nun $y_0^{-1}+i^{-1}<0$, dann folgt

$$\frac{1}{y_0^{-1}+i^{-1}}<i$$

und man schließt wie eben auf $(y_0,z_0^{\varrho})\notin(\mathfrak{R}^{-1}-\mathfrak{R}^{-1})^{-1}$. Oder es ist $y_0^{-1}+i^{-1}=0$, dann kann man einen Punkt $(y,z^{\varrho})\in\mathfrak{R}$ wählen, dessen y hinreichend nahe bei i liegt mit

$$\left|\frac{1}{y_0^{-1}+y^{-1}}\right|>K.$$

Auch in diesem Fall ist $(y_0, z_0^\varrho) \notin (\mathfrak{R}^{-1} - \mathfrak{R}^{-1})^{-1}$. Schließlich kann noch $y_0^{-1} + i^{-1} > 0$, also

$$\frac{1}{y_0^{-1} + i^{-1}} > 0$$

sein. Dann läßt sich wegen der Nichtexistenz des Zahlenpaares (4.11) ein Punkt $(y, z^\varrho) \in \mathfrak{R}$ angeben, so daß

$$\left(\frac{1}{y_0^{-1} + y^{-1}}, \frac{y_0^{-1} z_0^\varrho + y^{-1} z^\varrho}{y_0^{-1} + y^{-1}}\right) \notin \mathfrak{R}$$

und damit $(y_0, z_0^\varrho) \notin (\mathfrak{R}^{-1} - \mathfrak{R}^{-1})^{-1}$ ist.

Für einen Punkt $(y_0, z_0^\varrho) \in C_{R_n} T$ mit $y_0 < 0$ gilt dasselbe, da man nur die Transformation $Y' = -Y$ vorzunehmen braucht, um zu dem eben untersuchten Fall zurückzukehren.

Nun kommen wir zur Übertragung des Busemannschen Satzes und seines Spiegeltheorems auf harmonische Linearkombinationen.

Satz. *Für eine meßbare Menge $\mathfrak{R} \subset C_{R_n} T$ und $\alpha > 0$ gilt*

$$|\mathfrak{R}^*|_n = |\mathfrak{R}|_n, \qquad |\alpha * \mathfrak{R}|_n = \alpha |\mathfrak{R}|_n. \tag{4.13}$$

Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein konvexer Körper und $\mathfrak{R}_1$ eine kompakte Menge, die beide in derselben Hälfte H von $C_{R_n} T$ liegen und positives n-dimensionales Maß haben. Daraus folgt für harmonische Linearkombinationen mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$|(\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1}|_n^{-1} \leqq \alpha |\mathfrak{R}_0|_n^{-1} + \beta |\mathfrak{R}_1|_n^{-1}, \tag{4.14}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn $\mathfrak{R}_1$ aus $\mathfrak{R}_0$ durch eine Abbildung

$$(y, z^\varrho) \to (V y, z^\varrho + y c^\varrho) \tag{4.15}$$

mit den Konstanten $V > 0$ und c^ϱ hervorgeht. Für die harmonischen Linearkombinationen mit $\beta > -\alpha > 0$, für welche $H \cap (\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1}$ beschränkt ist und positives n-dimensionales Maß besitzt, erhält man

$$|H \cap (\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1}|_n^{-1} \geqq \alpha |\mathfrak{R}_0|_n^{-1} + \beta |\mathfrak{R}_1|_n^{-1}. \tag{4.16}$$

Hierbei gilt dann und nur dann Gleichheit, wenn eine maßgleiche Teilmenge von $\mathfrak{R}_1$ aus $\mathfrak{R}_0$ durch eine Abbildung (4.15) *hervorgeht.*

Beweis. Die zweite der trivialen Gln. (4.13) gestattet uns, den Beweis von (4.14) und (4.16) auf den Spezialfall $\alpha + \beta = 1$ zu beschränken. Nach dem obigen Projektionssatz nehmen wir in einem Halbbüschel über dem Halbraum $H \subset C_{R_n} T$ zwei Mengen $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ mit $pr\, \mathfrak{R}_{\lambda_i} = \mathfrak{R}_i$. Für diese gilt der Busemannsche Satz und sein Spiegeltheorem. Daraus folgen aber durch Projektion die Ungleichungen (4.14) und (4.16), weil $|\mathfrak{R}_i|_n = |pr\, \mathfrak{R}_{\lambda_i}|_n$ ist, und für $\alpha, \beta > 0$ die harmonische Linearkombination $(\alpha \mathfrak{R}_0^{-1} + \beta \mathfrak{R}_1^{-1})^{-1} \subset H$, wenn beide $\mathfrak{R}_i \subset H$ sind. Die Gleichheitsbedingungen erhält man dann vermöge (2.42) und (2.33) aus der des Busemannschen Satzes bzw. seines Spiegeltheorems.

Zum Schluß soll noch kurz das Verhältnis zwischen harmonischen und Minkowskischen Linearkombinationen diskutiert werden.

Satz. *Die Mengen $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$ und der Punkt O mit $\overrightarrow{QO} = \frac{1}{\omega} Y$, $(\omega > 0)$, seien in derselben Hälfte des Raumes $C_{R_n} T$ gelegen. Für den durch Parallelverschiebung von T in den freien Halbraum definierten Grenzprozeß $\omega \to +0$ gilt dann bei punktweiser Konvergenz*

$$\left((1-t)\,\mathfrak{R}_0^{-1} + t\,\mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1} \xrightarrow[\omega \to +0]{} (1-t)\,\mathfrak{R}_0 + t\,\mathfrak{R}_1,$$

während $\alpha * \mathfrak{R}$ für $\alpha \neq 1$ keinen Limes besitzt.

Beweis. Wählt man den festen Punkt O als neuen Ursprung, so gilt für $P \in C_{R_n} T$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{\omega} + y\right) Y + z^\varrho Z_\varrho .$$

Nach der Koordinatentransformation $\eta = -\frac{1}{\omega} + y$ läßt sich dann ein Punkt $P \in \left((1-t)\,\mathfrak{R}_0^{-1} + t\,\mathfrak{R}_1^{-1}\right)^{-1}$ darstellen in der Form

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(1-t)\,\eta_0 + t\,\eta_1 + \eta_0 \eta_1 \omega}{1 + ((1-t)\,\eta_1 + t\,\eta_0)\,\omega}\, Y + \frac{(1-t)\,(1+\eta_1\omega)\,z_0^\varrho + t\,(1+\eta_0\omega)\,z_1^\varrho}{1 + ((1-t)\,\eta_1 + t\,\eta_0)\,\omega}\, Z_\varrho$$

$$\xrightarrow[\omega \to +0]{} \left((1-t)\,\eta_0 + t\,\eta_1\right) Y + \left((1-t)\,z_0^\varrho + t\,z_1^\varrho\right) Z_\varrho .$$

Entsprechend gilt für einen Punkt $P \in \alpha * \mathfrak{R}$

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\alpha - 1}{\omega} + \alpha\eta\right) Y + z^\varrho Z_\varrho .$$

Daraus ist zu erkennen, daß im allgemeinen kein Grenzwert existiert.

Literatur

[1] Bonnesen, T., u. W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934. — [2] Busemann, H.: A theorem on convex bodies of the Brunn-Minkowski type. Proc. Nat. Akad. Sci. **35**, 27—31 (1949). — [3] Busemann, H.: The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). — [4] Dinghas, A., u. E. Schmidt: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss., 1943, Math.-naturw. Kl. **7**, 3—18 (1944). — [5] Hadwiger, H.: Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. Math. Z. **53**, 210—218 (1950). — [6] Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1934. — [7] Lusternik, L.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen. Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS **3**, 55—58 (1935). — [8] Schmidt, Erhard: Der Brunn-Minkowskische Satz und sein Spiegeltheorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie. Math. Ann. **120**, 307—422 (1948). — [9] Schmidt, Erhard: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie I, II. Math. Nachr. **1**, 81—157 (1948); **2**, 171—244 (1949).

Saarbrücken, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 9. Juli 1958)

GREEN, J. A.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 430–445 (1959)

On the indecomposable representations of a finite group

By
J. A. GREEN

1. Introduction

Let $\mathfrak{G}$ be a finite group, and $\mathfrak{k}$ a field of characteristic p. A $\mathfrak{G}$-module over $\mathfrak{k}$, or $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module, is a finite-dimensional vector space M over $\mathfrak{k}$, together with a rule by which the elements of $\mathfrak{G}$ act as linear operators on M, and satisfy the identities $(mx)y = m(xy)$, $m1 = m$, where $m \in M$, $x, y \in \mathfrak{G}$ and 1 is the identity element of $\mathfrak{G}$.

The representation theory of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$ is concerned with the classification of such modules into isomorphism types, for the isomorphism types of $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-modules correspond, in a well known manner, with the equivalence classes of matrix representations of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$. In this paper (§ 3) it is shown how every indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module M determines, up to conjugacy in $\mathfrak{G}$, a p-subgroup $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$ (the *vertex* of M) and an indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{V})$-module S (the *source* of M). These are invariants of M, which will indeed be trivial if p does not divide the order of $\mathfrak{G}$, but in the contrary, "modular" case (and in particular, in the case where $\mathfrak{G}$ is a p-group) they contribute something towards the classification mentioned above.

But it is perhaps more significant, that there is a very direct connection between the vertex of a module and the arithmetic properties of the Brauer character (see e.g. [3] or [4]) of the corresponding matrix representation (§ 5). For example, the dimensions of all modules M with a given vertex $\mathfrak{V}$ are divisible by the index $(\mathfrak{P}:\mathfrak{V})$ of $\mathfrak{V}$ in a containing Sylow p-subgroup $\mathfrak{P}$ of $\mathfrak{G}$. Again (§ 6), if we consider the vertices of the irreducible modules over an algebraically closed field $\mathfrak{k}$ which lie in a given Brauer "block" (see [3], [4] or [2]), then the "defect group" ([2], p. 427) of the block can be characterised as the maximum among these vertices.

2. Induced modules and $\mathfrak{H}$-projective modules

All the modules considered in this section and the next will be over a fixed field $\mathfrak{k}$ of characteristic p. Let M be a $\mathfrak{G}$-module, and let $\mathfrak{H}$ be a subgroup of $\mathfrak{G}$. By the obvious restriction M can be regarded as an $\mathfrak{H}$-module; we denote this $\mathfrak{H}$-module by $M_{\mathfrak{H}}$. If L is any $\mathfrak{H}$-module, then $L^{\mathfrak{G}}$ will denote the induced $\mathfrak{G}$-module of L, i.e. $L^{\mathfrak{G}}$ (often also written $L \otimes_{\mathfrak{H}} \mathfrak{G}$) is the space over $\mathfrak{k}$ generated by symbols $l \otimes x$ $(l \in L, x \in \mathfrak{G})$ which are subject to the relations which make $l \otimes x$ linear in l, and $lh \otimes x = l \otimes hx$, for all $l \in L$, $h \in \mathfrak{H}$

and $x \in \mathfrak{G}$. This space becomes a $\mathfrak{G}$-module if we define, for all $l \in L$ and $x, y \in \mathfrak{G}$

$$(l \otimes x)\, y = l \otimes xy,$$

a definition which is consistent with the relations just mentioned.

It is easy to verify the following facts. If L', L'' are two $\mathfrak{H}$-modules and $L \cong L' \oplus L''$, then

$$L^{\mathfrak{G}} \cong L'^{\mathfrak{G}} \oplus L''^{\mathfrak{G}}. \tag{2.1}$$

If $\mathfrak{K}$ is a subgroup such that $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$, then $L^{\mathfrak{K}}$ is a $\mathfrak{K}$-module, and the following *transitive law* holds

$$(L^{\mathfrak{K}})^{\mathfrak{G}} \cong L^{\mathfrak{G}}. \tag{2.2}$$

Now let

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} x_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{H} x_n, \qquad n = (\mathfrak{G} : \mathfrak{H})$$

be the decomposition of $\mathfrak{G}$ into right $\mathfrak{H}$-cosets. We shall always take $x_1 = 1$. Then

$$L^{\mathfrak{G}} = \sum_{i=1}^{n} L \otimes x_i \quad \text{(direct sum)},$$

where, for any $x \in \mathfrak{G}$, $L \otimes x$ denotes the subspace of all $l \otimes x\, (l \in L)$. Since $\dim L \otimes x = \dim L$, this shows that

$$\dim L^{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{G} : \mathfrak{H}) \dim L. \tag{2.3}$$

It is clear that $L \otimes x$ is an $x^{-1}\mathfrak{H}x$-module, i.e. that it is a submodule of $(L^{\mathfrak{G}})_{x^{-1}\mathfrak{H}x}$. The mapping $l \to l \otimes x\, (l \in L)$, although it is not in general a module isomorphism, does induce an isomorphism between the submodule lattices of L and $L \otimes x$. Thus

(2.4) *$L \otimes x$ is indecomposable if and only if L is indecomposable.*

To describe the operation of a given element x of $\mathfrak{G}$ on the element $m = \sum l_i \otimes x_i\, (l_i \in L)$ of $L^{\mathfrak{G}}$, we find

$$mx = \sum l_i h_i \otimes x_{i'}, \tag{2.5}$$

where $h_i \in \mathfrak{H}$ and $i' \in \{1, 2, \ldots, n\}$ are determined by the equations $x_i x = h_i x_{i'}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Now suppose that Z is any $\mathfrak{G}$-module such that $Z_{\mathfrak{H}}$ contains L as a submodule. Then

$$Z = L x_1 \oplus \cdots \oplus L x_n \quad \textit{implies that } Z \cong L^{\mathfrak{G}}. \tag{2.6}$$

For it follows easily from (2.5) that the mapping $\sum l_i x_i \to \sum l_i \otimes x_i$ is a $(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$-isomorphism of Z onto $L^{\mathfrak{G}}$. Using this result, or by a simple direct calculation, we have

$$(L \otimes x)^{\mathfrak{G}} \cong L^{\mathfrak{G}}, \quad \textit{for any } x \in \mathfrak{G}. \tag{2.7}$$

A $\mathfrak{G}$-module M is said to be a *component* of the $\mathfrak{G}$-module N if M is isomorphic to a direct summand of N. We make now the

DEFINITION. Let $\mathfrak{H}$ be any subgroup of $\mathfrak{G}$. Then a $\mathfrak{G}$-module M is $\mathfrak{H}$-*projective* if there exists an $\mathfrak{H}$-module L, such that M is a component of $L^{\mathfrak{G}}$.

If $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ are any subgroups of G, write $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{K}$ or $\mathfrak{K} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{H}$ if there exists an element x of $\mathfrak{G}$ such that $x^{-1}\mathfrak{H}x \leqq \mathfrak{K}$. If both $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ are conjugate in $\mathfrak{G}$, and we express this by writing $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{K}$. From (2.2) and (2.7) we have at once

(2.8) *If a $\mathfrak{G}$-module M is $\mathfrak{H}$-projective, then M is also $\mathfrak{K}$-projective, for any subgroup $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{G}$ such that $\mathfrak{K} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{H}$.*

It is often useful to notice another elementary fact,

(2.9) *If M is a component of $L^{\mathfrak{G}}$, and if L is $\mathfrak{H}_0$-projective, for some $\mathfrak{H}_0 \leqq \mathfrak{H}$, then M is $\mathfrak{H}_0$-projective.*

For there exists an $\mathfrak{H}_0$-module L_0 such that L is a component of $L_0^{\mathfrak{H}}$. Thus by (2.1) and (2.2) M is a component of $L_0^{\mathfrak{G}}$.

{1}-projective modules. For any group $\mathfrak{H}$, let $\mathfrak{k}_{\mathfrak{H}}$ denote the "trivial" $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-module, that is the field $\mathfrak{k}$ itself, made into an $\mathfrak{H}$-module by the rule $\varkappa x = \varkappa$ $(\varkappa \in \mathfrak{k},\ x \in \mathfrak{H})$. An indecomposable {1}-projective $\mathfrak{G}$-module M must be a component of $(\mathfrak{k}_{\{1\}})^{\mathfrak{G}}$, which is isomorphic to the group algebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$, this being regarded as a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module in the usual way. Thus the matrix representations which correspond to indecomposable {1}-projective $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-modules are exactly the "principal indecomposable representations" of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$ (see BRAUER and NESBITT [4]).

D. G. HIGMAN'S *criteria for $\mathfrak{H}$-projectivity.* Suppose that M is actually a direct summand of $L^{\mathfrak{G}}$, and that ε is an idempotent $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-endomorphism of $L^{\mathfrak{G}}$ such that $L^{\mathfrak{G}}\varepsilon = M$. Let φ denote the mapping $\sum l_i \otimes x_i \to l_1 \otimes 1$ of $L^{\mathfrak{G}}$ onto its $\mathfrak{H}$-submodule $L \otimes 1$. This is a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-endomorphism of $L^{\mathfrak{G}}$, and therefore $\eta = \varepsilon\varphi\varepsilon$ is a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-endomorphism of M. We verify at once that

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\eta\, x_i^{\eta} = \iota_M, \tag{2.10}$$

where ι_M is the identical mapping on M. D. G. HIGMAN has shown [6] that conversely, if a $\mathfrak{G}$-module M has a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-endomorphism η such that (2.10) holds, then M is a component of $(M_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{G}}$ — hence M must be $\mathfrak{H}$-projective. We take then from HIGMAN'S paper two useful criteria ([6], p. 371, Theorem 1 (c), (d)) for $\mathfrak{H}$-projectivity.

THEOREM 1. *Either of the following is necessary and sufficient for a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module M to be $\mathfrak{H}$-projective:*

(1) *M is a component of $(M_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{G}}$, or*

(2) *M has a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-endomorphism η such that (2.10) holds.*

[1]) We make the convention, that if η is any linear mapping of a $\mathfrak{G}$-module M into itself, or into another $\mathfrak{G}$-module, then $x\eta$ and ηx $(x \in \mathfrak{G})$ denote the mappings which take $m \in M$ to $mx\eta$ and $m\eta x$, respectively.

We may deduce from (2) another theorem of HIGMAN:

THEOREM 2. *Let $\mathfrak{P}$ be a fixed Sylow p-subgroup of $\mathfrak{G}$ (p is the characteristic of $\mathfrak{k}$). Then every $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module M is $\mathfrak{P}$-projective.*

For the index $n = (\mathfrak{G}:\mathfrak{P})$ is prime to p, therefore we may take $\eta = n^{-1} t_M$.

Remarks on $\mathfrak{H}$-projectivity. $\mathfrak{H}$-projectivity is a special case of "relative projectivity" defined recently by HOCHSCHILD [8] and D. G. HIGMAN [7]. An $\mathfrak{H}$-projective $\mathfrak{G}$-module M is (R, S)-projective in the terminology of [8], taking $R = \Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$, $S = \Gamma(\mathfrak{H}, \mathfrak{k})$ and regarding M as an R-module in the natural way. In the general theory there is also the dual notion of "relatively injective" modules, as follows. For any S-module L, the set ${}^R L = \hom_S(R, L)$ of all S-homomorphisms $\vartheta: R \to L$ can be made into an R-module, if for any $\vartheta \in {}^R L$ and $r \in R$, we define $\vartheta r \in {}^R L$ by $r'(\vartheta r) = (r r')\vartheta$ $(r' \in R)$. Then an R-module M is called (R, S)-injective if M is a component of ${}^R L$, for some S-module L. However in our case ($R = \Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ and $S = \Gamma(\mathfrak{H}, \mathfrak{k})$) it is easy to see that ${}^R L$ and $L^{\mathfrak{G}}$ are isomorphic (although not in a *natural* way), so that "$\mathfrak{H}$-injective" $\mathfrak{G}$-modules would be just the same as $\mathfrak{H}$-projective ones. Alternative definitions of relative projectivity and injectivity are given in [7] and [8].

3. The vertex and source of an indecomposable module

Let $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$ be any two subgroups of $\mathfrak{G}$, and let S be any $\mathfrak{V}$-module. To each double coset $\mathfrak{V} a \mathfrak{H}$ $(a \in \mathfrak{G})$ there corresponds a submodule Z of $(S^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}}$, namely

$$Z = \sum S \otimes x_i^{2}),$$

where the sum is extended over those $i = 1, 2, \ldots, n$ for which $\mathfrak{V} x_i \subseteq \mathfrak{V} a \mathfrak{H}$. Now these cosets $\mathfrak{V} x_i$ can be written $\mathfrak{V} a t_1, \ldots, \mathfrak{V} a t_m$, say, where $t_1, \ldots, t_m$ is a set of right coset representatives of $\mathfrak{H}^* = a^{-1}\mathfrak{V} a \cap \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$. Thus

$$Z = \sum_{j=1}^{m} S \otimes a t_j = \sum_{j=1}^{m} (S \otimes a) t_j. \tag{3.1}$$

Now $S \otimes a$ is an $a^{-1}\mathfrak{V} a$-module, and $\mathfrak{H}^* \subseteq a^{-1}\mathfrak{V} a$, therefore we can define the $\mathfrak{H}^*$-module $S^* = (S \otimes a)_{\mathfrak{H}^*}$. By (3.1) and (2.6) it follows that Z is isomorphic, *qua* $\mathfrak{H}$-module, to

$$(S^*)^{\mathfrak{H}} = \sum_{j=1}^{m} S^* \otimes t_j.$$

Thus if $\mathfrak{V} a_1 \mathfrak{H}, \ldots, \mathfrak{V} a_r \mathfrak{H}$ are the different double $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H})$-cosets of $\mathfrak{G}$, and if $Z_1, \ldots, Z_r$ are the corresponding submodules of $(S^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}}$, we have the decomposition

$$(S^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}} = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_r,$$

in which, for each $\varrho = 1, 2, \ldots, r$, $Z = S_{\varrho}^{\mathfrak{H}}$, where $S_{\varrho} = (S \otimes a_{\varrho})_{\mathfrak{H}_{\varrho}}$ and $\mathfrak{H}_{\varrho} = a_{\varrho}^{-1}\mathfrak{V} a_{\varrho} \cap \mathfrak{H}$. From this there follows at once, using the Krull-Schmidt theorem,

[2] We now take $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to be a set of right coset representatives of $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{G}$.

THEOREM 3. *Let $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$ be any subgroups of $\mathfrak{G}$, and let S be a $\mathfrak{V}$-module, and M a component of $S^{\mathfrak{G}}$. Suppose that*

$$M_{\mathfrak{H}} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_t, \tag{3.2}$$

where $H_1, \ldots, H_t$ are indecomposable $\mathfrak{H}$-modules. Then for each $\tau = 1, 2, \ldots, t$ there exists an $x_\tau \in \mathfrak{G}$ such that H_τ is $\mathfrak{H}_\tau$-projective, where $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \cap \mathfrak{H}$, and in fact H_τ is a component of $S_\tau^{\mathfrak{H}}$, where $S_\tau = (S \otimes x_\tau)_{\mathfrak{H}_\tau}$.

Let M be any $\mathfrak{G}$-module, and let $\mathfrak{V}(M)$ be the set of all subgroups $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}$ such that M is $\mathfrak{H}$-projective. $\mathfrak{V}(M)$ is not empty, for M is certainly $\mathfrak{G}$-projective. Moreover, by (2.8), $\mathfrak{V}(M)$ contains with any $\mathfrak{H}$, all the subgroups $\mathfrak{K} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{H}$. Because $\mathfrak{V}(M)$ is a finite set it certainly possesses at least one *minimal* member $\mathfrak{V}$, i.e. $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}(M)$ and if $\mathfrak{W} \in \mathfrak{V}(M)$, $\mathfrak{W} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$, then $\mathfrak{W} \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}$. But we shall show in theorem 4 that when M is indecomposable, then this minimal $\mathfrak{V}$ is in fact unique, up to conjugacy in $\mathfrak{G}$. To do this, we need first a lemma.

LEMMA. *Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module and suppose that*

(i) *$\mathfrak{V}$ is any minimal member of $\mathfrak{V}(M)$,*

(ii) *S is any $\mathfrak{V}$-module such that M is a component of $S^{\mathfrak{G}}$, and*

(iii) *$\mathfrak{H}$ is any member of $\mathfrak{V}(M)$.*

Then for at least one of the summands H_τ in (3.2), M is a component of $H_\tau^{\mathfrak{G}}$. Moreover, for any such summand H_τ there exists $x_\tau \in \mathfrak{G}$ such that

$$\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \underset{\mathfrak{H}}{\leqq} \mathfrak{H}, \tag{3.3}$$

and

$$H_\tau \text{ is a component of } (S \otimes x_\tau)^{\mathfrak{H}} \tag{3.4}$$

PROOF. M is a component of $(M_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{G}}$ because M is $\mathfrak{H}$-projective (theorem 1). But M is indecomposable, therefore M must be a component of one of the $H_\tau^{\mathfrak{G}}$. This proves the first statement of the lemma.

Now let H_τ be any summand of (3.2) such that M is a component of $H_\tau^{\mathfrak{G}}$. By theorem 3 there exists an $x_\tau \in \mathfrak{G}$ such that H_τ is $\mathfrak{H}_\tau$-projective, where $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \cap \mathfrak{H}$. Then M is also $\mathfrak{H}_\tau$-projective, by (2.9), and $\mathfrak{H}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$, which contradicts the minimality of $\mathfrak{V}$ unless $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau$, i.e. unless (3.3) holds. To prove (3.4) we simply apply the last statment in theorem 3, observing that in our case, $S_\tau = S \otimes x_\tau$, because $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau$.

THEOREM 4. *If M is an indecomposable $\mathfrak{G}$-module, there exists a subgroup $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$ such that*

(1) *M is $\mathfrak{V}$-projective, and*

(2) *If M is $\mathfrak{H}$-projective, for any subgroup $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}$, then $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{H}$. $\mathfrak{V}$ is defined uniquely, up to conjugacy in $\mathfrak{G}$, by these properties.*

PROOF. Take $\mathfrak{V}$ to be any minimal member of $\mathfrak{V}(M)$. Then (1) holds by definition, and (2) follows from (3.3). If $\mathfrak{V}'$ is another subgroup of $\mathfrak{G}$ having the same properties as $\mathfrak{V}$, then clearly $\mathfrak{V}' \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$ and $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}'$, i.e. $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}'$.

DEFINITION. A group $\mathfrak{V}$ with the properties described in theorem 4 is called a *vertex* of M.

We shall often speak of one particular vertex $\mathfrak{V}$ of M as *the* vertex of M. $\mathfrak{V}(M)$ is the set of all subgroups $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}$ sucn that $\mathfrak{H} \geqq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{V}$. By theorem 2, $\mathfrak{V}(M)$ contains $\mathfrak{P}$, any fixed Sylow p-subgroup of $\mathfrak{G}$, hence $\mathfrak{V} \leqq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$ and so

The vertex of an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over a field of characteristic p is always a p-subgroup of $\mathfrak{G}$.

In particular if $p=0$ or if p is a prime which does not divide the order of $\mathfrak{G}$, then every indecomposable $\mathfrak{G}$-module has vertex $\{1\}$, i.e. every $\mathfrak{G}$-module over such a field is $\{1\}$-projective.

DEFINITION. If M is an indecomposable $\mathfrak{G}$-module, then an indecomposable $\mathfrak{V}$-module S is called a *source* of M if $\mathfrak{V}$ is a vertex of M, and M is a component of $S^{\mathfrak{G}}$.

Evidently if the $\mathfrak{V}$-module S is a source of M, then so is the $x^{-1}\mathfrak{V}x$-module $S \otimes x$, for any x in $\mathfrak{G}$; this means we need only consider the sources on one particular vertex $\mathfrak{V}$. If x is any element of the normaliser $\mathfrak{N}(\mathfrak{V})$ of $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{G}$, then $S \otimes x$ is a $\mathfrak{V}$-module, and is a source of M, which need not be isomorphic to S. But the next theorem shows that apart from this the source is uniquely determined by M.

THEOREM 5. *If $\mathfrak{V}$ is a vertex of the indecomposable $\mathfrak{G}$-module M, and if the two $\mathfrak{V}$-modules S, S' are both sources of M, then $S' \cong S \otimes x$, for some x in $\mathfrak{N}(\mathfrak{V})$.*

PROOF. $\mathfrak{V}$, S satisfy conditions (i), (ii) of the lemma; let us take $\mathfrak{H} = \mathfrak{V}$, which satisfies (iii). Thus there exists an indecomposable summand H_τ of $M_{\mathfrak{V}}$, such that M is a component of $H_\tau^{\mathfrak{G}}$, and for any such H_τ there exists an $x_\tau \in \mathfrak{G}$ such that $x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \subseteq \mathfrak{V}$, which implies $x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau = \mathfrak{V}$, i.e. $x_\tau \in \mathfrak{N}(\mathfrak{V})$; and by (3.4) H_τ is a component of $S \otimes x_\tau$. But S is indecomposable, therefore so is $S \otimes x_\tau$ (by (2.4)), therefore $H_\tau \cong S \otimes x_\tau$. In just same way, replacing S by S', we find an $x'_\tau \in \mathfrak{N}(\mathfrak{V})$ such that $H_\tau \cong S' \otimes x'_\tau$. Thus $S' \cong S \otimes x$, where $x = x_\tau x_\tau'^{-1} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{V})$. This completes the proof of theorem 5.

The next theorem shows how we may obtain information concerning the vertex and source of a given indecomposable $\mathfrak{G}$-module M by examining the components of $M_{\mathfrak{H}}$, where $\mathfrak{H}$ is a suitable subgroup of $\mathfrak{G}$.

THEOREM 6. *Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module with vertex $\mathfrak{V}$, and let $\mathfrak{H}$ be any subgroup of $\mathfrak{G}$ such that M is $\mathfrak{H}$-projective. If $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_t$ are the vertices of the indecomposable $\mathfrak{H}$-modules $H_1, \ldots, H_t$ in (3.2), then*

(1) *$\mathfrak{V}_\tau \leqq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{V}$ for $\tau = 1, 2, \ldots, t$.*

(2) *For some $\tau \in \{1, 2, \ldots, t\}$, M is a component of $H_\tau^{\mathfrak{G}}$, and in this case $\mathfrak{V}_\tau =_{\mathfrak{G}} \mathfrak{V}$.*

(3) *If τ is such that $\mathfrak{V}_\tau =_{\mathfrak{G}} \mathfrak{V}$, then the source of H_τ is also a source of M.*

PROOF. By theorem 3, each H_τ is $\mathfrak{H}_\tau$-projective, where $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \cap \mathfrak{H}$. Therefore $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{H}}{\leqq} \mathfrak{H}_\tau$, and so we have

$$\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{H}}{\leqq} \mathfrak{H}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t, \tag{3.5}$$

which proves (1).

(2) Let S be a $\mathfrak{V}$-module which is a source of M. Then M, $\mathfrak{V}$, S and $\mathfrak{H}$ satisfy the conditions of the lemma. The lemma shows that M is a component of one of the $H_\tau^{\mathfrak{G}}$. For such an H_τ, M is $\mathfrak{V}_\tau$-projective, by (2.9), therefore $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}_\tau$. Combining this with (3.5) we get $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}$.

(3) If, for any τ, we have $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}$, then by (3.5) $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{H}}{=} \mathfrak{H}_\tau$, so that $\mathfrak{H}_\tau$ is a vertex of H_τ. Again from (3.5),

$$\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \cap \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V},$$

which can happen only if $\mathfrak{H}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \subseteq \mathfrak{H}$. In this case the module S_τ of theorem 3 is the same as $S \otimes x_\tau$, and so H_τ is a component of $(S \otimes x_\tau)^{\mathfrak{H}}$. But this is to say that $S \otimes x_\tau$ is a source of H_τ, and of course it is equally a source of M. This completes the proof of theorem 6.

By taking $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$ in theorem 6, which is permissible since every $\mathfrak{G}$-module M is $\mathfrak{P}$-projective by theorem 2, we have the

COROLLARY TO THEOREM 6. *Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over a field $\mathfrak{k}$ of characteristic p, $\mathfrak{V}$ the vertex of M, and $\mathfrak{P}$ a fixed Sylow p-subgroup of $\mathfrak{G}$. Suppose that*

$$M_{\mathfrak{P}} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_t, \tag{3.6}$$

where $P_1, \ldots, P_t$ are indecomposable $\mathfrak{P}$-modules, and that $\mathfrak{V}_\tau$ is the vertex of P_τ, $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Then $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$ for all τ, while at least one $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}$. Moreover if P_τ has vertex $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{V}$, then any source of P_τ is a source of M.

This reduces the problem of finding the vertex and source of indecomposable modules over a general finite group $\mathfrak{G}$ to the corresponding problem for p-groups. If we assume that M has vertex $\mathfrak{V} = \{1\}$, then all the P_τ must have vertex $\{1\}$, i.e. they must be components of $\Gamma(\mathfrak{P}, \mathfrak{k})$, this being regarded as $(\mathfrak{k}, \mathfrak{P})$-module. But it is well known that $\Gamma(\mathfrak{P}, \mathfrak{k})$ is indecomposable, for any p-group $\mathfrak{P}$ and any field $\mathfrak{k}$ of characteristic p (see also theorem 8), so that $P_\tau \cong \Gamma(\mathfrak{P}, \mathfrak{k})$ for $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Thus

A necessary and sufficient condition for M to be $\{1\}$-projective is that $M_{\mathfrak{P}}$ is a direct sum of modules isomorphic to $\Gamma(\mathfrak{P}, \mathfrak{k})$.

This implies the result (cf. DICKSON [5]), that the dimension of any component of $\Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ is divisible by $p^a = (\mathfrak{P}:1)$. See also theorem 9, § 5.

If the $\mathfrak{V}$-module S is a source of the indecomposable $\mathfrak{G}$-module M, then S itself must have vertex $\mathfrak{V}$, and consequently be its own source. For if S is $\mathfrak{V}_0$-projective for any $\mathfrak{V}_0 \subseteq \mathfrak{V}$, then M is also $\mathfrak{V}_0$-projective by (2.9). Thus $\mathfrak{V}_0 \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{V}$, hence $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}$. We might ask the question: given a p-subgroup $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$, and a $\mathfrak{V}$-module S whose vertex is $\mathfrak{V}$, does there exist an indecomposable

$\mathfrak{G}$-module M with vertex $\mathfrak{V}$ and source S? This is answered affirmatively by the following more general assertion.

THEOREM 7. *Let $\mathfrak{H}$ be a subgroup of $\mathfrak{G}$, and L an indecomposable $\mathfrak{H}$-module. Then $L^{\mathfrak{G}}$ has an indecomposable component M such that M and L have a vertex and source in common.*

PROOF. $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}}$ has L as a component, for $L \otimes 1$ is a direct $\mathfrak{H}$-summand of $L^{\mathfrak{G}} = \sum L \otimes x_i$ (see § 2), and $L \cong L \otimes 1$. Therefore $L^{\mathfrak{G}}$ must have an indecomposable component M such that $M_{\mathfrak{H}}$ has L as a component. This means that one of the indecomposable summands H_τ in (3.2) is isomorphic to L. Since M is $\mathfrak{H}$-projective, by definition, we may apply theorem 6, and in particular may take $H_\tau \cong L$ in (2) and (3) of theorem 6. These show that H_τ, and hence L, has a vertex and source in common with M, and this completes the proof.

We shall find in § 5 that for any p-subgroup $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$, the trivial $\mathfrak{V}$-module $\mathfrak{k}_{\mathfrak{V}}$ always has vertex $\mathfrak{V}$. We may therefore deduce from theorem 7 that

Every p-subgroup $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$ is the vertex of some indecomposable $\mathfrak{G}$-module M.

In fact we can take M to be a component of $(\mathfrak{k}_{\mathfrak{V}})^{\mathfrak{G}}$, which is the module which defines the representation of $\mathfrak{G}$ as permutations of the right cosets $\mathfrak{V}x$.

4. Induced modules in p-groups

The invariants which were introduced in the last section, namely the vertex and source of an indecomposable $\mathfrak{G}$-module, are by no means trivial in the case where $\mathfrak{G}$ is a p-group; in fact theorem 6, corollary shows that this case is of great significance for the theory of modules over a general finite group. This section is devoted to the proof of a theorem (theorem 8, below) on induced modules in a p-group, which will be used in §§ 5, 6.

Let $\mathfrak{G}$ be any finite group. If M is a $\mathfrak{G}$-module over $\mathfrak{k}$, let $e_{\mathfrak{G}}(M)$ denote the set of all $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-endomorphisms of M. Then $e_{\mathfrak{G}}(M)$ is an algebra over $\mathfrak{k}$, being in fact a subalgebra of the algebra $l(M)$ of all linear transformations of the vector space M. A necessary and sufficient condition for a non-zero module M to be indecomposable is that $e_{\mathfrak{G}}(M)$ contains no idempotent element other than ι_M and zero, or equivalently that $e_{\mathfrak{G}}(M)$ is *completely primitive*, which means that if $\mathfrak{r}$ is the radical of $e_{\mathfrak{G}}(M)$, then the quotient $d_{\mathfrak{G}}(M) = e_{\mathfrak{G}}(M)/\mathfrak{r}$ is a division algebra.

If $\mathfrak{k}'$ is any field containing $\mathfrak{k}$, let $M_{\mathfrak{k}'}$ denote the $(\mathfrak{k}', \mathfrak{G})$-module obtained by extending the ground field of M to $\mathfrak{k}'$, i.e. $M_{\mathfrak{k}'} = \mathfrak{k}' \otimes_{\mathfrak{k}} M$, made into a $(\mathfrak{k}', \mathfrak{G})$-module by the rule

$$\varkappa_1(\varkappa_2 \otimes m)\, x = \varkappa_1 \varkappa_2 \otimes m\, x \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathfrak{k}',\ m \in M,\ x \in \mathfrak{G}).$$

If L is an $\mathfrak{H}$-module, $\mathfrak{H}$ a subgroup of G, then we may verify that

$$(L_{\mathfrak{k}'})^{\mathfrak{G}} \cong (L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{k}'}. \tag{4.1}$$

DEFINITION. Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over $\mathfrak{k}$. Then M is *absolutely indecomposable* if $M_{\mathfrak{k}'}$ is indecomposable for any extension field $\mathfrak{k}'$ of $\mathfrak{k}$.

A necessary and sufficient condition for M to be absolutely indecomposable is that $e_{\mathfrak{G}}(M)$ should remain completely primitive, or what amounts to the same thing, that $d_{\mathfrak{G}}(M)$ should remain completely primitive, under any extension of the ground field. In particular any indecomposable module over an algebraically closed field $\mathfrak{k}$ is absolutely indecomposable, for in this case $d_{\mathfrak{G}}(M)$ must be $\mathfrak{k}$ itself.

THEOREM 8. *Let $\mathfrak{G}$ be a p-group, and $\mathfrak{k}$ a field of characteristic p. If $\mathfrak{H}$ is any subgroup of $\mathfrak{G}$, and L is any absolutely indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-module, then $L^{\mathfrak{G}}$ is absolutely indecomposable.*

An interesting corollary of this theorem is that *any transitive p-group $\mathfrak{G}$ of permutations is indecomposable, when regarded as a group of linear transformations over a field of characteristic p.* For the module corresponding to this group of linear transformations is $(\mathfrak{k}_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{G}}$, where $\mathfrak{H}$ is the subgroup of elements of $\mathfrak{G}$ which leave one of the permuted symbols fixed.

PROOF OF THEOREM 8. It is enough to prove the theorem for the case where $\mathfrak{k}$ is algebraically closed. For suppose this has been done, and now let $\mathfrak{k}$ be any field of characteristic p, and $\mathfrak{k}'$ any extension of $\mathfrak{k}$. Let $\mathfrak{k}^*$ be the algebraic closure of $\mathfrak{k}'$. Because L is absolutely indecomposable, $L_{\mathfrak{k}^*}$ is an (absolutely) indecomposable $(\mathfrak{k}^*, \mathfrak{H})$-module. Using our assumption that theorem 8 holds for algebraically closed fields, we have then that $(L_{\mathfrak{k}^*})^{\mathfrak{G}}$, hence by (4.1) also $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{k}^*}$, is indecomposable. But $\mathfrak{k}^* \supseteq \mathfrak{k}'$, therefore $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{k}'}$ is indecomposable. Since this holds for any $\mathfrak{k}' \supseteq \mathfrak{k}$, $L^{\mathfrak{G}}$ is absolutely indecomposable. We shall therefore assume from now on that $\mathfrak{k}$ is algebraically closed.

Next we can make a simplifying assumption about $\mathfrak{H}$. If $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, then the theorem is trivial. Let us make an induction on the index $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H})$. If $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, then $\mathfrak{H}$ is contained in some maximal subgroup $\mathfrak{H}^*$ of $\mathfrak{G}$. Write $L^* = L^{\mathfrak{H}^*}$. By the induction hypothesis, L^* is an indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H}^*)$-module (we can drop the word "absolutely" now, because $\mathfrak{k}$ is algebraically closed). Then since $(L^*)^{\mathfrak{G}} = L^{\mathfrak{G}}$, by (2.2), the proof that $L^{\mathfrak{G}}$ is indecomposable requires only the special case $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$, $L = L^*$ of theorem 8. In other words we may suppose, in proving theorem 8, that $\mathfrak{H}$ is a maximal subgroup of $\mathfrak{G}$; and this means that $\mathfrak{H}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$ of index $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H}) = p$.

Let y be any element of $\mathfrak{G}$ which is not in $\mathfrak{H}$. Then $y^p = a$ lies in $\mathfrak{H}$, and $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}y \cup \mathfrak{H}y^2 \cup \cdots \cup \mathfrak{H}y^{p-1}$. The mapping $\pi: h \to yhy^{-1}$, $h \in \mathfrak{H}$, is an automorphism of $\mathfrak{H}$, and

$$a^{\pi} = a, \tag{4.2}$$

$$h^{\pi^p} = aha^{-1}, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4.3}$$

The manner in which the elements of $\mathfrak{G}$ operate on the induced module $L^{\mathfrak{G}} = \sum L \otimes y^i$ is as follows: for any $l \in L$ we have

$$(l \otimes y^i)h = lh^{\pi^i} \otimes y^i, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{4.4}$$

$$(l \otimes y^i)y = l \otimes y^{i+1} (i = 0, 1, \ldots, p-2) \quad \text{and} \quad (l \otimes y^{p-1})y = la \otimes 1. \tag{4.5}$$

Since $\mathfrak{H}$ is normal in $\mathfrak{G}$, the space $L \otimes x$ is an $\mathfrak{H}$-module, for any x in $\mathfrak{G}$. Let $\mathfrak{J}$ be the set of all x in $\mathfrak{G}$ such that $L \otimes x \cong L$. Then $\mathfrak{J}$ is a subgroup

of $\mathfrak{G}$ (the "inertial subgroup" of L in $\mathfrak{G}$, cf. BRAUER [2], p. 434), and $\mathfrak{J} \geqq \mathfrak{H}$. Because $\mathfrak{H}$ is maximal there are just two cases, viz.

(i) $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}$: then no two of the $\mathfrak{H}$-modules $L \otimes y^i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ are isomorphic, or

(ii) $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$: then $L \otimes y^i \cong L$, for $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

We treat these two cases separately.

CASE (i). $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}} = \sum L \otimes y^i$ is a decomposition of $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}}$ into mutually non-isomorphic indecomposable summands $L \otimes y^i$. If $L^{\mathfrak{G}} = M' \oplus M''$, where M', M'' are $\mathfrak{G}$-modules, then $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}} = (M')_{\mathfrak{H}} \oplus (M'')_{\mathfrak{H}}$, and so by the Krull-Schmidt theorem, one of these summands, say $(M')_{\mathfrak{H}}$, must have a component isomorphic to $L \otimes 1$. But $M' = M' y^i$, for $i = 0, 1, \ldots, p-1$, consequently $(M')_{\mathfrak{H}}$ has components isomorphic to $L \otimes y^i$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Because these are non-isomorphic, $(M')_{\mathfrak{H}}$ must have a component $\sum L \otimes y^i$, i.e. $M' = L^{\mathfrak{G}}$. This proves that $L^{\mathfrak{G}}$ is indecomposable, and completes the proof in case (i).

CASE (ii). In this case there must exist an isomorphism from L onto $L \otimes y$, which we shall write $l \to l\psi \otimes y$, so that ψ is a non-singular linear transformation of L which satisfies

$$h\psi = \psi h^{\pi}, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4.6}$$

In particular, putting $h = a$ and using (4.2), we see that $a\psi = \psi a$.

Let $\mathfrak{s}$ denote the radical of $e_{\mathfrak{H}}(L)$. L is indecomposable and $\mathfrak{k}$ is algebraically closed, therefore, as we have seen, $e_{\mathfrak{H}}(L)/\mathfrak{s} \cong \mathfrak{k}$, consequently there exists a homomorphism $\mu : \sigma \to \mu(\sigma)$ of $e_{\mathfrak{H}}(L)$ onto $\mathfrak{k}$, whose kernel in $\mathfrak{s}$. What we must do, is to show that there exists a homomorphism $\lambda : \vartheta \to \lambda(\vartheta)$ of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ onto $\mathfrak{k}$, whose kernel $\mathfrak{r}$ is nilpotent. For then it will follow that $\mathfrak{r}$ is the radical of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ and that $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})/\mathfrak{r} \cong \mathfrak{k}$.

Any linear transformation ϑ of $L^{\mathfrak{G}}$ determines and is determined by a $p \times p$ matrix (ϑ_{ij}), whose coefficients ϑ_{ij} lie in the algebra $l(L)$ of all linear transformations of L, and are given by

$$(l \otimes y^i)\vartheta = \sum_{j=0}^{p-1} l\vartheta_{ij} \otimes y^j, \quad l \in L, \ i = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{4.7}$$

If we regard the set of all matrices with coefficients in $l(L)$ as an algebra over $\mathfrak{k}$, using the usual matrix operations, then the correspondence between ϑ and (ϑ_{ij}) is isomorphic.

The condition for ϑ to belong to the algebra $e_{\mathfrak{H}}(L^{\mathfrak{G}})$, i.e. the algebra of $(\mathfrak{k}, \mathfrak{H})$-endomorphisms of $(L^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{H}}$, is $h\vartheta = \vartheta h$, all $h \in \mathfrak{H}$, which becomes, in terms of the ϑ_{ij},

$$h^{\pi^i}\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}h^{\pi^j}, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{4.8}$$

For ϑ to belong to $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ we require also $\vartheta y = y\vartheta$, which gives

$$\{a\}\vartheta_{i+1,j} = \vartheta_{i,j-1}\{a\}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{4.9}$$

the suffixes $i+1$, $j-1$ being reduced mod p if necessary, and the factor $\{a\}$ is included on the left if and only if $i = p-1$, and on the right if and only if $j = 0$.

Comparing (4.6) and (4.8), we find that the condition for ϑ to belong to $e_{\mathfrak{H}}(L^{\mathfrak{G}})$ may be written as follows:

$$\vartheta_{ij} = \sigma_{ij}\psi^{j-i}, \quad \text{where} \quad \sigma_{ij} \in e_{\mathfrak{H}}(L), \quad i,j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

We put these expressions for ϑ_{ij} into (4.8) and obtain, after some elementary calculations, that the general element ϑ of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ has a matrix (ϑ_{ij}) of the form

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1\psi & \sigma_2\psi^2 & \ldots & \sigma_{p-1}\psi^{p-1} \\ a\sigma_{p-1}\psi^{p-1} & \sigma_0 & \sigma_1\psi & \ldots & \sigma_{p-2}\psi^{p-2} \\ a\sigma_{p-2}\psi^{p-2} & a\sigma_{p-1}\psi^{p-1} & \sigma_0 & \ldots & \sigma_{p-3}\psi^{p-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a\sigma_1\psi & a\sigma_2\psi^2 & a\sigma_3\psi^3 & \ldots & \sigma_0 \end{pmatrix},$$

where $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ are arbitrary elements of $e_{\mathfrak{H}}(L)$. Thus each $\vartheta \in e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ has a unique expression of the form

$$\vartheta = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1 T + \cdots + \bar{\sigma}_{p-1} T^{p-1},$$

where $\bar{\sigma}\,(\sigma \in e_{\mathfrak{H}}(L))$ and T are the elements of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ which have the matrices

$$\begin{pmatrix} \sigma & & & & \\ & \sigma & & & \\ & & \sigma & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & \psi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \psi & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \psi \\ a\psi & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

respectively. It is clear that $\sigma \to \bar{\sigma}$ is an isomorphism of $e_{\mathfrak{H}}(L)$ into $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ that $T^p = \bar{\zeta}$, where $\zeta = \psi^p a$, and that $\bar{\sigma}\,T = T\overline{\sigma^*}$, where $\sigma^* = \psi^{-1}\sigma\psi\,(\sigma \in e_{\mathfrak{H}}(L))$. It follows from these calculations that the mappings ζ and σ^* belong to $e_{\mathfrak{H}}(L)$; this could of course be verified independently.

Now let $\mathfrak{C}$ be the commutative algebra of dimension p over $\mathfrak{k}$, which is obtained by adjoining to $\mathfrak{k}$ an element t which satisfies $t^p = \mu(\zeta)$. Then the mapping

$$\lambda_1 : \sum_{i=0}^{p-1} \bar{\sigma}_i T^i \to \sum_{i=0}^{p-1} \mu(\sigma_i)\, t^i$$

is a homomorphism of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ onto $\mathfrak{C}$ (notice that $\mu(\sigma) = \mu(\sigma^*)$ for all $\sigma \in e_{\mathfrak{H}}(L)$. For write $\sigma = \varkappa \iota_L + \nu$, $\varkappa \in \mathfrak{k}$, $\nu \in \mathfrak{s}$. Then $\mu(\sigma) = \varkappa$. On the other hand $\sigma^* = \psi^{-1}\sigma\psi = \varkappa \iota_L + \nu^*$, say, where $\nu^* \in \mathfrak{s}$. Therefore $\mu(\sigma) = \varkappa = \mu(\sigma^*)$). The kernel of λ_1 is $\sum \mathfrak{s} T^i$, which is easily seen to be nilpotent.

Because $\mathfrak{k}$ is algebraically closed, there exists $z_1 \in \mathfrak{k}$ such that $z_1^p = \mu(\zeta)$. Let λ_2 denote the homomorphism

$$\lambda_2 : \sum \varkappa_i t^i \to \sum \varkappa_i z_1^i \qquad (\varkappa_i \in \mathfrak{k})$$

of $\mathfrak{C}$ onto $\mathfrak{k}$. The kernel of λ_2 is $\mathfrak{C}(t - z_1)$, which is nilpotent because $(t - z_1)^p = t^p - z_1^p = 0$. Therefore $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ is a homomorphism of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ onto $\mathfrak{k}$, whose kernel is nilpotent. This completes the proof of theorem 8.

REMARK. It is possible to give an example where L is indecomposable (but not absolutely), $\mathfrak{k} = GF(p)$ and $L^{\mathfrak{G}}$ is decomposable. We shall not give the details, but the construction exploits the fact that $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ has a structure analogous to the "crossed product" (verschränktes Produkt, see VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra vol. II, ch. 17). By suitable choice of $\mathfrak{H}$, L and $\mathfrak{G}$, we can arrange that there is a homomorphism λ_1 of $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ onto a genuine crossed product algebra $\mathfrak{C}$ which happens to be total matrix algebra, and not completely primitive. This shows that $e_{\mathfrak{G}}(L^{\mathfrak{G}})$ is not completely primitive.

5. The character of a module with given vertex

Let $\mathfrak{k}$ be an algebraically closed field of characteristic p; every indecomposable module over $\mathfrak{k}$ is then absolutely indecomposable.

First let $\mathfrak{G}$ be a p-group, $\mathfrak{H}$ any subgroup of $\mathfrak{G}$, and L an indecomposable $\mathfrak{H}$-module over $\mathfrak{k}$. By theorem 8, $L^{\mathfrak{G}}$ is indecomposable, so that a $\mathfrak{G}$-module M is a component of $L^{\mathfrak{G}}$ only if $M \cong L^{\mathfrak{G}}$. In particular, M is specified up to isomorphism by its vertex $\mathfrak{V}$ and source S, by the equation $M \cong S^{\mathfrak{G}}$. For the dimension of M we have by (2.3)

$$\dim M = (\mathfrak{G} : \mathfrak{V}) \dim S. \tag{5.1}$$

These results do not hold for a general group $\mathfrak{G}$.

Now let $\mathfrak{G}$ be any group, $\mathfrak{P}$ a fixed Sylow p-subgroup of $\mathfrak{G}$, and M an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over $\mathfrak{k}$, with vertex $\mathfrak{V}$. We may assume that $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{P}$. By theorem 6, corollary, if

$$M_{\mathfrak{P}} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_t,$$

where $P_1, \ldots, P_t$ are indecomposable $\mathfrak{P}$-modules, then each P_τ has vertex $\mathfrak{V}_\tau \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$. By (5.1) $\dim P_\tau$ is divisible by $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V}_\tau)$, hence by $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V})$, for $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Since $\dim M = \sum \dim P_\tau$, we have proved

THEOREM 9. *Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over an algebraically closed field $\mathfrak{k}$ of characteristic p, $\mathfrak{V}$ the vertex of M, and $\mathfrak{P}$ a Sylow p-subgroup of $\mathfrak{G}$ which contains $\mathfrak{V}$. Then* $\dim M$ *is divisible by* $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V})$.

COROLLARY 1. *If M has dimension prime to p, then the vertex of M is $\mathfrak{P}$.* In particular the trivial $\mathfrak{G}$-module $\mathfrak{k}_{\mathfrak{G}}$ has vertex $\mathfrak{P}$.

COROLLARY 2. *Theorem 9 still holds, even if $\mathfrak{k}$ is not algebraically closed.* For let $\mathfrak{k}^*$ be the algebraic closure of $\mathfrak{k}$. If $M_{\mathfrak{k}^*} = \sum M_i^*$, where the M_i^* are indecomposable $(\mathfrak{k}^*, \mathfrak{G})$-modules, then all the M_i^* are certainly $\mathfrak{V}$-projective, where $\mathfrak{V}$ is the vertex of M. Therefore if $\mathfrak{V}_i$ is the vertex of M_i^*, we have $\mathfrak{V}_i \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{V}$, and on the other hand $\dim M_i^*$ is divisible by $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V}_i)$ by theorem 9. Thus for each i, $\dim M_i^*$ is divisible by $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V})$, and this shows that $\dim M = \dim M_{\mathfrak{k}^*}$ is divisible by $(\mathfrak{P} : \mathfrak{V})$.

For the rest of this paper, $\mathfrak{k}$ will be an algebraically closed field of characteristic p. Let M be an indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-module, and $\mathfrak{V}$ a vertex of M. Let $\mathfrak{Q}$ be any p-subgroup of $\mathfrak{G}$. By theorem 3, if

$$M_{\mathfrak{Q}} = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_t, \tag{5.2}$$

where $Q_1, \ldots, Q_t$ are indecomposable $\mathfrak{Q}$-modules, then for each $\tau = 1, 2, \ldots, t$ there is an $x_\tau \in \mathfrak{G}$ such that Q_τ is $\mathfrak{Q}_\tau$-projective, where $\mathfrak{Q}_\tau = x_\tau^{-1}\mathfrak{V}x_\tau \cap \mathfrak{Q}$. Thus $\mathfrak{Q}_\tau \underset{\mathfrak{Q}}{\geqq} \mathfrak{V}_\tau$, where $\mathfrak{V}_\tau$ is the vertex of Q_τ. Since $\dim Q_\tau$ is divisible by $(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V}_\tau)$ by theorem 9, we have

(5.3) $\dim Q_\tau$ *is divisible by* $(\mathfrak{Q}:\mathfrak{Q}_\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, t$.

DEFINITION. For any two p-subgroups $\mathfrak{Q}, \mathfrak{V}$ of $\mathfrak{G}$, denote by $s_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V})$ or $s(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V})$ the largest integer s such that p^s divides $(\mathfrak{Q}:x^{-1}\mathfrak{V}x \cap \mathfrak{Q})$ for all $x \in \mathfrak{G}$.

Notice that $s(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V}) = 0$ if and only if $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{Q}$.

From (5.3) we have now

(5.4) $\dim Q_\tau$ *is divisible by* $p^{s(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V})}$, $\tau = 1, 2, \ldots, t$.

For any $x \in \mathfrak{G}$, let $\varrho(x)$ denote the mapping $m \to mx (m \in M)$. The linear closure of the set of all $\varrho(x)$, $x \in \mathfrak{Q}$, is a subalgebra B of the algebra $l(M)$ of all linear transformations of M, and (5.2) is a decomposition of M into indecomposable B-submodules of M. Let $A = e_{\mathfrak{Q}}(M)$, i.e. A is the set of all elements of $l(M)$ which commute with every element of B. If

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_n = (0) \tag{5.5}$$

is a composition series of A-submodules of M, then according to a theorem of BRAUER ([1], Theorem II[3]), there is a $1-1$ correspondence between the different types of irreducible A-modules which appear as composition factors in (5.5), and the different types of indecomposable B-modules which appear as summands in (5.2), and moreover the multiplicity with which a given irreducible A-module appears in (5.5) is exactly the dimension of a corresponding indecomposable B-summand in (5.2). Therefore by (5.4) it follows that

(5.6) *Each irreducible* A*-module appears in* (5.5) *with a multiplicity which is divisible by* $p^{s(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V})}$.

Now let x be any element of $\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$, the centraliser of $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{G}$. Since $\varrho(x) \in A$, the subspaces M_i are all x-spaces, i.e. $M_i x = M_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Let $\varrho_i(x)$ be the linear transformation $m \to mx (m \in M_{i-1}/M_i)$. The characteristic polynomial $\psi(x, t) = \det(t\iota_M - \varrho(x))$ of $\varrho(x)$ is the product of the characteristic polynomials $\psi_i(x, t)$ of the $\varrho_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, moreover $\psi_i = \psi_j$ whenever the A-modules M_{i-1}/M_i and M_{j-1}/M_j are isomorphic. Thus by (5.6),

(5.7) *If* ξ *is any latent root of* $\varrho(x)$, *then* ξ *occurs in* $\psi(x, t)$ *with a multiplicity which is divisible by* $p^{s(\mathfrak{Q}:\mathfrak{V})}$.

The Brauer character [3], [4] of the representation $\varrho: x \to \varrho(x)$ is a complex-valued function φ defined as follows. For a given p-regular element x

[3]) The statement of BRAUER'S theorem includes the hypothesis that *each* of A and B is the set of all elements which commute with every element of the other. However the conclusion is still true if it is assumed only that A is the set of all elements which commute with every element of B, for in fact BRAUER'S own proof uses only this part of his hypothesis.

of $\mathfrak{G}$ (i.e. an element x of order prime to p), the latent roots $\xi_1(x), \ldots, \xi_r(x)$ of $\varrho(x)$ are g_0 th roots of unity ($g_0 = (\mathfrak{G}:\mathfrak{P})$, $r = \dim M$). Let $\xi \to \xi^*$ be any fixed multiplicative isomorphism from the group of g_0 th roots of unity in $\mathfrak{k}$ onto the group of g_0-th roots of unity in the complex field. We put

$$\varphi(x) = \xi_1(x)^* + \cdots + \xi_r(x)^*, \qquad x \in \mathfrak{G},\ x\ p\text{-regular}.$$

Thus $\varphi(x)$ is defined on the p-regular elements of $\mathfrak{G}$, and its values are integers in the field obtained by adjoining the g_0 th roots of unity to the rational field.

Let x be a given p-regular element of $\mathfrak{G}$. Take $\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}$, any Sylow p-subgroup of the normaliser $\mathfrak{N}(x)$ of x in $\mathfrak{G}$. By (5.6), each latent root occurs among $\xi_1(x), \ldots, \xi_r(x)$ with a multiplicity which is divisible by $p^{s(\mathfrak{D}:\mathfrak{B})}$. This proves

THEOREM 10. *Let M be an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over an algebraically closed field of characteristic p, $\mathfrak{B}$ the vertex of M, and φ the Brauer character of the representation of $\mathfrak{G}$ which is defined by M. If x is any p-regular element of $\mathfrak{G}$, then*

$$\varphi(x) \text{ is divisible by } p^{s(\mathfrak{D}:\mathfrak{B})},$$

where $\mathfrak{D}$ is a Sylow p-subgroup of the normaliser $\mathfrak{N}(x)$ of x in $\mathfrak{G}$.

If $x = 1$, we can take $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$. Since $\varphi(1) = r = \dim M$, we recover theorem 9.

Theorem 10 also has the following

COROLLARY. *If x is a p-regular element such that $\varphi(x)$ is prime to p, then $\mathfrak{B} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{D}$.*

For by theorem 10, $\varphi(x)$ can be prime to p only if $s(\mathfrak{D}:\mathfrak{B}) = 0$, which implies that $\mathfrak{B} \underset{\mathfrak{G}}{\geqq} \mathfrak{D}$.

6. Blocks

Let $\mathfrak{z} = Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ be the centre of the group algebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$. $\mathfrak{z}$ has a basis consisting of the class sums

$$K_\alpha = \sum_{x \in \mathfrak{K}_\alpha} x, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, k,$$

where $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k$ are the conjugacy classes of G. A homomorphism ψ of $\mathfrak{z}$ onto $\mathfrak{k}$ (both being regarded as algebras over $\mathfrak{k}$) is called a *character* of $\mathfrak{z}$.

If M is an indecomposable $\mathfrak{G}$-module over $\mathfrak{k}$, then M can be regarded as a $\Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$-module. Let $\varrho(a)$ denote the linear mapping $m \to ma$ ($m \in M$), for any $a \in \Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$. Then for any $z \in \mathfrak{z}$ the mapping $\varrho(z)$ is an endomorphism of M, hence by FITTING's lemma all the latent roots of $\varrho(z)$ are equal, say to $\psi(z)$. The mapping $\psi: z \to \psi(z)$ is a character of $\mathfrak{z}$, which we call the character associated with M. Following R. BRAUER [2], [3], [4] we make the

DEFINITION. The totality of indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-modules which are associated with a given character ψ of $\mathfrak{z} = Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{k})$ is called the *block* $\mathfrak{B}_\psi$ of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{k}$.

Thus the indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-modules are partitioned into as many blocks as there are characters of $\mathfrak{z}$; this number is of course finite, being equal to the dimension of the quotient of $\mathfrak{z}$ by its radical.

REMARK. In BRAUER'S usage, the only indecomposable $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-modules which come into the blocks are (i) the irreducible modules and (ii) the principal indecomposable modules (i. e. those with vertex $\{1\}$). For our purposes, however, it is convenient to extend the idea of a block so that all indecomposable modules come in. BRAUER also divides into blocks the irreducible $\mathfrak{G}$-modules over the complex field, but these play no rôle in the present discussion.

From each conjugacy class $\mathfrak{K}_\alpha$ choose a representative u_α, and a Sylow p-subgroup $\mathfrak{D}_\alpha$ of the normaliser $\mathfrak{N}(u_\alpha)$ of u_α in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{D}_\alpha$ is called the (p-)*defect group* of $\mathfrak{K}_\alpha$: it is determined up to conjugacy in $\mathfrak{G}$. We have now

THEOREM 11. *Let ψ be a character of $\mathfrak{z}$, and $\mathfrak{K}_\alpha$ a class of $\mathfrak{G}$ such that $\psi(K_\alpha) \neq 0$. Then every module M in the block $\mathfrak{B}_\psi$ is $\mathfrak{D}_\alpha$-projective.*

This is a generalisation of D. G. HIGMAN'S theorem 2, which we get by putting $\mathfrak{K}_\alpha$ equal to the class $\{1\}$, for which we can take $\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{P}$, and for which $\psi(K_\alpha) \neq 0$ for every ψ.

PROOF OF THEOREM 11. By D. G. HIGMAN'S theorem 1, it is enough to show that any indecomposable $\mathfrak{G}$-module M in $\mathfrak{B}_\psi$ possesses a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{D}_\alpha)$-endomorphism η such that

$$\sum x_i^{-1} \eta\, x_i = \iota_M,$$

where $x_1, \ldots, x_n$ is any set of right coset representatives of $\mathfrak{D}_\alpha$ in $\mathfrak{G}$. As before let $\varrho(a)\,(a \in \Gamma(\mathfrak{G}, \mathfrak{k}))$ denote the mapping $m \to ma\,(m \in M)$. Then $\varrho(u_\alpha)$ is a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{D}_\alpha)$-endomorphism, because $\mathfrak{D}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}(u_\alpha)$. Let $c_1, \ldots, c_r$ and $y_1, \ldots, y_s$ be sets of right coset representatives, respectively of $\mathfrak{D}_\alpha$ in $\mathfrak{N}(u_\alpha)$ and of $\mathfrak{N}(u_\alpha)$ in $\mathfrak{G}$. We may take the rs products $c_\varrho y_\sigma$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$ as the x_i. Now

$$r = (\mathfrak{N}(u_\alpha) : \mathfrak{D}_\alpha) \quad \text{is prime to } p, \text{ and}$$

$$y_1^{-1} u_\alpha y_1, \ldots, y_s^{-1} u_\alpha y_s \text{ are the } s \text{ distinct element of } \mathfrak{K}_\alpha.$$

Therefore we have

$$\sum x_i^{-1} \varrho(u_\alpha)\, x_i = r\, \varrho(K_\alpha), \qquad (r, p) = 1. \tag{6.1}$$

Since M belongs to $\mathfrak{B}_\psi$, all the latent roots of $\varrho(K_\alpha)$ are equal to $\psi(K_\alpha) = \omega$, say. Thus $\nu = \iota_M - \omega^{-1} \varrho(K_\alpha)$ is a nilpotent $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-endomorphism of M. If say $\nu^f = 0$, then

$$\omega^{-1} \varrho(K_\alpha)\,(\iota_M + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{f-1}) = \iota_M.$$

Thus multiplying (6.1) by $\beta = r^{-1}\omega^{-1}(\iota_M + \nu + \cdots + \nu^{f-1})$, which commutes with all the x_i, because it is a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{G})$-endomorphism, we get

$$\sum x_i^{-1} \eta\, x_i = \iota_M,$$

where $\eta = \varrho(u_\alpha)\beta$, which is a $(\mathfrak{k}, \mathfrak{D}_\alpha)$-endomorphism. This completes the proof.

Let $p^a = (\mathfrak{P}:1)$. BRAUER [2], [4] has defined the *defect* of the block $\mathfrak{B}_\varphi$ to be the smallest integer d such that p^{a-d} divides the dimensions of all the irreducible M in $\mathfrak{B}_\varphi$. Thus there exists in $\mathfrak{B}_\varphi$ an irreducible module M_0 such that

(6.2) $\qquad p^{a-d}$ *is the exact power of* p *dividing* $\dim M_0$.

In [2], § 8, BRAUER has shown that, if $\mathfrak{B}_\varphi$ is any block, there is a class $\mathfrak{K}_\alpha$ of p-regular elements of $\mathfrak{G}$ such that

(6.3) $\qquad \psi(K_\alpha) \neq 0 \quad$ and $\quad p^d = (\mathfrak{D}_\alpha : 1)$.

The p-group $\mathfrak{D}_\alpha$ is determined, up to conjugacy in $\mathfrak{G}$, by these conditions, and BRAUER has called $\mathfrak{D}_\alpha$ the *defect group* of $\mathfrak{B}_\varphi$. Our last theorem gives the connection between the vertices of modules and the defect groups of blocks.

THEOREM 12. *The defect group* $\mathfrak{D}_\alpha$ *of a block* $\mathfrak{B}_\varphi$ *can be characterised as follows: if* M *is any member of* $\mathfrak{B}_\varphi$, *and* $\mathfrak{V}$ *the vertex of* M, *then* $\mathfrak{V} \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{D}_\alpha$, *moreover there is an (irreducible) member* M_0 *of* $\mathfrak{B}_\varphi$ *whose vertex is* $\mathfrak{D}_\alpha$.

PROOF. The first statement follows from (6.3) and theorem 11. To prove the second, take M_0 to be an irreducible module in $\mathfrak{B}$ which has property (6.2), and let $\mathfrak{V}_0$ be the vertex of M_0. We have just seen that $\mathfrak{V}_0 \underset{\mathfrak{G}}{\leqq} \mathfrak{D}_\alpha$, while by theorem 9, $(\mathfrak{P}:\mathfrak{V}_0)$ divides $\dim M_0$. Since $(\mathfrak{D}_\alpha:1) = p^d$, this means that $\mathfrak{V}_0 \underset{\mathfrak{G}}{=} \mathfrak{D}_\alpha$.

From theorem 12 and theorem 10 together we have the

COROLLARY. *Let* x *be a* p*-regular element of* $\mathfrak{G}$, *and* $\mathfrak{D}$ *a Sylow* p*-subgroup of* $\mathfrak{N}(x)$, *and let* φ *be the character of a representation in a block* $\mathfrak{B}$ *of defect group* $\mathfrak{D}'$. *Then* $\varphi(x)$ *is divisible by* $p^{s(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}')}$. (Cf. [2], theorem 5C.)

References

[1] BRAUER, R.: Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 195, Paris, 1935. — [2] BRAUER, R.: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. Math. Z. **63**, 406–444 (1956). — [3] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular representations of groups of finite order I. University of Toronto Studies No. 4, 1937. — [4] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular characters of groups. Annals of Math. **42**, 556–590 (1941). — [5] DICKSON, L. E.: Modular theory of group-matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 389–398 (1907). — [6] HIGMAN, D. G.: Modules with a group of operators. Duke Math. J. **21**, 369–376 (1954). — [7] HIGMAN, D. G.: Relative cohomology. Canadian J. Math. **9**, 19–34 (1957). — [8] HOCHSCHILD, G.: Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 246–269 (1956).

Dept. of Math., The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 12. Juli 1958)

KRABBE, G. L.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 446–462 (1959)

Convolution operators that satisfy the spectral theorem *)

By

G. L. KRABBE

1. Introduction. Let $[\mathfrak{X}]$ be the Banach algebra of all bounded operators on a Banach space $\mathfrak{X}$. The word "pass" will be used to describe a multiplicative and additive function defined on the rectangles[1]) of the plane, whose values belong to $[\mathfrak{X}]$. Suppose that $T \in [\mathfrak{X}]$; if $\mathfrak{X}$ is a Hilbert space and if T is a normal operator, then there exists a pass E_Δ^T such that the spectral theorem holds:

$$T = \int \lambda \cdot E_\Delta^T(d\lambda), \tag{1}$$

moreover;

(2) the residual spectrum of T is void, and E_Δ^T is a weakly continuous[2]) function of rectangles,

(3) the set $\varkappa(E_\Delta^T)$ of all complex λ such that $E_\Delta^T(\{\lambda\}) \neq \boldsymbol{O}$ coincides with the point-spectrum of T.

Suppose henceforth that $\mathfrak{X}$ is not a Hilbert space. What can then be said about the properties (1)–(3) when $T \in [\mathfrak{X}]$?

The theories of DUNFORD [2] and LORCH [12] are too restrictive to be applicable to the algebra $\mathfrak{L}$ of "Laurent operators" [5]; $\mathfrak{L} < [l_p]$ (we suppose $1 < p < \infty$ and $p \neq 2$). For example, consider the following two members of $\mathfrak{L}$: the transformation H which is represented by the Hilbert matrix

$$\left(\frac{1}{n-m}\right)_{(n,m)\in G\times G}, \qquad G = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

and the translation operator τ which maps $x = \{x_n\}_{n\in G}$ into $\tau x = \{x_{n+1}\}_{n\in G}$ whenever $x \in l_p$. Although neither operator is of "scalar type" (DUNFORD's terminology [2]), they both have the properties (1)–(3).

Part I of this paper gives sufficient conditions under which the following three circumstances occur:

(a) T belongs to the class $\mathfrak{C}_0$ of all members T of $[\mathfrak{X}]$ which have a pass E_Δ^T such that $\varkappa(E_\Delta^T)$ is included in the point-spectrum of T,

(b) T belongs to the class $\mathfrak{C}_s$ of all operators T in $\mathfrak{C}_0$ such that the relation (1) holds in the weak topology,

(c) T belongs to the class $\mathfrak{C}_u$ of all operators T in $\mathfrak{C}_0$ that have the properties (2) and (3).

*) This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under contract No. AF18(603)-44.

[1]) In the terminology of [14, p. 285]; see also 3.5.

[2]) In other words, E_Δ^T is weakly countably intersective. See [14, p. 285] and § 7.

The classes $\mathfrak{C}_0$ and $\mathfrak{C}_s$ serve to replace DUNFORD's two classes of spectral and scalar type operators, respectively [2]. Part II deals with the algebra $\mathfrak{L}$ of Laurent operators and an algebra $\mathscr{F}$ of functions; $\mathfrak{L}$ is the image $\phi(\mathscr{F})$ of $\mathscr{F}$ under an isomorphism $F \to \phi F$. The algebra $\mathscr{F}$ contains four families $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_u$ and $\mathscr{D}$ such that

$$\phi(\mathscr{D}) < \mathfrak{C}_s \cap \mathfrak{C}_u, \quad \text{while} \quad \phi(\mathscr{F}_x) < \mathfrak{C}_x \quad \text{for } x = 0, s, u.$$

Both operators H and τ described above belong to $\phi(\mathscr{D})$. It follows that the equality

$$H = \int_0^1 \lambda \cdot dE^H(\lambda)$$

holds in the weak topology, although the function E^H does not satisfy the requirements of LORCH's integration theory [12]; in fact, E^H is not even of bounded variation (§ 9). Moreover, to any T in $\mathfrak{L}$ corresponds a function f in $\mathscr{F}$ such that

$$T = \int_0^1 f(\lambda) \cdot dE^H(\lambda).$$

The smallest family $\mathscr{D}$ contains all functions whose real and imaginary parts assume only finitely many extrema on the interval $[0, 1]$; in particular, $\mathscr{D}$ contains all the functions that are analytic on $[0, 1]$ (see § 8).

APPLICATION. It is shown in § 7 that one of TOEPLITZ's Hilbert space results is valid for any T in $\phi(\mathscr{F}_u)$. This gives a partial answer to a question raised by P. HARTMAN [5].

Part I

2. Generalities. Let $\mathfrak{X}$ be a Banach space with dual $\mathfrak{X}'$, and denote by $[\mathfrak{X}]$ the Banach algebra of all bounded linear mappings of $\mathfrak{X}$ into itself. If $T \in [\mathfrak{X}]$, then $\sigma(T)$ and $\|T\|_{\mathfrak{X}}$ will denote, respectively, the spectrum and the norm of T. Let X be a compact subinterval of $(-\infty, \infty)$. All functions are complex valued. The letters $\alpha, \beta, \lambda, \zeta$ will stand for complex numbers.

2.1. NOTATION. A mapping $z \to y$ whose domain is a set Z, will be written $\{z \in Z \to y\}$. If $k = 0, 1, 2, \ldots$, then $I^k = \{\vartheta \in X \to \vartheta^k\}$; thus $I^0 = \{\vartheta \in X \to 1\}$ and $I^1 = \{\vartheta \in X \to \vartheta\}$. Let $(\mathscr{B}, \cdot, I^0)$ be the algebra of all bounded functions defined on X; the product being defined by $F_1 \cdot F_2 = \{\vartheta \in X \to F_1(\vartheta)\, F_2(\vartheta)\}$ whenever $F_k \in \mathscr{B}$. If $\mathscr{F}$ is a subalgebra of $\mathscr{B}$, then $\mathscr{F}_n$ will denote the corresponding algebra of equivalence classes; by means of the customary identifications, $\mathscr{F}_n$ can be described as consisting of all the functions that are equal a.e. (almost everywhere) on X to some member of $\mathscr{F}$.

2.2. HYPOTHESES. All of Part I will be based on the following hypotheses. $\mathscr{F}$ is a subalgebra of $\mathscr{B}$ such that any two members of $\mathscr{F}$ are equal whenever they are equal a.e. on X; an isomorphism $\{F \in \mathscr{F}_n \to \phi F\}$ maps $\mathscr{F}_n$ onto a subalgebra $\phi(\mathscr{F})$ of $[\mathfrak{X}]$. Furthermore, the following three conditions are assumed:

(i) the algebra $\mathscr{F}$ contains I^0, and pI^0 is the identity operator $\boldsymbol{I}$,

(ii) to each T in $p(\mathscr{F})$ corresponds a member F of $\mathscr{F}$ such that: $T=pF$ and $\sigma(T)$ is the closure of the range of F,

(iii) if $\{G_\iota:\iota\}$ is a not in $\mathscr{F}_n$ that converges a. e. on X to a function F in $\mathscr{F}_n$, then the corresponding net $\{pG_\iota:\iota\}$ will converge weakly[3] to pF whenever it is a bounded net in $[\mathfrak{X}]$.

2.3. NOTATION. When $T\in p(\mathscr{F})$, let $p^{-1}(T)$ denote the function F described in (ii). If g is a function, then $(g\circ F)=\{\vartheta\in X\to g(F(\vartheta))\}$; the statement $(g\circ F)\in\mathscr{F}_n$ will carry the assumption that g is defined on the range of F. If $(g\circ p^{-1}(T))\in\mathscr{F}_n$, then $g(T)$ will denote the operator $p(g\circ p^{-1}(T))$.

2.4. REMARK. If g_1 and g_2 are two functions such that $(g_k\circ p^{-1}(T))\in\mathscr{F}_n$ when $k=1$ and $k=2$, then $(g_1\cdot g_2)(T)=g_1(T)\,g_2(T)$.

2.5. If $g=\alpha_0 I^0+\sum\alpha_k I^k$ is a polynomial, then $g(T)=\alpha_0\boldsymbol{I}+\sum\alpha_k T^k$.

3. Passable operators. If we write $\lambda_1=\mathrm{Rl}\,\lambda$ and $\lambda_2=\mathrm{Im}\,\lambda$, then $(\alpha,\beta]$ will denote the set $(\alpha_1,\beta_1]\times(\alpha_2,\beta_2]=\{\lambda:\alpha_k<\lambda_k\leqq\beta_k \text{ for } k=1 \text{ and } k=2\}$. Whereas RIESZ-NAGY [*14*, pp. 284–285] employ only the class $\mathscr{S}'$ of all such "rectangles", we shall need the class $\mathscr{S}''$ of all "singletons" $\{\lambda\}$.

3.1. DEFINITIONS. $\mathscr{S}_0=\mathscr{S}'\cup\mathscr{S}''$. If $F\in\mathscr{F}$ and $\mathfrak{a}\in\mathscr{S}_0$, then $F_\Diamond(\mathfrak{a})$ is the function φ defined on X by $\varphi(\vartheta)=1$ when $F(\vartheta)\in\mathfrak{a}$, while $\varphi(\vartheta)=0$ whenever $F(\vartheta)\notin\mathfrak{a}$.

3.2. Let $\mathscr{F}_0$ be the set of all F in $\mathscr{F}$ such that $F_\Diamond(\mathfrak{a})\in\mathscr{F}_n$ whenever $\mathfrak{a}\in\mathscr{S}_0$. If $T=pF$ and $F\in\mathscr{F}_0$, then we write

$$E_\Delta^T=\{\mathfrak{a}\in\mathscr{S}_0\to p(F_\Diamond(\mathfrak{a}))\}.$$

3.3. REMARKS. If $\mathfrak{a}\in\mathscr{S}_0$, then $I^1_\Diamond(\mathfrak{a})$ is the characteristic function of $\mathfrak{a}$, and $F\in\mathscr{F}_0$ implies that

$$F_\Diamond(\mathfrak{a})=I^1_\Diamond(F^{-1}(\mathfrak{a}))=(I^1_\Diamond(\mathfrak{a})\circ F)\in\mathscr{F}_n. \tag{4}$$

Accordingly, if $T\in p(\mathscr{F}_0)=\{pF:F\in\mathscr{F}_0\}$, then (by 2.3)

$$E_\Delta^T(\mathfrak{a})=I^1_\Diamond(\mathfrak{a})(T). \tag{5}$$

3.4. It is easily seen that E_Δ^T is a mapping of $\mathscr{S}_0$ into the set of idempotent members of $[\mathfrak{X}]$. To invite comparison with DUNFORD's "spectral measures" [*2*, p. 324], some further properties will now be explicitely formulated; when $E=E_\Delta^T$ and $\mathfrak{a}_k\in\mathscr{S}_0$, then

$$E(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)=E(\mathfrak{a}_1)\,E(\mathfrak{a}_2),\qquad E(\Phi)=\boldsymbol{O},$$
$$E(\mathfrak{a}_1\cup\mathfrak{a}_2)=E(\mathfrak{a}_1)+E(\mathfrak{a}_2)-E(\mathfrak{a}_1)\,E(\mathfrak{a}_2).$$

If $\sigma(T)\subset\mathfrak{a}_1$ and $\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}_1$, then

$$E(\mathfrak{a}_1)=\boldsymbol{I}\quad\text{and}\quad E(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2)=\boldsymbol{I}-E(\mathfrak{a}_2).$$

[3] [*6*, p. 34]. See also 4.4.

3.5. DEFINITIONS. Any mapping E of $\mathscr{S}_0$ into $[\mathfrak{X}]$ that has the properties listed in 3.4, will be called a "pass". The set of all λ such that $E(\{\lambda\}) \neq \boldsymbol{O}$ is denoted $\varkappa(E)$. An operator T is "passable" if there exists a pass E such that $\varkappa(E)$ is included in the point-spectrum $P\sigma(T)$.

3.6. THEOREM. If $T \in \mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$, then $\varkappa(E_\Delta^T) \subset P\sigma(T)$.

Proof. Set $g_1 = \lambda I^0 - I^1$ and $g_2 = I^1_{\mathfrak{A}}(\{\lambda\})$. From (5) follows that $Q = E_\Delta^T(\{\lambda\}) = g_2(T)$, while $\lambda \boldsymbol{I} - T = g_1(T)$ (see 2.3 and 2.5). But $g_1 \cdot g_2 = \boldsymbol{O}$, and by 2.4 therefore $\boldsymbol{O} = (\lambda \boldsymbol{I} - T)Q$. If $\lambda \in \varkappa(E_\Delta^T)$, then $z = Qx \neq \boldsymbol{O}$ for some x in $\mathfrak{X}$, and $\lambda z = Tz$. This concludes the proof.

4. Scaled operators. As in § 3, suppose $(\alpha, \beta] \in \mathscr{S}'$. A "marked partition" of $(\alpha, \beta]$ is a pair (τ, R) of finite sets $\tau = \{\tau_\nu^1 + i\tau_\mu^2 : \nu, \mu\}$ and $R = \{R_\nu^1 \times R_\mu^2 : \nu, \mu\}$ such that $\tau_\nu^1 \in R_\nu^1$ and $\tau_\mu^2 \in R_\mu^2$, while R is a disjoint cover of $(\alpha, \beta]$ and $R_\nu^1 \times R_\mu^2 \in \mathscr{S}_0$. Let $\mathscr{N}(\alpha, \beta]$ denote the family of all such partitions.

4.1. NOTATION. Let F_1 and F_2 denote the real and imaginary parts of some function F in $\mathscr{F}$; if we write $||F||_\infty = \sup\{|F(\vartheta)| : \vartheta \in X\}$, then $(F]$ will denote the rectangle $(-\lambda, \lambda]$, where $\lambda_k = ||F_k||_\infty$ for $k = 1$ and $k = 2$ (again with the notation of § 3). If $T \in \mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$ and $\Pi = (\tau, R) \in \mathscr{N}(\mathfrak{p}^{-1}(T)]$, then we write

$$E_\Delta^T(\Pi) = \sum_{\nu,\mu} (\tau_\nu^1 + i \cdot \tau_\mu^2) \cdot E_\Delta^T(R_\nu^1 \times R_\mu^2). \tag{6}$$

4.2. DEFINITION. The set $S\mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$ consists of all T in $\mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$ such that $||E_\Delta^T(\Pi)||_{\mathfrak{X}}$ is uniformly bounded[4]) for all Π in $\mathscr{N}(\mathfrak{p}^{-1}(T)]$.

4.3. To the function E_Δ^T is associated in the usual way a point-function E^T;

$$E^T(\lambda) = E_\Delta^T((-\infty - i\infty, \lambda] \cap (\mathfrak{p}^{-1}(T)])$$

for all complex λ. In case $(\mathfrak{p}^{-1}(T)] \subset (-\infty, \infty)$, some trivial complications arise, and it is more convenient to discard τ_μ^2 and R_μ^2 altogether in the above, and to define E^T only for real values of λ. In this case, the point-function E^T induces the set-function E_Δ^T by means of the classical formula

$$E_\Delta^T(\alpha, \beta] = E^T(\beta) - E^T(\alpha) \quad \text{when} \quad (\alpha, \beta] \subset (-\infty, \infty). \tag{7}$$

Coming back to the general case, we could write $T = T_1 + i \cdot T_2$ with $(\mathfrak{p}^{-1}(T_k)] \subset (-\infty, \infty)$ for $k = 1, 2$, and obtain $E_\Delta^T(\mathfrak{a}) = E_\Delta^{T_1}(\mathfrak{a}_1) E_\Delta^{T_2}(\mathfrak{a}_2)$ whenever $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \in \mathscr{S}'$ (in a manner identical to [14, p. 284][5]).

4.4. If $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, it will be convenient to denote by $\langle x, y \rangle$ the value of the functional y. For example: the second part of condition (iii) states that the net $\{\langle (\mathfrak{p} G_\iota) x, y \rangle : \iota\}$ converges[6]) to $\langle (\mathfrak{p}F) x, y \rangle$ for all (x, y) in $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$.

[4]) The statement "$f(z)$ is uniformly bounded for all z in Z" means that $\sup\{|f(z)| : z \in Z\} < \infty$.

[5]) Theorem 4.5 below could then be expressed in terms of a double integral, exactly as in [14, p. 284].

[6]) Convergence of a net is defined in [7, p. 66].

4.5. THEOREM. If $T \in S\mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$, then the Stieltjes integral

$$\int \lambda \cdot d\langle E^T(\lambda)\, x, y\rangle$$

exists for all (x, y) in $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, and

$$\langle Tx, y\rangle = \int \lambda \cdot d\langle E^T(\lambda)\, x, y\rangle \quad (x \in \mathfrak{X} \text{ and } y \in \mathfrak{X}'). \tag{8}$$

Proof. Set $F = \mathfrak{p}^{-1}(T)$. Stieltjes integration requires the usual partial ordering of the set $\mathscr{N} = \mathscr{N}(F)$; if Π and Π' belong to $\mathscr{N}$, then $\Pi \gg \Pi'$ if the mesh of Π does not exceed the mesh of Π' [7, p. 79]. This makes $(\mathscr{N}, \gg)$ into a directed set (see [7, pp. 65–66] for notation and terminology). Note that, if

$$F(\Pi) = \sum_{\nu,\mu} (r_\nu^1 + i \cdot r_\mu^2) \cdot F_\square(R_\nu^1 \times R_\mu^2) \tag{9}$$

when $\Pi = (r, R) \in \mathscr{N}$, then it is easily checked that the net $\{F(\Pi) : \Pi \in (\mathscr{N}, \gg)\}$ converges[6]) pointwise to F on X. Note also that $E_\Delta^T(\Pi) = \mathfrak{p}(F(\Pi))$. By hypothesis, $\{E_\Delta^T(\Pi) : \Pi \in (\mathscr{N}, \gg)\}$ is a bounded net N in $[\mathfrak{X}]$; it can therefore be inferred from (iii) that this same net $N = \{\mathfrak{p}(F(\Pi)) : \Pi \in (\mathscr{N}, \gg)\}$ converges weakly to $\mathfrak{p}F = T$ (see 4.4). This concludes the proof; in view of 4.3 and 4.4, the notation used in (8) is the standard one (see also [14, p. 271, (7)]).

4.6. DEFINITIONS. It will be convenient to say that a member T of $\mathfrak{p}(\mathscr{F}_0)$ is "scaled" if it satisfies the relation (8); compare with DUNFORD'S scalar type operators [2, p. 332].

Part II

From now on, $\mathfrak{X} = l_p$, $X = [0, 1]$, and $\mathscr{F}$ is the algebra of all functions of bounded variation on X such that $F(1) = F(1-0)$ and $F(\vartheta) = F(\vartheta + 0)$ for all ϑ in X. The isomorphism $\{F \in \mathscr{F}_n \to \mathfrak{p}F\}$ is henceforth defined by $\mathfrak{p}F = \{x \in l_p \to x * (YF)\}$ where (YF) is the sequence of Fourier coefficients of F [see (15) below], and $x * z$ is the convolution of the sequences x and z. Before proceeding to the task of verifying the hypotheses 2.2, we here insert a few remarks.

4.7. P. HARTMAN [5] has shown that $\mathscr{F}$ satisfies (ii); he is the first to have considered the class $\mathfrak{p}(\mathscr{F})$. Suppose that $F \in \mathscr{F}$, and let $Ps(F)$ be the set of all complex λ such that the set $F^{-1}(\{\lambda\})$ is of positive measure; he pointed out in [5, § 3] that the relation

$$Ps(F) \subset P\sigma(T) \quad \text{when} \quad T = \mathfrak{p}F, \tag{10}$$

holds when $p \geqq 2$. It follows from 3.6 that (10) holds for *any* $\mathfrak{p}$, provided that $F \in \mathscr{F}_0$ (by virtue of the obvious equality $Ps(F) = \varkappa(E_\Delta^T)$). The class $\mathscr{F}_0$ is characterized in § 6, and various subclasses of $\mathscr{F}_0$ are characterized in § 8. The case $Ps(F) = P\sigma(T)$ will be considered in the next section.

4.8. DEFINITION. If the total variation of F in X is denoted $\mathrm{var}(F)$, then we write $\|F\|_X = \|F\|_\infty + \mathrm{var}(F)$; see 4.1 for the definition of $\|F\|_\infty$.

4.9. LEMMA. There exists a number $t_0>0$ such that

$$\|F\|_\infty \leqq \|pF\|_{\mathfrak{X}} \leqq t_0\|F\|_\infty \quad \text{for all } F \text{ in } \mathscr{F}. \tag{11}$$

Proof. Write $d[\mathfrak{a}]=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\mathfrak{a}\}$ and note that $\|F\|_\infty \leqq d[\overline{W}(F)]$, where $\overline{W}(F)$ is the closure of the range of F. On the other hand,

$$d[\overline{W}(F)] = d[\sigma(pF)] = \lim_{n\to\infty}\left(\|(pF)^n\|_{\mathfrak{X}}\right)^{1/n} \leqq \|pF\|_{\mathfrak{X}};$$

the first equality follows from (ii) (which was proved by HARTMAN, (see 4.7)), the second equality is well-known [*14*, p. 419]. This proves the first inequality in (11); the second inequality is readily inferred from STEČKIN's proof [*16*] of the fact that $\|pF\|_{\mathfrak{X}}<\infty$.

4.10. THEOREM. The hypotheses 2.2 are satisfied.

Proof. In view of the initial remark of 4.7, it will suffice to verify (iii). To that effect, consider a net $\{G_\iota:\iota\}$ in $\mathscr{F}_n$ and a function G_0 in $\mathscr{F}_n$ such that

$$G_0(\vartheta) = \lim\{G_\iota(\vartheta):\iota\} \quad \text{a.e. for } \vartheta \text{ in } X, \tag{12}$$

and suppose further that there exists a number $k>0$ such that

$$\|pG_\iota\|_{\mathfrak{X}} \leqq k \quad \text{for all } \iota. \tag{13}$$

We must prove that, for all x in $\mathfrak{X}$, the net $\{(pG_\iota)x:\iota\}$ converges weakly to $(pG_0)x$ (see 4.4 and [*11*, p. 136]). Since G_ι is equal a.e. on X to a function F_ι in $\mathscr{F}$, it follows that $\|G_\iota\|_\infty \leqq \|F_\iota\|_\infty$; from (11) and (13) therefore

$$\|G_\iota\|_\infty \leqq k \quad \text{for all } \iota. \tag{14}$$

The Fourier transform of F is the sequence (YF) such that

$$(YF)_\nu = \int_0^1 e^{-2\pi i\nu\vartheta}F(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{15}$$

$(\nu=-\infty,\ldots,\infty)$. Accordingly, if $x\in l_p$, then $(pF)x = x*(YF)$. Consider the set l_0 of all sequences x such that $x_n=0$ whenever $|n|$ is sufficiently large; l_0 is a linear subspace which is dense in l_p.

If $x\in l_0$, then $x\in l_2$, which implies the existence of a function B in $L^2[0,1]$ such that $x=(YB)$. Take any $\nu=-\infty,\ldots,\infty$. From (12) follows that

$$e^{-2\pi i\nu\vartheta}B(\vartheta)\,G_0(\vartheta) = \lim\{e^{-2\pi i\nu\vartheta}B(\vartheta)\,G_\iota(\vartheta):\iota\}$$

a.e. for ϑ in X. But from (14), (15) and the Lebesgue Dominated Convergence theorem [*1*, p. 149] therefore

$$\big(Y(B\cdot G_0)\big)_\nu = \lim\big\{\big(Y(B\cdot G_\iota)\big)_\nu:\iota\big\}.$$

On the other hand, $\big(Y(B\cdot F)\big) = (YB)*(YF) = x*(YF) = (pF)x$, so that the relation

$$\big((pG_0)x\big)_\nu = \lim\big\{\big((pG_\iota)x\big)_\nu:\iota\big\} \tag{16}$$

holds for all x in l_0. In other words; if $y_\iota = \{x \in l_p \to \big((\not{p} G_\iota)\, x\big)_\nu\}$, then

$$y_0(x) = \lim \{y_\iota(x) : \iota\}$$

for all x in l_0. But l_0 is dense in l_p, and from (13) follows easily that the norms of the functionals y_ι are uniformly bounded; from the Banach-Steinhaus theorem [*11*, p. 131] can therefore be inferred that (16) holds for any x in l_p. Let x now be an arbitrary member of l_p. From (13) again follows that the norms of $(\not{p} G_\iota)\, x$ are uniformly bounded; since (16) holds for all ν, it is easily seen [*11*, p. 139, Satz 6] that the net $\{(\not{p} G_\iota)\, x : \iota\}$ converges weakly to $(\not{p} G_0)\, x$. This concludes the proof.

5. The Hilbert operator. Consider the function E defined for all ϑ in X by: $E(\vartheta) = \not{p}\,(I^1_{\not{\alpha}}(0, \vartheta])$. Suppose $F \in \mathscr{F}$. In this section will be shown that, when $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, then the following Stieltjes integral exists:

$$\int_0^1 F(\vartheta) \cdot d\langle E(\vartheta)\, x, y\rangle; \tag{17}$$

it is a complex number $\lambda_{x,y}$. Note that the mapping $(F)_x = \{y \in \mathfrak{X}' \to \lambda_{x,y}\}$ belongs to $\mathfrak{X}''$; since $\mathfrak{X}$ is reflexive, the mapping $\{x \in \mathfrak{X} \to (F)_x\}$ belongs to $[\mathfrak{X}]$, and we write

$$\int_0^1 F(\vartheta) \cdot dE(\vartheta) = \{x \in \mathfrak{X} \to (F)_x\}. \tag{17'}$$

If $T \in [\mathfrak{X}]$ it is clear that

$$T = \int_0^1 F(\vartheta)\, dE(\vartheta) \tag{α}$$

if and only if

$$\langle T x, y\rangle = \int_0^1 F(\vartheta)\, d\langle E(\vartheta)\, x, y\rangle \quad \text{for all } (x, y) \text{ in } \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'. \tag{α'}$$

5.1. THEOREM. If $T \in \not{p}(\mathscr{F})$ and $F = \not{p}^{-1}(T)$, then the integral (17) exists for all pairs (x, y) in $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, and the equality ($\alpha$) holds.

5.2. REMARKS. This theorem is proved in 5.4. We first indicate a few of its consequences.

From the existence of the integral (17) for all F in $\mathscr{F}$, it is easily deduced that the function

$$E_{x,y} = \{\vartheta \in X \to \langle E(\vartheta)\, x, y\rangle\} \tag{18}$$

must be continuous on X. We will see in § 9 that E is not of bounded variation. Consider the function I^1 that was defined in 2.1; a small calculation will show that the operator $H = -2\pi i \cdot (\not{p} I^1)$ is represented by the Hilbert matrix (defined in § 1). In other words; Hx is the sequence

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \frac{1}{m-n} \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$$

whenever x is in l_p. We call H the Hilbert operator (chiefly because it corresponds to the Hilbert transformation on $L^p(-\infty, \infty)$). From 5.1 follows that

$$pI^1 = \int_0^1 \vartheta \cdot dE(\vartheta) \quad \text{and} \quad H = \int_0^1 \vartheta \cdot dE^H(\vartheta), \tag{19}$$

where $E^H = -2\pi i E$. Thus pI^1 and H are scaled operators; this will also follow immediately from § 8. It has been proved in [10] that neither operator is of scalar type (in the sense of DUNFORD) when $p \neq 2$. Theorem 5.1 says, in effect, that any Laurent operator can be written in the form

$$\int_0^1 f(\vartheta)\, dE^H(\vartheta),$$

where $f \in \mathscr{F}$. The following lemma will be needed for the proof of 5.1.

5.3. LEMMA. If F is in the class $\mathscr{D}_0$ of all real-valued, non-decreasing functions on X, then the integral (17) exists, and the equality (α) holds when $T = pF$.

Proof. Note first that

$$\|g\|_X \leqq 3\|g\|_\infty \quad \text{(whenever } g \in \mathscr{D}_0\text{)}. \tag{20}$$

The notations of § 4 will be used here. The set $\mathscr{N} = \mathscr{N}(I^1]$ consists of all marked partitions of $(0, 1]$ (see the particular case mentioned in 4.3). If $\Pi = (r^1, R^1) \in \mathscr{N}$ we write

$$(\varphi, \Pi)(\vartheta) = \sum_\nu F(r_\nu^1) \cdot [I_{\dot{\alpha}}^1(R_\nu^1)](\vartheta) \quad \text{for all } \vartheta \text{ in } X.$$

Let $C(F)$ denote the set of points of continuity of F. It is easily checked that, for all ϑ in $C(F)$,

$$F(\vartheta) = \lim\{(\varphi, \Pi)(\vartheta) : \Pi \in (\mathscr{N}, \gg)\} \tag{21}$$

(we here use the notation introduced in the body of the proof of 4.5). Since $C(F)$ differs from X by a set of measure zero, it follows that (21) holds a.e. for ϑ in X. On the other hand, it is readily seen that the function $(\varphi, \Pi) = \{\vartheta \in X \to (\varphi, \Pi)(\vartheta)\}$ belongs to $\mathscr{D}_0$; therefore

$$\|p(\varphi, \Pi)\|_{\mathfrak{X}} \leqq 3t_0 \|(\varphi, \Pi)\|_\infty \leqq 3t_0 \|F\|_\infty$$

(by 4.9 and (20)). In view of (iii) it can now be inferred from (21) that the net $\{p(\varphi, \Pi) : \Pi \in (\mathscr{N}, \gg)\}$ converges weakly to pF. In other words; for any pair (x, y) in $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$

$$\langle (pF)\, x, y\rangle = \lim \langle p(\varphi, \Pi)\, x, y\rangle$$

when the mesh of Π approaches 0 (see 4.4). This concludes the proof, since

$$\langle p(\varphi, \Pi)\, x, y\rangle = \sum_\nu F(r_\nu^1)\, [\langle E(\beta_\nu)\, x, y\rangle - \langle E(\alpha_\nu)\, x, y\rangle]$$

when $\Pi = (r^1, R^1)$, $r_\nu^1 \in R_\nu^1 = (\alpha_\nu, \beta_\nu]$ is any marked partition of $(0, 1]$.

5.4. *Proof of* 5.1. Since $F \in \mathscr{F}$, it is possible to write $F = \sum \omega_k \cdot F_k$, where $\omega_k = \exp(ki\pi/2)$ and $F_k \in \mathscr{D}_0$ for all $k = 0, 1, 2, 3$. Now $T = \sum \omega_k \cdot p(F_k)$, and an application of 5.3 now yields

$$T = \sum_k \omega_k \int_0^1 F_k(\vartheta) \cdot dE(\vartheta) = \int_0^1 F(\vartheta) \cdot dE(\vartheta).$$

6. The class $\mathscr{F}_0$. If $\mathscr{E}_1$ is the family of all open subintervals of X having positive measure, then $\mathscr{E}_2$ will denote the family of all finite unions of members of $\mathscr{E}_1$. If $A \dot{+} N$ denotes symmetric difference, let $\mathscr{E}$ be the family of all sets of the form $A \dot{+} N$, where $A \in \mathscr{E}_2$ and N is in the family $\mathscr{E}_0$ of all subsets of X having zero measure.

The set of $\mathscr{E}$-measurable functions is the set $\mathfrak{M}$ of all functions F such that

$$\{\vartheta \in X : F(\vartheta) \in \mathfrak{a}\} = F^{-1}(\mathfrak{a}) \in \mathscr{E} \quad \text{whenever } \mathfrak{a} \in \mathscr{S}_0. \tag{22}$$

If $F \in \mathscr{F}$ and (22), then it is clear that $F_\Delta(\mathfrak{a}) = I^1_\Delta(F^{-1}(\mathfrak{a})) \in \mathscr{F}_n$ (see 3.3), so that $F \in \mathscr{F}_0$. Thus $\mathscr{F} \cap \mathfrak{M} \subset \mathscr{F}_0$; we shall now lay the groundwork for the proof of $\mathscr{F}_0 = \mathfrak{M} \cap \mathscr{F}$.

6.1. LEMMA. If $\mathfrak{b} \subset X$ and $I^1_\Delta(\mathfrak{b}) \in \mathscr{F}$, then $\mathfrak{b} \in \mathscr{E}$.

Proof. Since the function $\Phi = I^1_\Delta(\mathfrak{b})$ assumes only values in $\{0, 1\}$, it follows that its total variation $t(\vartheta)$ (over $[0, \vartheta]$) assumes values in $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Let $D(f)$ be the set of points of discontinuity of f, and let $D(f, \varepsilon)$ be the set of points ϑ in X such that $|f(\vartheta + 0) - f(\vartheta - 0)| > \varepsilon$. Note that $D(t, \frac{1}{2})$ is a finite set [*13*, p. 206]. But, since t assumes values only in ω; $D(t, \frac{1}{2}) = D(t)$. From [*3*, p. 202]; $D(\Phi) = D(t)$. Therefore $D(\Phi)$ is a finite set of points, which induces a partition of X into intervals $\{J_n : n\} = \mathscr{J}$; it is clear that there exists a set N in $\mathscr{E}_0$ such that $\mathfrak{b} \dot{+} N$ is the union of a subfamily of $\mathscr{J}$. This concludes the proof.

6.2. REMARK. Let $\sim N$ denote the set-theoretic complement $X - N$; if $\vartheta \in N \in \mathscr{E}_0$, then there exists a sequence $\{\vartheta_n\}_n$ in $\sim N$ such that $\vartheta_n > \vartheta$ and which converges to ϑ.

6.3. LEMMA. If $A \subset X$ and $I^1_\Delta(A) \in F_n$, then $A \in \mathscr{E}$.

Proof. Set $\Phi = I^1_\Delta(A)$. By hypothesis there exists some F in $\mathscr{F}$ such that $\Phi(\vartheta) = F(\vartheta)$ outside of some N in $\mathscr{E}_0$. Let $\mathfrak{b}$ be the set $\{\vartheta \in X : F(\vartheta) = 1\}$. From 6.2 and the condition $F(\vartheta) = F(\vartheta + 0)$ (satisfied by all members of F) follows easily that $F = I^1_\Delta(\mathfrak{b})$, whence $\mathfrak{b} \in \mathscr{E}$ (from 6.1). On the other hand, it is not hard to see that the relation $(I^1_\Delta(A))(\vartheta) = (I^1_\Delta(\mathfrak{b}))(\vartheta)$ for $\vartheta \in \sim N$ implies $A \cap \sim N = \mathfrak{b} \cup \sim N$. Thus $A = \mathfrak{b} \dot{+} N_0$, where $\mathscr{N}_0 = (\mathfrak{b} \cap N) \dot{+} (A \cap N) \in \mathscr{E}_0$. This concludes the proof.

6.4. THEOREM. All members of $\mathscr{F}_0$ are $\mathscr{E}$-measurable.

Proof. Suppose $F \in \mathscr{F}_0$; we must show (22). To that effect, assume $\mathfrak{a} \in \mathscr{S}_0$; then $I^1_\Delta(F^{-1}(\mathfrak{a})) \in \mathscr{F}_n$, and the conclusion follows from 6.3.

Part III

7. The class $\mathfrak{C}_u$. If $\varepsilon>0$, let a_λ^ε be the rectangle $(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon]$ (see § 3). In this section we consider operators T which have a pass E_Δ^T such that, for any complex λ

(iv) $$\langle E_\Delta^T(\{\lambda\})\,x,\,y\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\langle E_\Delta^T(a_\lambda)\,x,\,y\rangle \qquad (x\in\mathfrak{X},\ y\in\mathfrak{X}').$$

Let $\mathfrak{C}_u$ be the class of all operators T which satisfy (iv) and the additional two conditions (v) and (i'):

(v) *the residual spectrum of T is void,*
(i') *the point-spectrum $P\sigma(T)$ coincides with $\varkappa(E_\Delta^T)$.*

The property (2) of § 1 is the combination of (iv) and (v). The set $\varkappa(E_\Delta^T)$ was defined in 3.5.

If E is a pass, then $\Lambda(E)$ will denote[7]) the set of all λ such that $E(a_\lambda^\varepsilon)\neq O$ for all $\varepsilon>0$. If $T=pF$ and $F\in\mathscr{F}_0$, it is readily verified that $\Lambda(E_\Delta^T)$ is the set $s(F)$ of all complex λ such that

$$\{\vartheta\in X:|F(\vartheta)-\lambda|<\varepsilon\} \qquad \text{has positive measure}$$

for all $\varepsilon>0$. It is easily seen that $s(F)$ coincides with the closure $\overline{W}(F)$ of the range of F [5, p. 46]; from (ii) therefore,

(23) $$s(F)=\overline{W}(F)=\Lambda(E_\Delta^T)=\sigma(T).$$

Note that the set $\varkappa(E_\Delta^T)$ coincides with the set $Ps(F)$ of all complex λ such that

$$\{\vartheta\in X:F(\vartheta)=\lambda\} \qquad \text{has positive measure.}$$

From (i') therefore

(24) $$Ps(F)=P\sigma(T)$$

whenever $F\in\mathscr{F}_0$ and $T=pF\in\mathfrak{C}_u$. In the Hilbert space case $\mathfrak{X}=l_2$, TOEPLITZ has shown that $Ps(F)=P\sigma(pF)$ for any F in $\mathscr{F}$. HARTMAN [5, § 3] recently formulated the question of whether this result holds when $p\neq 2$.

7.1. ORIENTATION. The rest of this section is devoted to the proof that $\mathfrak{C}_u$ contains the class $Up(\mathscr{F}_0)$ of all members T of $p(\mathscr{F}_0)$ such that E_Δ^T is locally uniformly bounded; in other words,

7.2. DEFINITION. $Up(\mathscr{F}_0)$ is the class of all members T of $p(\mathscr{F}_0)$ such that, for any complex λ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\|E_\Delta^T(a_\lambda^\varepsilon)\|_{\mathfrak{X}}<\infty \qquad \text{when} \qquad \mathfrak{X}=l_p.$$

7.3. LEMMA. Take $\varepsilon>0$, and let λ be a complex number. The function h_λ^ε is defined by $h_\lambda^\varepsilon(\zeta)=(\lambda-\zeta)^{-1}$ when $\zeta\notin a_\lambda^\varepsilon$, while $h_\lambda^\varepsilon(\zeta)=0$ when $\zeta\in a_\lambda^\varepsilon$. If $F\in\mathscr{F}_0$, then $(h_\lambda^\varepsilon\circ F)\in\mathscr{F}_u$.

[7]) See [4, p. 62] for the usual definition given for $\Lambda(E)$ when E is a measure; in the present article, $\Lambda(E)$ will play a similar role.

Proof. We shall use the notations defined in § 6. From a well-known theorem it is easily derived that

(a') *if f is of bounded variation on $J \in \mathscr{E}_1$, and if $|f(\vartheta)| \geqq \varepsilon$ for all ϑ in J, then the function $\{\vartheta \to [f(\vartheta)]^{-1}\}$ is of bounded variation on the closure of J.*

Let $\Gamma(a)$ be the function $\{\vartheta \in X \to \Gamma(\mathfrak{a})(\vartheta)\}$ defined by

$$\begin{cases} \Gamma(\mathfrak{a})(\vartheta) = (\lambda - F(\vartheta))^{-1} & \text{when } \vartheta \notin \mathfrak{a}, \\ \Gamma(\mathfrak{a})(\vartheta) = 0 & \text{when } \vartheta \in \mathfrak{a}. \end{cases} \tag{25}$$

Note that $(h_\lambda^\varepsilon \circ F) = \Gamma(F^{-1}(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon))$. In view of 6.4, $F^{-1}(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon) = A \dot{+} N$, where $A \in \mathscr{E}_2$ and $N \in \mathscr{E}_0$. It is easily seen that $\Gamma(F^{-1}(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon))$ equals $\Gamma(A)$ a.e. on X. To complete the proof, it will suffice to show that $\Gamma(A) \in \mathscr{F}_n$.

Since $A \in \mathscr{E}_2$, the set $\sim A$ is the union of a finite disjoint family $\{J_\nu : \nu\}$ of closed intervals. The function $\Gamma(A)$ vanishes on A, so the proof will be completed by showing that $\Gamma(A)$ is of bounded variation on each J_ν. Since (by (25)) $\Gamma(A)(\vartheta) = (\lambda - F(\vartheta))^{-1}$ when $\vartheta \in \sim A$, we see from (a') that it will suffice to establish that, for all J_ν

$$|\lambda - F(\vartheta)| \geqq \varepsilon/2 \quad \text{for all } \vartheta \text{ in the interior } I_\nu \text{ of } J_\nu.$$

To that effect, take ϑ in I_ν; if $\vartheta \notin N$, then $\vartheta \notin (A \dot{+} N)$, whence $\vartheta \notin F^{-1}(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon)$, so that $F(\vartheta) \notin \mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon$: therefore $|\lambda - F(\vartheta)| \geqq \varepsilon/2$. The remaining possibility $\vartheta \in I_\nu$, $\vartheta \in N$ yields the same conclusion by way of 6.2 and the right-continuity of F.

7.4. THEOREM. If $T \in Up(\mathscr{F}_0)$, then (iv) is satisfied for all λ complex.

Proof. Set $F = p^{-1}(T)$. Since $F^{-1}(\{\lambda\}) = \cap\{F^{-1}(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, it follows easily from 3.3 that

$$F_\Phi(\{\lambda\}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F_\Phi(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon) \quad \text{a.e. on } X.$$

But, by hypothesis, there exists two positive numbers k_λ and δ_λ such that $\|E_\Delta^T(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon)\|_{\mathfrak{X}} < k_\lambda$ whenever $0 < \varepsilon < \delta_\lambda$; since $E_\Delta^T(\mathfrak{b}) = pF_\Phi(\mathfrak{b})$, an application of (iii) now yields the conclusion that $E_\Delta^T(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon)$ converges weakly to $E_\Delta^T(\{\lambda\})$ when $\varepsilon \to 0+$.

7.5. LEMMA. Suppose that $T \in Up(\mathscr{F}_0)$. If $E_\Delta^T(\{\lambda\}) = \boldsymbol{O}$, then the range of $\lambda \boldsymbol{I} - T$ is dense in $\mathfrak{X}$.

Proof. Set $F = p^{-1}(T)$. From 7.3 follows that $(h_\lambda^\varepsilon \circ F) \in \mathscr{F}_n$, and therefore $h_\lambda^\varepsilon(T) \in [\mathfrak{X}]$ (see 2.3). If $g = \lambda I^0 - I^1$, then $g(T) = \lambda \boldsymbol{I} - T$ (from 2.5) and $\varphi_\varepsilon = (g \circ h_\lambda^\varepsilon) \in \mathscr{F}_n$; thus 2.4 shows that

$$\varphi_\varepsilon(T) = (\lambda \boldsymbol{I} - T)\, h_\lambda^\varepsilon(T). \tag{26}$$

On the other hand, $I^0 - \varphi_\varepsilon = I_\Phi^1(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon)$; by (5) therefore $\boldsymbol{I} - \varphi_\varepsilon(T) = \boldsymbol{E}_\Delta^T(\mathfrak{a}_\lambda^\varepsilon)$. A successive application of 7.4 and the hypothesis $E_\Delta^T(\{\lambda\}) = \boldsymbol{O}$ therefore gives

$$\langle x, y\rangle - \lim_{\varepsilon \to 0+} \langle \varphi_\varepsilon(T)\, x, y\rangle = \langle E_\Delta^T(\{\lambda\})\, x, y\rangle = 0 \tag{27}$$

for all pairs (x, y) in $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$.

Let y be an arbitrary member of $\mathfrak{X}'$. In order to prove that the range of $\lambda \boldsymbol{I} - T$ is dense in $\mathfrak{X}$, it suffices to show that, if

$$\langle (\lambda \boldsymbol{I} - T) z, y \rangle = 0 \quad \text{for all } z \text{ in } \mathfrak{X}, \tag{28}$$

then $y = 0$. To that effect, assume (28). From (26) therefore $\langle \varphi_\varepsilon(T) x, y \rangle = 0$ for all x in $\mathfrak{X}$. It now results from (27) that $\langle x, y \rangle = 0$ for all x in $\mathfrak{X}$, which implies $y = 0$. This concludes the proof.

7.6. THEOREM. If $T \in Up(\mathscr{F}_0)$ and $q = p/(p-1)$, then $T^* \in Uq(\mathscr{F}_0)$ and $\varkappa(E_\Delta^T) = \varkappa(E_\Delta^{T^*})$.

Proof. The Banach space adjoint T^* of T is a member of $[\mathfrak{X}']$ (see [18, p. 169]); if $F = p^{-1}(T)$, then

$$T^* = q(F') = [p(T)]^* \tag{29}$$

where $F' = \{\vartheta \in X \to F(1-\vartheta)\}$; this was proved in [9, 5.3, (15)]. Suppose $\mathfrak{a} \in \mathscr{S}_0$. Since $B_\Phi(\mathfrak{a}) = (I^1_\Phi(\mathfrak{a}) \circ B)$ (see 3.3), it is easily seen that

$$F'_\Phi(\mathfrak{a}) = (F_\Phi(\mathfrak{a}))' \tag{30}$$

therefore $F'_\Phi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{F}_n$ and $F' \in \mathscr{F}_0$, whence $T^* \in q(\mathscr{F}_0)$ (by (29)). But

$$E_\Delta^{T^*}(\mathfrak{a}) = q(F'_\Phi(\mathfrak{a})) = q[(F_\Phi(\mathfrak{a}))'] = [p(F_\Phi(\mathfrak{a}))]^* = [E_\Delta^T(\mathfrak{a})]^*; \tag{31}$$

the first and the last equality come from the definition 3.2, the second equality from (30), and the third from (29). Recall that

$$\|Q\|_{\mathfrak{X}} = \|Q^*\|_{\mathfrak{X}^*} \quad \text{for any } Q \text{ in } [\mathfrak{X}], \tag{32}$$

(where $\mathfrak{X}^* = l_p$; see [18, p. 169]). Therefore $T^* \in Uq(\mathscr{F}_0)$. Finally, (31) and (32) imply that $E_\Delta^T(\mathfrak{a}) = \boldsymbol{O}$ iff $E_\Delta^{T^*}(\mathfrak{a}) = \boldsymbol{O}$, whence $\varkappa(E_\Delta^T) = \varkappa(E_\Delta^{T^*})$ (see definition 3.5).

7.7. THEOREM. If $T \in Up(\mathscr{F}_0)$, then $T \in \mathfrak{C}_u$ and $P\sigma(T) = P\sigma(T^*)$.

Proof. Keeping 7.6 and 7.4 in mind, it will clearly suffice to prove (v) and (i'). If λ belongs to the residual spectrum $R\sigma(T)$, then the range of $\lambda \boldsymbol{I} - T$ is not dense in $\mathfrak{X}$ [6, 2.14.1]; from 7.5 therefore $E_\Delta^T(\{\lambda\}) \neq \boldsymbol{O}$. Thus $R\sigma(T) < \varkappa(E_\Delta^T)$, and we can infer from 3.6 that $R\sigma(T) < P\sigma(T)$; but $P\sigma$ and $R\sigma$ are disjoint, which proves that $R\sigma(T)$ is void. In order to prove (i'), suppose $\lambda \in P\sigma(T)$: then the range of $\lambda \boldsymbol{I} - T^*$ is not dense in $\mathfrak{X}'$ [18, p. 305, proof of Theorem 6], which implies $E_\Delta^{T^*}(\{\lambda\}) \neq \boldsymbol{O}$ (this[8]) comes from 7.5). Therefore $P\sigma(T) < \varkappa(E_\Delta^T)$. The conclusion $P\sigma(T) = \varkappa(E_\Delta^T)$ now follows from 3.6; this in turn involves $P\sigma(T) = P\sigma(T^*)$ by way of 7.6.

8. Families of scaled operators in $\mathfrak{C}_u$. If $G \in \mathscr{F}_n$, we denote by $[G]$ the unique member of $\mathscr{F}$ that equals G a.e. on X. Let $\mathscr{F}_s$ be the family of all functions F in $\mathscr{F}_0$ such that $\|[F(\Pi)]\|_X$ is uniformly bounded for all Π in $\mathscr{N}(F)$ (see 4.1 and (9)). The family $\mathscr{F}_u$ will consist of all the functions F

[8]) By virtue of 7.6 we may replace p by q and T by T^* in 7.5.

in $\mathscr{F}_0$ such that, for any λ complex: $\|[F_\sigma(a_\lambda^\varepsilon)]\|_X$ is uniformly bounded when $\varepsilon \to 0+$.

In view of the fact that $\|pG\|_X \leqq t_0 \|[G]\|_X$ (from 4.9), it follows directly from definitions 7.2 and 4.2 that, if $p(\mathscr{G})$ denotes the set $\{pG : G \in \mathscr{G}\}$, then

$$p(\mathscr{F}_u) < U p(\mathscr{F}_0) < \mathfrak{C}_u,$$
$$p(\mathscr{F}_s) < S p(\mathscr{F}_0) < \mathfrak{C}_s = \{\text{all scaled operators}\}.$$

The families $p(\mathscr{F}_u)$ and $p(\mathscr{F}_s)$ are not related by inclusion, as we will show by an example. In this section, a subclass $\mathscr{D}$ of $\mathscr{F}_u \cap \mathscr{F}_s$ will be characterized; it results from the above that

$$p(\mathscr{D}) < \mathfrak{C}_u \cap \mathfrak{C}_s.$$

Take $k > 0$. The family $\mathscr{M}_k$ of marked partitions of the interval $(-k, k]$ consists of pairs $\Pi = (r^1, R^1)$, where $r^1 = \{r_\nu^1 : \nu\}$, $R^1 = \{R_\nu^1 : \nu\}$ with $r_\nu^1 \in R_\nu^1$ and

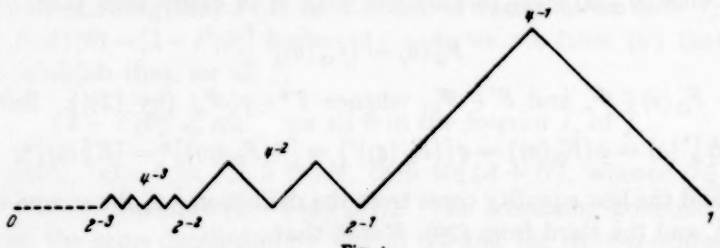

Fig. 1

$\cup R = (-k, k]$. Let us agree to denote by $\mathscr{G}^\#$ the set of all real-valued functions in an arbitrary subset $\mathscr{G}$ of $\mathscr{F}$. Suppose that $F \in \mathscr{F}_0{}^\#$; then $(F] = (-k, k]$, where $k = \|F\|_\infty$; in accordance with the remarks made in 4.3, we will in this case write

$$F(\Pi) = \sum_\nu r_\nu^1 \cdot F_\sigma(R_\nu^1) \qquad (\Pi \in \mathscr{M}_k).$$

We shall now construct a function F such that $T = pF$ belongs to $p(\mathscr{F}_s)$ but not to $p(\mathscr{F}_u)$. Consider the intervals $J_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. A function F_n is defined on J_n as follows: $F_n(2^{-n}) = 0 = F_n(2^{-n+1})$, subdivide J_n into 2^{n-1} equal parts; at each subdivision point F_n is assigned alternatively the values 0 and 4^{-n}; the graph of F_n is completed by joining successive values by straight line segments. The function F is defined on $[0, 1]$ by setting $F(0) = 0$ and $F = F_n$ on each J_n; see Fig. 1.

8.1. DEFINITIONS. If J is a subinterval of $X = [0, 1]$, then $(B|J)$ is the restriction $\{\vartheta \in J \to B(\vartheta)\}$. The family $\mathscr{D}$ of "piecewise monotone" functions is the set $\mathscr{D}_1 + i \cdot \mathscr{D}_1$, where $\mathscr{D}_1$ consists of all real-valued functions B defined on X, to which correspond a finite partition $\{J_n : n\}$ of X such that $(B|J_n)$ is monotone (for all n)[9].

[9]) The symbol $\mathscr{G} + i \cdot \mathscr{G}$ denotes the set of all $G + i \cdot A$, where $G \in \mathscr{G}$ and $A \in \mathscr{G}$.

8.2. THEOREM. Suppose that f is a function defined on X. If f has a holomorphic extension F, then $f \in \mathscr{L}$.

Proof. First, a more precise statement of the hypothesis: there exists a region $\mathfrak{a}$ such that F is both defined and analytic in $\mathfrak{a}$, and $\mathfrak{a} > X$. Let δ be the distance between X and the boundary of $\mathfrak{a}$ [8, p. 19]. Take a finite partition $\{J_n : n\}$ of X whose mesh is less than $\delta/4$; then J_n is included in the circle $\mathfrak{a}_n = \{\lambda : |\lambda - \vartheta_n| < \delta/2\}$, where ϑ_n is the center of the interval J_n. Clearly $F(\zeta) = \sum_\nu \lambda_{n\nu} \cdot (\zeta - \vartheta_n)^\nu$ whenever $\zeta \in \mathfrak{a}_n$. We write $(\lambda)_1 = \operatorname{Rl} \lambda$ and $(\lambda)_2 = \operatorname{Im} \lambda$. Take $k = 1, 2$ and $f_k = \{\vartheta \in X \to (f(\vartheta))_k\}$; the function

$$F_{kn} = \left\{\zeta \in \mathfrak{a}_n \to \sum_\nu (\lambda_{n\nu})_k \cdot (\zeta - \vartheta_n)^\nu\right\}$$

is a holomorphic extension of $(f_k | J_n)$. Therefore the derivative of $f_{kn} = (f_k | J_n)$ vanishes only at finitely many points of J_n (see [8, p. 89]); these points induce a partition of J_n into open intervals J_{nm}, and f_{kn} is monotone in each [15, p. 81]. We have thus partitioned X by a finite family $\{J_{nm} : n, m\}$ with $(f_k | J_{nm})$ monotone. This completes the proof.

8.3. ORIENTATION. It remains to prove that $\mathscr{D}$ is included in $\mathscr{F}_u \cap \mathscr{F}_s$. Since the proofs are routine and straightforward, many details will be omitted.

8.4. Suppose that, to any z in a set Z corresponds a member $G(z)$ of $\mathscr{F}_u$; we will say that $G(z)$ is *$\mathscr{F}$-bounded on J for all z in Z* if there exists a number $k > 0$ such that $\|([G(z)] | J)\|_X \leqq k$ for all z in Z. Let $\mathscr{F}(J)$ be the family of all F in $\mathscr{F}$ such that $F_\diamond(\mathfrak{a})$ is $\mathscr{F}$-bounded on J for all intervals $\mathfrak{a} < (-\infty, \infty)$.

8.5. REMARK. Let $\{J_n : n\}$ be a finite partition of X. If, for every J_n, the function $G(z)$ is $\mathscr{F}$-bounded on J_n for all z in Z, then $G(z)$ is $\mathscr{F}$-bounded on X for all z in Z.

8.6. LEMMA. If $(B | J)$ is monotone, then $B \in \mathscr{F}(J)$.

Proof. Let α, β be arbitrary real numbers. If $(F | J)$ is monotone increasing, it is easily checked that the relation $\|(f_k | J)\|_X \leqq 3$ holds for $f_1 = [F_\diamond(\{\alpha\})]$ and $f_2 = [F_\diamond([\alpha, \infty))]$; therefore $[F_\diamond(\alpha, \infty)] = f_2 - f_1 = f$, and $\|(f | J)\|_X \leqq 6$. A similar examination of $F_\diamond(\mathfrak{a})$ for any subinterval $\mathfrak{a}$ of $(-\infty, \infty)$ will reveal that $F \in \mathscr{F}(J)$. If $(B | J)$ is decreasing, set $F = -B$; the preceding results apply, and $B \in \mathscr{F}(J)$ since $F \in \mathscr{F}(J)$.

8.7. LEMMA. Let F_1 and F_2 denote the real and imaginary parts of $F \in \mathscr{F}$. If F_1 and F_2 are both in $\mathscr{F}(X)$, then $F \in \mathscr{F}_u$.

Proof. If $\mathfrak{a} \in \mathscr{S}_0$, then $\mathfrak{a}$ can be written in the form $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$, where $\mathfrak{a}_1$ and $\mathfrak{a}_2$ are subintervals of $(-\infty, \infty)$ (see § 3); note that $F_\diamond(\mathfrak{a}) = (F_1)_\diamond(\mathfrak{a}_1) \cdot (F_2)_\diamond(\mathfrak{a}_2)$. Therefore F is in $\mathscr{F}(X)$, and the conclusion follows.

8.8. THEOREM. If $F \in \mathscr{D}$, then $F \in \mathscr{F}_u$.

Proof. In view of 8.1 and 8.7, it will suffice to show that $B \in \mathscr{D}_1$ implies $B \in \mathscr{F}(X)$. By hypothesis, there exists a finite partition $\{J_n : n\}$ of X such

that $(B|J_n)$ is monotone. From 8.6 it is seen that $(B|J_n)_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{a})$ is $\mathscr{F}$-bounded on J_n for all intervals $\mathfrak{a}$. But $(B|J_n)_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{a}) = B_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{a})$ on J_n, and 8.5 now shows that $B_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{a})$ is $\mathscr{F}$-bounded on X for all $\mathfrak{a}$; i.e. $B \in \mathscr{F}(X)$.

8.9. LEMMA. Suppose that $F = (B|J)$ is monotone. If $k = \|F\|_\infty$, then $F(\Pi)$ is $\mathscr{F}$-bounded on J for all Π in $\mathfrak{M}_k$.

Proof. Set $f = F(\Pi)$. Note that f is monotone and $\|f\|_\infty \leqq k$. Since $|(f|J)\|_X \leqq 3\|(f|J)\|_\infty$ whenever f is monotone, the conclusion follows.

8.10. THEOREM. If $F \in \mathscr{D}$, then $F \in \mathscr{F}_u$ and $F \in \mathscr{F}_s$.

Proof. A small calculation will verify that $\mathscr{F}_s{}^{\#} + i \cdot (\mathscr{F}_s{}^{\#}) < \mathscr{F}_s$. In view of 8.1 and 8.8, it will accordingly suffice to show that, for any B in $\mathscr{D}_1$, the function $B(\Pi)$ is $\mathscr{F}$-bounded for all Π in $\mathscr{M}_k$, $k = \|B\|_\infty$. To that effect, let $\{J_n : n\}$ be the partition that corresponds to B, and set $F_n = (B|J_n)$. It is easily checked that, when $\Pi = (r^1, R^1) \in \mathscr{M}_k$, then

$$B(\Pi) = \sum_\nu r_\nu^1 \cdot (F_n)_{\mathfrak{S}}(R_\nu^1) \quad \text{on } J_n.$$

Thus $B(\Pi) = F_n(\Pi)$ von J_n. By hypothesis, F_n is monotone; it can accordingly be inferred from 8.9 that $F_n(\Pi)$ is $\mathscr{F}$-bounded on J_n for all Π in $\mathscr{M}_k$. But $B(\Pi)$ is then $\mathscr{F}$-bounded on J_n, and 8.5 shows that $B(\Pi)$ must be $\mathscr{F}$-bounded on X for all Π in $\mathscr{M}_k$.

8.11. Additional properties of the class $p(\mathfrak{D}_1)$. We now supply without proofs a few remarks. If $T \in p(\mathscr{D}_1)$, then $E^T(\lambda - 0) = E^T(\lambda)$ (in the notation of 4.3), and $\lambda \in (-\infty, \infty)$ implies that

$$\lambda \in \sim\sigma(T) \leftrightarrows E^T(\lambda - \varepsilon) = E^T(\lambda + \varepsilon) \quad \text{for some } \varepsilon > 0,$$

while $\lambda \notin P\sigma(T)$ if and only if E^T is weakly continuous at λ. These properties are well-known [17, pp. 184—185] in the case where E^T is the resolution of the identity of a self-adjoint operator T.

Part IV

9. Conclusion. Suppose that T is a scaled operator in $\mathfrak{C}_u$. Thus

$$(\beta) \qquad T = \int \lambda \cdot dE^T(\lambda) = \int_{\Lambda(E_\Delta^T)} \lambda \cdot E_\Delta^T(d\lambda),$$

where the first equality has the meaning attributed to (α) in § 5 (compare with [4, p. 60, Theorem 1]); the symbolism used in the second integral is a customary one in the case where E_Δ^T is a measure with "spectrum" $\Lambda(E_\Delta^T)$ (for example: [4, p. 62]). Recall that $\Lambda(E_\Delta^T) = \sigma(T)$.

Clearly the function I^1 is in $\mathscr{D}$; if $J = pI^1$, then $\Lambda(E_\Delta^J) = \overline{W}(I^1) = X = \sigma(J)$ (from (23)), and consequently

$$(\gamma) \qquad J = \int_X \lambda \cdot E_\Delta^J(d\lambda) = \int_0^1 \vartheta \cdot dE(\vartheta),$$

where the first equality follows from (β); see (19) in § 5 for the second equality[10]). If $F = \{\vartheta \in X \to \exp(-2\pi i \vartheta)\}$, it is easily checked that $\tau = pF$ is the translation operator $x \to \{x_{n-1}\}_n$ which was defined in § 1; in view of 8.2, it is clear that $F \in \mathscr{D}$, so that pF is a scaled operator in $\mathfrak{S}_u$ (by 8.10), and

$$\tau = \int_{|\lambda|=1} \lambda \cdot E_A^{\tau}(d\lambda) = \int_0^1 \exp(-2\pi i \vartheta) \cdot dE(\vartheta);$$

again the first equality comes from (β) and (23), while the second follows directly from 5.1.

From now on: $\mathfrak{X} = l_p$, $p \neq 2$. It has been established in [*10*] that neither J, τ nor $H = -2\pi i \cdot J$ are "scalar type" operators in the sense of DUNFORD [*2*]. It is natural to inquire about the question of whether the set $E(\bullet) = \{E(\vartheta) : \vartheta \in X\}$ forms a "resolution of the identity" in the sense of LORCH [*12*]; if this were the case, then LORCH's integration theory would yield a spectral measure E such that the equality (γ) holds in the uniform topology. The answer is negative: $E(\bullet)$ satisfies all the conditions required by LORCH for a resolution of the identity, except the following crucial condition; there must exist a number $k > 0$ such that

$$\left\| \sum_{\nu} \mu_{\nu} \left(E(\beta_{\nu}) - E(\alpha_{\nu}) \right) \right\|_{\mathfrak{X}} \leqq k$$

for all $|\mu_{\nu}| \leqq 1$ (and whenever $\alpha_{\nu} \leqq \beta_{\nu} \leqq \alpha_{\nu+1} \leqq \beta_{\nu+1}$ [*12*, p. 226]). This condition is not satisfied because otherwise E would be of "bounded variation" (in the sense of [*6*, p. 39]); in particular, we would have

(δ) $\qquad \operatorname{var}(E_{x,y}) \leqq k \|x\| \|y\| \quad$ whenever $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$,

where $\operatorname{var}(E_{x,y})$ denotes the total variation on X of the function defined in (18) of 5.2. It will now be shown that (δ) implies a contradiction. From (δ) and 5.1 it can be inferred that, for any T in $p(\mathscr{F})$

$$|\langle Tx, y \rangle| = \left| \int_0^1 p^{-1}(T) \cdot dE_{x,y} \right| \leqq k \|p^{-1}(T)\|_{\infty} \|x\| \|y\|$$

whenever $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$. Therefore the inequality $\|T\|_{\mathfrak{X}} \leqq k \|p^{-1}(T)\|_{\infty}$ would hold for any T in $p(\mathscr{F})$. But $pF = F(J)$ when $F \in \mathscr{F}$[10]). Therefore

$$\|F(J)\|_{\mathfrak{X}} \leqq k \|F\|_{\infty}$$

for all polynomials F, and from [*10*, 2.4] we obtain $I^1(J) \neq J$. This is a contradiction, since $I^1(J) = pI^1$.

Bibliography

[*1*] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, Première partie, Livre VI. Intégration, Ch. I–IV. Act. Sci. et Ind. 1175. Paris: Hermann & Cie. 1952. – [*2*] DUNFORD, N.: Spectral operators. Pac. J. of Math. **4**, No. 3, 321–354 (1954). – [*3*] GRAVES, L.: The theory of functions of real variables. New York 1956. – [*4*] HALMOS, P.: Introduction

[10]) Note that $p^{-1}(J) = I^1$; from the definition 2.3 therefore $F(J) = pF$ when $F \in \mathscr{F}$, and $p(\mathscr{F})$ is the set of all operators $F(J)$, where $F \in \mathscr{F}$.

to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. New York 1951. — [5] HARTMAN, P.: On Laurent operators on l_p. Proc. Amer. Math. Soc 8, No. 1, 45—48 (1957). — [6] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 31. New York 1948. — [7] KELLEY, J. L.: General Topology. New York 1955. — [8] KNOPP, K.: Theory of Functions. Dover, New York 1945. — [9] KRABBE, G. L.: Vaguely normal operators on a Banach space. To appear in the Arch. f. rat. Mech. and Anal. — [10] KRABBE, G. L.: Convolution operators which are not of scalar type. Math. Z. 69, 346—350 (1958). — [11] LJUSTERNIK, L. A., u. W. I. SOBOLEW: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin 1955. — [12] LORCH, E. R.: On a calculus of operators in reflexive vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 45, 217—234 (1939). — [13] NATANSON, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954. — [14] RIESZ, F., and B. SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionelle, 3me Ed. Paris 1955. — [15] RUDIN, W.: Principles of mathematical analysis. New York 1953. — [16] STEČKIN, S. B.: On bilinear forms. Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S. 71, 237—240 (1950). — [17] STONE, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 15. New York 1932. — [18] ZAANEN, A. C.: Linear analysis. New York 1953.

Dept. of Math., Purdue University, Lafayette, Ind. (U.S.A.)

(Eingegangen am 11. Juli 1958)

Zusatz bei der Korrektur: Professor CIPRIAN FOIAS has recently communicated to me a proof which establishes that neither H nor τ are "spectral operators" in the sense of Dunford.

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 463/64 (1959)

Eine Bemerkung über konvexe Kurven

Von
DETLEF LAUGWITZ

Es sei K eine kompakte konvexe Punktmenge in der Ebene. Als Stützparallelogramm von K werde ein Parallelogramm PR_1QR_2 bezeichnet, von dem die zwei Gegenecken R_1, R_2 Randpunkte von K sind und dessen Seiten QR_1, QR_2 auf Stütztangenten von K liegen. Es gilt:

Satz. *Es sei P ein innerer Punkt von K; dann gibt es mindestens zwei Stützparallelogramme von K mit P als Ecke.*

Bemerkung. Dieser Satz ist kürzlich von S. K. STEIN [3] unter der Zusatzvoraussetzung bewiesen worden, daß K streng konvex und eckenfrei sei; wir geben einen anderen Beweis ohne diese Einschränkungen. Zuvor sei bemerkt, daß sich der Satz nicht verschärfen läßt: Ein vom Mittelpunkt verschiedener Innenpunkt P einer Kreisscheibe ist Ecke von *genau* zwei Stützparallelogrammen, wie man elementar zeigt[1]).

Beweis. Nach RADON [2][2]) kann man die Stützelemente von K in folgender Weise auf einen Parameter u modulo 4π eineindeutig beziehen. Der Innenpunkt P von K sei Zentrum eines Polarkoordinatensystems (r, φ); ϑ bezeichne den Winkel, durch den man den Radiusvektor zu drehen hat, damit er die Richtung der betrachteten Stütztangente erhält. Dann setze man $u = 2\varphi + \vartheta$ und bemerkt

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta(u+4\pi) = \vartheta(u), \quad 0 < \vartheta(u) < \pi, \quad \vartheta(u) \text{ stetig}, \quad \varphi(u+4\pi) = \varphi(u) \quad \text{und} \\ \int\limits_0^{4\pi} \operatorname{cotg} \vartheta(u)\, du \neq 0. \end{cases}$$

Dafür, daß u^* und u Seiten eines Stützparallelogramms mit Ecke P beschreiben, ist notwendig und hinreichend

$$(2)\qquad u^* = u + \pi, \quad \vartheta(u^*) + \vartheta(u) = \pi,$$

wie sich aus $\varphi^* = \varphi + \vartheta$, $\vartheta^* = \pi - \vartheta$ ergibt. Setzt man

$$\tau(u) \underset{\text{def}}{=} \operatorname{cotg} \vartheta(u) + \operatorname{cotg} \vartheta(u+\pi) = \frac{\sin(\vartheta(u) + \vartheta(u+\pi))}{\sin \vartheta(u) \cdot \sin \vartheta(u+\pi)},$$

[1]) *Zusatz bei der Korrektur:* Doch gibt es nicht bei allen Bereichen K Innenpunkte P mit *genau* zwei Stützparallelogrammen. Zu einem Innenpunkt P eines Dreiecks existieren stets genau sechs solche Parallelogramme.

[2]) Man findet die im folgenden verwendeten Formeln über die Radonsche Darstellung auch in der Arbeit [1], wo ein ganz ähnliches Beweisverfahren für den Nachweis der Existenz zweier Paare konjugierter Durchmesser bei konvexen Mittelpunktskurven verwendet wurde.

so gilt wegen (1)

$$0 = \int_0^{4\pi} \tau(u)\, du,$$

so daß es wegen der Stetigkeit von $\tau(u)$ mindestens zwei Nullstellen u_1, u_2 von $\tau(u)$ in $0 \leqq u < 4\pi$ gibt. Wegen $0 < \vartheta(u_i) + \vartheta(u_i + \pi) < 2\pi$ folgt

$$\vartheta(u_i) + \vartheta(u_i + \pi) = \pi, \qquad i = 1, 2$$

womit wegen (2) alles bewiesen ist.

Literatur

[1] LAUGWITZ, D.: Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Math. Z. 61, 235–244 (1954). – [2] RADON, J.: Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 68, 123 (1916). – [3] STEIN, S. K.: A continuous mapping defined by a convex curve. Math. Z. 68, 282–283 (1957).

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt

(Eingegangen am 28. Juli 1958)

STEIN, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 465 (1959)

A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve (Addendum)

By

SHERMAN K. STEIN

Part c of [1] can be proved without recourse to BROUWER's fixed point theorem as follows. Choose P, Q, R, S on the boundary of K so that the area of quadrilateral $PQRS$ is maximum. Clearly P, Q, R, S are distinct and we may assume that they are listed in the order that they appear on the boundary of K. Let p be the line through P parallel to SQ, r the line through R parallel to SQ. Similarly let q be the line through Q parallel to PR and s the line through S parallel to PR. By the choice of P, Q, R, S we see that the parallelogram $pqrs$ contains K and if v is any vertex of this parallelogram, then $g(v) = PR \cap SQ$.

This proof leads to a stronger result than part (c). It shows that there is a point v so $g^{-1}(v)$ contains the vertices of a parallelogram. Moreover one need only make the assumption of LAUGWITZ [2] that K is compact and convex.

Several questions come to mind.

1. Is g a homeomorphism on some neighborhood of infinity?

2. If n is an integer and $K_n = \{Z \mid Z \in E_2 \wedge g^{-1}(Z)$ has at least n points$\}$ is K_n convex? What if $n = \infty$?

Bibliography

[1] STEIN, S. K.: A continuous mapping defined by a convex curve. Math. Z. **68**, 282–283 (1957). — [2] LAUGWITZ, DETLEF: Eine Bemerkung über konvexe Kurven. Math. Z. **70**, 463–464 (1959).

Dept. of Math. Univ. of California, Davis, Calif. (U.S.A.)

(Eingegangen am 26. August 1958)

BACHMAN, G.
Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 466–479 (1959)

Geometry in Certain Finite Groups *)

By
GEORGE BACHMAN

Abstract

Certain finite groups can be considered in a natural manner as geometrical groups in the sense that they, along with a class of conjugate subgroups, characterize a certain geometry and also act as groups of motions on this geometry. Two special classes of such groups are studied, and their structural properties are determined. Finally, examples of such groups are constructed.

1. Introduction

We shall introduce axioms so that certain finite groups may be considered as groups of motions of a geometry, which is characterized by the group together with a class of conjugate subgroups. That is, certain subgroups of the group will be interpreted as points while others will be interpreted as lines, and the group will act on these elements. We then investigate what abstract structural conditions the axioms impose on the group in certain special cases. It will be shown, in these cases, that the group must contain a normal subgroup which can be interpreted in a natural manner as a subgroup of translations. Finally, examples of groups which satisfy the axioms in the special cases will be constructed.

2. Basic definitions, axioms and notations

Throughout this paper we will denote the order of a finite group G by $|G|$, and the index of a subgroup H in G by $|G:H|$.

Let G be a finite group which operates on a point set Σ in a one-to-one onto manner. Let Γ be a subset of Σ. We define:

$F(\Gamma)$ = The subgroup of G leaving each point of Γ fixed (the "fixed" group).

$F^*(\Gamma)$ = The subgroup of G which leaves Γ invariant (as a whole).

$\Pi(H)$ = The subset of Σ left fixed (point-wise) by each element of H, where H is a complex of elements of G.

The *closure* of a subset, Γ, is defined as $\Gamma' = \Pi F(\Gamma)$. A subset is called *closed* if and only if $\Gamma' = \Gamma$.

*) Part of this paper is contained in the author's doctoral dissertation in the Department of Mathematics at New York University. The author is indebted to Professor W. MAGNUS for his encouragement and advice. The author also wishes to express his appreciation to Professor H. WIELANDT for his many helpful suggestions in the revision of this paper.

From these definitions, it follows immediately that the following relations hold.

(2.1) If $\Gamma_1 < \Gamma_2$, then $F(\Gamma_1) > F(\Gamma_2)$.

(2.2) If $H_1 < H_2$, then $\Pi(H_1) > \Pi(H_2)$.

(2.3) $\Gamma'' = \Gamma'$.

(2.4) $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)' > \Gamma_2' \cup \Gamma_1'$.

(2.5) $\Pi F \Pi(H) = \Pi(H)$.

(2.6) $F \Pi F(\Gamma) = F(\Gamma)$.

(2.7) $F(\Gamma') = F(\Gamma)$.

Also if $g \in G$, then

(2.8) $F(g\Gamma) = g F(\Gamma) g^{-1}$.

(2.9) $\Pi(g H g^{-1}) = g \Pi(H)$.

(2.10) $(g\Gamma)' = g\Gamma'$.

Finally, if Γ is a closed subset then

(2.11) $N_G(F(\Gamma)) = F^*(\Gamma)$,

where, in general, $N_G(H)$ denotes the normalizer in G of the subgroup H.

All of the above results are quite easy to prove and tacit use will be made of them in what follows.

The points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$, where Γ is a closed set, are said to *span* Γ if $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}' = \Gamma$. The *dimension* of the closed set Γ is defined as the minimal number of spanning points of Γ less one, and it is denoted by $\dim \Gamma$.

With these definitions, we now introduce the following axioms:

AXIOM 1. All one point subsets are closed.

AXIOM 2. If Γ is a closed subset, then $F^*(\Gamma)$ is transitive on Γ.

AXIOM 3. If Γ_1, Γ_2 are two closed subsets of the same dimensions, then here exists a $g \in G$ such that $g\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(The axioms, as we originally formulated them, were more restrictive. For the more general approach presented, we wish to express our appreciation to Professor HAROLD N. SHAPIRO.)

We note that there is no loss of generality in assuming that $F(\Sigma) = e$ where e is the identity element of G; for if this should not be the case, we can simply consider the factor group $G/F(\Sigma)$, in the discussion, for which the preceding statement is true.

Lines of Σ are defined as $\{\alpha, \beta\}'$ where α and β are distinct points of Σ. We note trivially that a line is one dimensional; for let $\Lambda_0 = \{\alpha, \beta\}'$ where $\alpha \neq \beta$. If $\{\alpha, \beta\}' = \{\gamma\}'$, we have, since $\{\gamma\}' = \{\gamma\}$ by axiom 1, that $\alpha = \beta = \gamma$ which is a contradiction.

It follows immediately from axiom 3 that a line of Σ is determined by any two of its points, i.e., if $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}'$ and if $\alpha_3, \alpha_4 \in \Lambda$ where $\alpha_3 \neq \alpha_4$, then $\{\alpha_1, \alpha_2\}' = \{\alpha_3, \alpha_4\}'$. From this result, it follows directly that no two points are on more than one line and that no two lines have more than one point in common.

In this paper, we want to consider the one and two dimensional cases in some detail, i.e., the cases where dim $\Sigma = 1$, and where dim $\Sigma = 2$.

3. The one dimensional case

Thus we have that $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}'$ where α_1 and α_2 are any two distinct points of Σ. Moreover, we have from axiom 1, that if $F(\{\alpha\}) = H$, then

(1′) α determines H, and conversely H uniquely determines α.

If $g \in G$ and if $g\alpha_3 = \alpha_3$ and $g\alpha_4 = \alpha_4$ where $\alpha_3 \neq \alpha_4$ then $g \in F(\{\alpha_3, \alpha_4\}) = F(\Sigma) = e$, so we have

(2′) Any motion (i.e., any element of G) has at most one fixed point unless it is the identity.

As a special case of axiom 2, we have that

(3′) G is transitive on Σ.

Now let us suppose that (1′), (2′), (3′) are satisfied. Let α_1, α_2 be any two distinct points of Σ. Then $F(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = e$, so $\{\alpha_1, \alpha_2\}' = \Sigma$. From (1′), we get that all one point subsets are closed. Since the only closed subsets of Σ are Σ and all one point sets, we get immediately from (3′) that axiom 2 is satisfied. Similarly, axiom 3 follows from (3′). Thus in the one dimensional case there is a complete equivalence between axioms 1, 2, 3 and (1′), (2′), and (3′).

We shall now obtain certain abstract structural properties of the group G. (1′) implies that H leaves α fixed and no other point fixed. Also gHg^{-1} leaves $g\alpha$ fixed. It follows immediately from (2.11) and from the fact that $F(\{\alpha\}) = F^*(\{\alpha\})$ that H is its own normalizer in G. From (1′) and (3′), we get that to an arbitrary point β of Σ there corresponds uniquely a conjugate subgroup of H. (2′) implies that any two of these conjugate subgroups intersect only in the identity element. Finally, we can say that G acts on a point set of $n = |G:H|$ elements.

Summarizing these results, we have:

THEOREM 3.1. *In the one dimensional case, there exists a one-to-one correspondence between the points of Σ and the subgroups of G consisting of H and its conjugates (where H is the subgroup of G leaving a given point of Σ fixed). Furthermore, H is its own normalizer in G, and any two conjugates of H have only the identity element in common.*

We will frequently refer to a group G and a subgroup H as the *pair* (G, H). Thus we can say that H and its conjugates can serve as the points of a geometry. The points, in the one dimensional case, all lie on a single line, and G operates on these points in the following manner $g \circ H = gHg^{-1}$. Thus the geometry is uniquely characterized by the pair (G, H) and G is also a group of motions on this geometry.

We now apply the theorem of Frobenius to the pair (G, H), namely,

FROBENIUS' THEOREM. *If G is a finite group and H is a subgroup which is its own normalizer in G, and which is such that any two of its conjugates have only the identity element in common, then the elements of G not contained in H or any of its conjugates together with the identity element form a normal subgroup, N, of G, and $G = HN$.* ([6], p. 202; for a proof independent of the theory of characters in the case of a solvable subgroup H, see [5].)

In the geometrical interpretation, this theorem states that the group of motions, G, contains a normal subgroup which can be viewed as a subgroup of translations since it is a transitive normal subgroup with no fixed points.

If the pair (G, H) satisfies all the conditions of Frobenius' theorem, we will call it a Frobenius pair, and we will refer to the normal subgroup N as the normal component.

Under certain conditions the geometry is uniquely characterized by the group G alone. At any rate we will show that if we have two geometries given by the pairs (G, H_1) and (G, H_2) then either H_1 is contained in a conjugate of H_2 or H_2 is contained in a conjugate of H_1.

We denote, for any finite set K, by $|K|$ the number of elements of K. Now if (G, H) is any Frobenius pair with normal component N, we have trivially

LEMMA 3.1. $|N| \leqq \frac{|G|}{2}$.

Hence

LEMMA 3.2. $\bigcup'_{g \in G} g H g^{-1} \geqq \frac{|G|}{2}$ *where the prime denotes that the identity element is omitted in the union.*

Let (G, H_1) and (G, H_2) be two Frobenius pairs with normal components N_1, N_2; then

LEMMA 3.3. $H_1 \cap g H_2 g^{-1} \neq e$ *for some conjugate of* H_2.

Proof. If H_1 has only e in common with all the conjugates of H_2, then $H_1 \subset N_2$, and all the conjugates of H_1 are also contained in N_2. Thus

$$\bigcup'_{g \in G} g H_1 g^{-1} + \bigcup'_{g \in G} g H_2 g^{-1} \geqq \frac{|G|}{2} + \frac{|G|}{2} = |G|.$$

LEMMA 3.4. *If $H_1 \cap H_2 \neq e$ and $H_1 \not\subset H_2$ and $H_2 \not\subset H_1$, then the following are Frobenius pairs:* $(G, H_1 \cap H_2)$, $(H_1, H_1 \cap H_2)$, $(H_2, H_1 \cap H_2)$.

We denote the normal components by N_{12}, N_{12}^1, N_{12}^2.

LEMMA 3.5. *Under the assumptions of Lemma 3.4, if $H_1 \cap g H_2 g^{-1} \neq e$, H_1, then $H_1 \cap g H_2 g^{-1} = h_1^{-1}(H_1 \cap H_2) h_1$ for some $h_1 \in H_1$.*

Proof. $(H_1, H_1 \cap H_2)$ and $(H_1, H_1 \cap g H_2 g^{-1})$ are Frobenius pairs. Hence by Lemma 3.3, there exists an $h_1 \in H_1$ such that $(H_1 \cap H_2) \cap h_1(H_1 \cap g H_2 g^{-1}) h_1^{-1} \neq e$. Thus $H_2 \cap h_1 g H_2 g^{-1} h_1^{-1} \neq e$, i.e., $h_1 g \in H_2$. Therefore, $h_1(H_1 \cap g H_2 g^{-1}) h_1^{-1} = H_1 \cap H_2$. Similarly, we have

LEMMA 3.6. *Under the assumptions of Lemma 3.4 if $H_2 \cap g H_1 g^{-1} \neq e$, H_2, then $H_2 \cap g H_1 g^{-1} = h_2^{-1}(H_1 \cap H_2) h_2$ for some $h_2 \in H_2$.*

LEMMA 3.7. *Under the assumptions of Lemma* 3.4 *if* $H_1 \cap gH_2g^{-1} \neq H_1$ *or* $H_2 \cap gH_1g^{-1} \neq H_2$ *for any* $g \in G$, *then* N_{12} = *the elements outside of all* $gH_1g^{-1} \cap g_1H_2g_1^{-1}$ *together with* e.

Proof. Suppose $N_{12} \cap gH_1g^{-1} \cap g_1H_2g_1^{-1} \neq e$, then $N_{12} \cap H_1 \cap g^{-1}g_1H_2g_1^{-1}g \neq e$; whence $H_1 \cap g^{-1}g_1H_2g_1^{-1}g \neq e, H_1$, and by Lemma 3.5 $H_1 \cap g^{-1}g_1H_2g_1^{-1}g = h_1^{-1}(H_1 \cap H_2)h_1$ for some $h_1 \in H$. Hence $N_{12} \cap h_1^{-1}(H_1 \cap H_2)h_1 \neq e$ which is a contradiction.

It follows immediately that

LEMMA 3.8. *Under the assumptions of Lemma* 3.7

$$H_1 \cap N_{12} = H_1 \cap N_2 = N_{12}^1,$$

and

$$H_2 \cap N_{12} = H_2 \cap N_1 = N_{12}^2.$$

LEMMA 3.9. *Under the assumptions of Lemma* 3.7 (N_{12}, N_{12}^1) *and* (N_{12}, N_{12}^2) *are Frobenius pairs.*

Proof. Let $n \in N_{12}$ and suppose that $nN_{12}^1n^{-1} = N_{12}^1$. However,

$$nN_{12}^1n^{-1} < nH_1n^{-1}$$

while $N_{12}^1 < H_1$; therefore, we must have $n \in H_1$, so $n \in H_1 \cap N_{12} = N_{12}^1$. It is clear now also that any two conjugates just have e in common. Hence (N_{12}, N_{12}^1) is a Frobenius pair. The proof of the second part follows in a similar manner.

LEMMA 3.10. $N_{12} = N_1N_{12}^1$ *and* $N_{12} = N_2N_{12}^2$ *under the assumptions of Lemma* 3.7.

Proof. It is not difficult to show that N_1 and N_2 are the normal components of (N_{12}, N_{12}^1) and (N_{12}, N_{12}^2) respectively.

THEOREM 3.2. *If* (G, H_1) *and* (G, H_2) *are two Frobenius pairs with normal components* N_1, N_2, *then either* H_1 *is contained in a conjugate of* H_2 *or* H_2 *is contained in a conjugate of* H_1.

Proof. By Lemma 3.3, we may assume without loss of generality that $H_1 \cap H_2 \neq e$. If $H_1 \not\subset gH_2g^{-1}$ for any $g \in G$, and if $H_2 \not\subset gH_1g^{-1}$ for any $g \in G$, then we can apply the previous lemmas. Hence (N_{12}, N_{12}^1) and (N_{12}, N_{12}^2) are Frobenius pairs. Thus by Lemma 3.3, we must have $N_{12}^1 \cap nN_{12}^2n^{-1} \neq e$ for some $n \in N_{12}$, i.e., $(H_1 \cap N_2) \cap (nH_2n^{-1} \cap N_1) \neq e$, which is clearly a contradiction, and the theorem is established.

COROLLARY. *If* (G, H_1) *and* (G, H_2) *are Frobenius pairs with normal components* N_1 *and* N_2, *then we may assume, say, that* $H_1 > H_2$. *Then* (H_1, H_2) *is a Frobenius pair with normal component* N_{12}^1 *and* (N_2, N_{12}^1) *is also a Frobenius pair with normal component* N_1.

We note that if H_1 and H_2 are either cyclic groups or the direct products of a cyclic group of odd order and a non-cyclical group of order 2^α containing a single element of order 2, then it follows directly from Lemma 3.4 that $H_1 = gH_2g^{-1}$. BURNSIDE ([1], pp. 334–335) incorrectly deduces from a valid argument that for any Frobenius pair (G, H) H must be of one of these forms. For a counter example one should refer to ZASSENHAUS [7].

Finally, we note that FROBENIUS' theorem can also be stated in the following form which will be useful when we consider the two dimensional case.

THEOREM 3.3 (FROBENIUS). *Let G be a finite group and H a subgroup of G which is its own normalizer and is such that any two of its conjugates intersect in a subgroup D; then the elements of G not contained in H or any of its conjugates together with D form a normal subgroup of G.*

4. Examples of one-dimensional groups

It is not difficult to construct examples of groups which satisfy all the assumptions in the one-dimensional case, and which can, therefore, be considered as one-dimensional groups in the geometric interpretation.

Let p be a prime number, and let $GF(p^n)$ denote the Galois field of p^n elements; also let ϱ be an element of order d where $d|p^n-1$. Consider the totality of one-to-one mappings of $GF(p^n)$ onto itself given by

$$x \to \varrho^i x + \alpha \qquad i = 0, \ldots, d-1$$

where $\alpha \in GF(p^n)$. Denote such a mapping by $f(\varrho^i, \alpha)$ where the exponent is reduced modulo d. Then

$$f(\varrho^i, \alpha)\, f(\varrho^r, \beta) = f(\varrho^{i+r}, \varrho^r \alpha + \beta)$$

where we first apply $f(\varrho^i, \alpha)$ and then $f(\varrho^r, \beta)$. Hence the inverse of $f(\varrho^i, \alpha)$ is $f(\varrho^{d-i}, -\varrho^{d-i}\alpha)$, and we get that the totality of mappings $\{f(\varrho^k, 0)\}$ $k = 0, \ldots, d-1$ form a subgroup which is its own normalizer in $\{f(\varrho^i, \alpha)\}$, and any two of its conjugates have only $f(1, 0) = e$ in common.

We take the special case where $n = q-1$, q a prime not equal to p. Then we must choose an element ϱ of order d where $d|(p^{q-1}-1)$. Since $p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, we can take $d = q$, and we have shown that for p and q distinct primes there exists a group of order qp^{q-1} which can be considered as a one dimensional group.

If we take the case $n = 1$, then d must be chosen so that $d|p-1$. Thus d may be taken as any prime divisor q of $p-1$, and we have the existence of a one dimensional group of order qp where q and p are distince primes and where $q|p-1$.

If we take $q = 2$, then we get that there exists one dimensional groups of order $2p$ for p an odd prime.

The case $q = 3$, $p = 2$ in the first class of groups leads to A_4, the alternating group of order 12. The case $q = 2$, $p = 3$ leads to S_3, the symmetric group of degree 3. The case $p = 7$, $q = 3$ leads, in the second class of examples, to a group of order 21 which can be represented in terms of permutations as the group generated by the following two cycles: (0 1 2 3 4 5 6), (1 2 4) (3 6 5). Finally, the case $p = 11$, $q = 5$ leads to a group of order 55, represented by permutations as the group generated by (0 1 2 ... 10) and (1 4 5 9 3) (2 8 10 7 6). We will make further use of these examples in the two dimensional case.

5. The two dimensional case

In this case, there exists three distinct points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ such that $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}'$, and no fewer points span Σ. If $\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}'$ and $\dim \Gamma = 2$, then it follows from Axiom 3 that $\Gamma = \Sigma$.

As in the one dimensional case, we have that (1′) and (3′) of Section 3 are satisfied in this case.

Let Λ_1 and Λ_2 be two distinct lines through a point β. Then $\Lambda_1 = \{\beta, \beta_1\}'$ and $\Lambda_2 = \{\beta, \beta_2\}'$. By axioms 2 and 3, we can find a $g \in G$ such that $g\beta = \beta$ and $g\beta_1 \in \Lambda_2$. Hence we have:

(4′) Every line through a point can be rotated into any other line through the point.

Let Λ_1, Λ_2 be two distinct lines through β. $\Lambda_1 = \{\beta, \beta_1\}'$, $\Lambda_2 = \{\beta, \beta_2\}'$, and $\beta_2 \notin \{\beta, \beta_1\}'$. If $g\beta = \beta$, $g\beta_1 = \beta_1$, and $g\beta_2 = \beta_2$, then $g \in F(\{\beta, \beta_1, \beta_2\}) = e$. Therefore, we have:

(5′) A rotation (i.e., an element of G having a fixed point) which leaves two lines through a point (element-wise) fixed is the identity element.

Finally, the fact that $\dim \Sigma = 2$ implies that

(6′) There exist at least two distinct lines.

Conversely, suppose that (1′), (3′), (4′), (5′) and (6′) are satisfied. Then, as in the one dimensional case, we get that Axiom 1 is satisfied. (5′) and (6′) imply that $\dim \Sigma = 2$; while (3′) and (4′) imply that Axiom 3 is satisfied. If $\dim \Gamma = 0$, then of course Axiom 2 is satisfied, and if $\dim \Gamma = 2$, then, as we have seen, $\Gamma = \Sigma$, and Axiom 2 follows from (3′). It remains to consider the case $\dim \Gamma = 1$. Thus let $\Gamma = \{\alpha, \beta\}'$, we must show that $F^*(\Gamma)$ is transitive on Γ. Let $\alpha_1 \in \Gamma$ and $\alpha_1 \neq \alpha$. Then $g\alpha = \alpha_1$ for some $g \in G$. Now

$$g^{-1}\Gamma = g^{-1}\{g\alpha, \alpha\}' = \{\alpha, g^{-1}\alpha\}'.$$

If $g^{-1}\Gamma = \Gamma$, then $g \in F^*(\Gamma)$, and we are done. Thus we may assume that $g^{-1}\alpha \notin \Gamma$. Then by (4′) there exists an h such that $h\alpha = \alpha$ and $hg^{-1}\alpha \in \Gamma$, so $hg^{-1}\Gamma = \Gamma$, and $hg^{-1} = g^* \in F^*(\Gamma)$. Then $g^*\alpha_1 = hg^{-1}\alpha_1 = h\alpha = \alpha$, or $\alpha_1 = g^{*-1}\alpha$ where $g^{*-1} \in F^*(\Gamma)$, so $F^*(\Gamma)$ is transitive on Γ and $\Gamma = \{\alpha, g^{*-1}\alpha\}'$.

Thus in the two dimensional case there is a complete equivalence between Axioms 1, 2, 3 and (1′), (3′), (4′), (5′) and (6′).

Now, as in the one dimensional case, we have that G must contain a subgroup $H = F(\{\alpha\})$ which is its own normalizer in G, and G acts on a point set of $|G:H|$ elements. (4′) implies that if $gHg^{-1} \cap H = D$ and if $g_1 H g_1^{-1} \cap H = D_1$ where $g \notin H$ and $g_1 \notin H$ then D and D_1 are conjugates within H. For $H \cap gHg^{-1}$ leaves α and $g\alpha$ fixed, or, i.e., $F(\Lambda) = D$ and $F(\Lambda_1) = D_1$ where Λ and Λ_1 are two lines through α. Hence there exists an $h \in H$ such that $hg_r\alpha = g\alpha$ where $g_r H g_r^{-1} \cap H = D_1$ so $hg_r H g_r^{-1} h^{-1} = gHg^{-1}$. Therefore,

$$hD_1h^{-1} = H \cap hg_1Hg_1^{-1}h^{-1} = H \cap hg_rHg_r^{-1}h^{-1} = H \cap gHg^{-1} = D.$$

(5′) implies that if D and D_1 are the intersections with H of any of its conjugates then either $D = D_1$ or $D \cdot D_1 = e$.

Finally, (6′) implies that H and its conjugates do not all intersect in the same subgroup.

Summarizing these results, we can state:

THEOREM 5.1. *In the two dimensional case, the finite group G contains a subgroup H such that*

a) $N_G(H)=H$.

b) *If* $H\cap gHg^{-1}=D$ *and* $H\cap g_1Hg_1^{-1}=D_1$ *with* $g\notin H$ *and* $g_1\notin H$, *then there exists an* $h\in H$ *such that* $hDh^{-1}=D_1$.

c) *Either* $D=D_1$ *or* $D\cap D_1=e$ *where* D *and* D_1 *are the same as in* b).

The points of the geometry are in a one-to-one correspondence with H and its conjugates while the lines of the geometry are in one-to-one correspondence with D and its conjugates. Thus the pair (G, H) characterizes the geometry and the group G acts as a group of motions on the points of the geometry.

6. Further structural properties in the two dimensional case

We would next like to obtain, as in the one dimensional case, a subgroup of G which can be considered as a subgroup of translations. We denote, throughout, by H a subgroup of G which satisfies all the conditions mentioned in Theorem 5.1.

LEMMA 6.2. *Let* $H\cap gHg^{-1}=D$, *then* $(N_G(D)/D, N_H(D)/D)$ *form a Frobenius pair provided* $N_H(D)\neq D$.

Proof. If $g\in N_G(D)-H$, then $gN_H(D)g^{-1}=N_{gHg^{-1}}(D)$. Since H is its own normalizer in G and since $N_H(D)\neq D$, we have that $N_H(D)$ must be its own normalizer in $N_G(D)$, and, of course, any two conjugates of $N_H(D)$ in $N_G(D)$ have only D in common, and the lemma is established.

Thus $N_G(D)$ contains a normal subgroup N where

$$N=[N_G(D)-\{\cup N_{H'}(D)\}]\cup D,$$

where the union is taken over H and those conjugates H' of H such that $H\cap H'=D$. Moreover, $N_G(D)=N_H(D)N$ and $N_H(D)\cap N=D$. Finally, recalling the discussion of the one dimensional case, we see from Lemma 6.2 that $N_G(D)/D$ has the structure of a one dimensional group of motions.

We observe that the constants $|H:N_H(D)|$ and $|N_G(D):N_H(D)|=|N:D|$ have geometric interpretations. $|H:N_H(D)|$ gives the number of distinct lines through a point and $|N_G(D):N_H(D)|$ gives the number of points on a line. The latter statement follows from the easily established fact that there are $|N_G(D):N_H(D)|-1$ distinct conjugates of H which intersect H in D.

We now wish to establish a theorem which yields a great deal of information concerning the structure of G. To this end, we introduce the following definition:

Definition 6.1. Two points β and γ are said to be the same "distance" from the point α if there exists a motion h which leaves α fixed and is such that $h\beta=\gamma$.

It is clear that the relation described by distance from α is an equivalence relation.

LEMMA 6.3. *Given a line Λ through α, and any point $\beta \neq \alpha$ on Λ; then the number of points on Λ which are the same distance from α as β is $|N_H(D):D|$ where $H = F(\{\alpha\})$ and $D = F(\Lambda)$.*

Proof. Clearly, the number of points in question is the number of distinct points $h\beta$, $h \in H$, which are on Λ. The $h \in H$ for which $h\beta \in \Lambda$ are precisely those of $H \cap N_G(D) = N_H(D)$. The $h \in H$ which leave β fixed are precisely those of D; and the result follows.

LEMMA 6.4. *Let Λ be any line through α, and the notation as in the previous lemma. Then if $Hg_\nu H$, $\nu = 1, \ldots, s$ are the distinct double cosets of H which contain elements of $N_G(D)$ (we choose $g_1 = e$ and the other $g_\nu \in N_G(D)$) the sets of points*

$$Hg_\nu H(\alpha) \tag{6.1}$$

are precisely the equivalence classes of points at the same distance from α.

Proof. If α_1 is a point not on Λ, then there exists an $h \in H$, $h\alpha = \alpha$ and $h\alpha_1 \in \Lambda$. Then $h\alpha_1 = g_\nu \alpha$ where $g_\nu \in F^*(\Lambda) = N_G(D)$, so $\alpha_1 = h^{-1}(g_\nu \alpha)$ and $h^{-1}\alpha = \alpha$ so α_1 is equivalent to $g_\nu \alpha$. Hence any point α_1 is equivalent to one of the $g_\nu \alpha$ while any two of these points are inequivalent, for if $hg_\nu \alpha = g_\mu \alpha$, $\nu \neq \mu$, with $h \in H$, then $g_\mu^{-1} h g_\nu = h_1 \in H$ or $g_\nu \in H g_\mu H$, a contradiction. Now, since $Hg_\nu H(\alpha) = Hg_\nu \alpha$ all of these points are the same distance from α as $g_\nu \alpha$. Also, if $h_1 g_\nu \alpha = h_2 g_\mu \alpha$, then $h_2^{-1} h_1 g_\nu \alpha = g_\mu \alpha$ which is a contradiction, as we've seen, unless $\nu = \mu$.

THEOREM 6.1. *With the notation as in the previous lemmas, we have*

a) $$G = \bigcup_{\nu=1}^{s} Hg_\nu H,$$

and

b) $$s - 1 = \frac{|N_G(D) : N_H(D)| - 1}{|N_H(D) : D|}.$$

Proof. Since a given element $g \in G$ transforms α into one of the points of (6.1) for some ν, we have $g(\alpha) = h_1 g_\nu h_2(\alpha)$; whence $h_2^{-1} g_\nu^{-1} h_1^{-1} g \in H$, and hence $g \in Hg_\nu H$. From this, a) is immediate.

Considering the line Λ, lemma 6.4 provides that the elements $g_\nu \alpha$, $\nu > 1$, represent the $s - 1$ possible distances from α (not "zero"). At each of these distances the number of points on Λ is given by lemma 6.3. Thus $(s-1)$ $|N_H(D):D|$ equals the number of points on Λ different from α, and b) follows.

The following theorem also gives us further information concerning the structure of the group G.

THEOREM 6.2. *Suppose for a given line Λ, there is a $g \in G$ such that*

1) *g leaves no point of Λ fixed,*

2) *g^m leaves all points of Λ fixed,*

where $g^m \neq e$ and m is an integer. Then g leaves no point fixed.

Proof. Suppose g left a point β fixed; then since g leaves no point on Λ fixed, $\beta \notin \Lambda$, and $\Lambda_1 = \{\alpha, \beta\}' \neq \Lambda$ where $\alpha \in \Lambda$. However, g^m leaves α fixed

and β fixed, and, therefore, leaves Λ_1 fixed, but g^m also leaves Λ fixed which is a contradiction.

The theorem, of course, remains true if g is a motion which leaves Λ invariant but leaves no point of Λ fixed. Thus we can state Theorem 6.2 in the following group theoretic form.

THEOREM 6.2a. *Let $g \in N - D$, and let $g^m \in D$ where m is an integer such that $g^m \neq e$; then g is not contained in any conjugate of H in G.*

As the final observation of this section, we note that if Λ is a line through α and if, as usual, we let $H = F(\{\alpha\})$ and $D = F(\Lambda)$, then either $N_H(D) = D$ or $N_H(D) \neq D$. If $N_H(D) = D$, then recalling the considerations in the one dimensional case we can say that the lines through a point form a one dimensional geometry. If $N_H(D) \neq D$, then we can apply Lemma 6.2 using its appropriate geometric interpretation, and we thus obtain the following alternative theorem.

THEOREM 6.3 *(Alternative Theorem). In the two dimensional case, either the lines through a given point or the points on a given line form a one dimensional geometry.*

7. Subgroup of Translations in the two dimensional case

Let $H = F(\{\alpha\})$, $D = F(\Lambda)$ where Λ is a line through α. We assume:

a) No two points of Λ have the same distance from α.

From our previous discussion, we see that this is equivalent to

a') $N_H(D) = D$.

Hence, our assumption is equivalent to assuming that the lines through a given point form a one dimensional geometry. We also assume that

b) $N_G(D)$ contains a normal subgroup N_0 such that $N_G(D) = N = N_0 D$.

We will denote by $\{K\}_G$ the subgroup of G generated by the subset K.

By assumption a'), the pair (H, D) is a Frobenius pair, and $H = H_0 D$ where H_0 is the normal component. We can now establish the following theorem.

THEOREM 7.1. $\left\{ \bigcup_{h_0 \in H_0} h_0 N_0 h_0^{-1} \right\}_G = M$ *is a normal subgroup of the two dimensional group G under the assumptions* a') *and* b) *of this section.*

Proof. M consists of finite products of elements of the form $h_0 g_0 h_0^{-1} = q_0$ and their inverses; we must just show that $g q_0 g^{-1}$ is a finite product of elements of the form q_0 where g is any element of G. We have by Theorem 6.1 and the assumptions a') and b) that $G = H N_0 H$, and $H = H_0 D$, so an arbitrary element $g \in G$ has the form $g = h_0^{(1)} d_1 g_0^* h_0^{(2)} d_2$ where $d_1, d_2 \in D$, $g_0^* \in N_0$, and $h_0^{(1)}, h_0^{(2)} \in H_0$. Then $g q_0 g^{-1} = h_0^{(1)} d_1 g_0^* h_0^{(2)} d_2 h_0 g_0 h_0^{-1} d_2^{-1} h_0^{(2)-1} g_0^{*-1} d_1^{-1} h_0^{(1)-1}$. Since H_0 is normal in H, $d_2 h_0 d_2^{-1} = \bar{h}_0 \in H_0$. Thus the above is

$$h_0^{(1)} d_1 g_0^* h_0^{(2)} \bar{h}_0 d_2 g_0 d_2^{-1} \bar{h}_0^{-1} h_0^{(2)-1} g_0^{*-1} d_1^{-1} h_0^{(1)-1}. \tag{7.1}$$

But $d_2 g_0 d_2^{-1} = g_1 \in N_0$ since N_0 is normal in $N_G(D)$, and $h_0^{(2)} \bar{h}_0 = h_0^{(3)} \in H_0$, so (7.1) becomes

$$h_0^{(1)} d_1 g_0^* h_0^{(3)} g_1 h_0^{(3)-1} g_0^{*-1} d_1^{-1} h_0^{(1)-1}. \tag{7.2}$$

But $g_0^{*-1}d_1g_0^* = d_3$ where $d_3 \in D$, so we get

$$h_0^{(1)}g_0^* d_3 h_0^{(3)} g_1 h_0^{(3)-1} d_3^{-1} g_0^{*-1} h_0^{(1)-1}. \tag{7.3}$$

Finally, $d_3 h_0^{(3)} d_3^{-1} = h_0^{(4)} \in H_0$, whence (7.3) becomes

$$h_0^{(1)}g_0^* h_0^{(4)} d_3 g_1 d_3^{-1} h_0^{(4)-1} g_0^{*-1} h_0^{(1)-1} = h_0^{(1)} g_0^* h_0^{(4)} g_2 h_0^{(4)-1} g_0^{*-1} h_0^{(1)-1}$$

where $g_2 \in N_0$, and hence the above equals

$$(h_0^{(1)} g_0^* h_0^{(1)-1})(h_0^{(1)} h_0^{(4)} g_2 h_0^{(4)-1} h_0^{(1)-1})(h_0^{(1)} g_0^{*-1} h_0^{(1)-1})$$

which belongs to M and completes the proof.

If we further assume:

c) $M \cap H = e$, then we have

THEOREM 7.2. *If G is a two dimensional group which satisfies* a'), b), c), *then $G/M \simeq H$.*

Proof. $G = HN_0H < HMH = HM$. Hence $G = HM$, and, consequently $G/M \simeq H$.

If G is a two dimensional group satisfying assumptions a'), b), c), then M can be considered as a subgroup of translations since M is a transitive (i.e., any conjugate of H can be obtained by transforming by elements of M) normal divisor with no fixed points.

Before considering examples of such groups, we wish to obtain a few more properties of such groups.

As an immediate corollary of Theorem 7.1, we have:

COROLLARY 7.1. $\left\{ \bigcup_{h_0 \in H_0} h_0 N_0 h_0^{-1} \cup \bigcup_{g \in G} g H_0 g^{-1} \right\}_G = A$ *is a normal subgroup of the two dimensional group G under assumptions* a') *and* b) *where H_0 is the normal component of the Frobenius pair (H, D). If* c) *is also satisfied then $A/M \simeq H_0$.*

Finally, let us consider the subgroup $S = MD$ of G. If c) is satisfied then $S/M \simeq D$. From this, we easily get that S is its own normalizer in G since D is its own normalizer in $G/M \simeq H$. Furthermore, the conjugates of S in G have only M in common. Thus from Theorem 3.3, we have that the elements not contained in S and its conjugates together with M form a normal subgroup of G. Moreover, this normal subgroup is precisely A since

$$G/M \simeq A/M \; S/M.$$

8. Examples of two dimensional groups of motions

In section 6, we observed that there are $|N_G(D) : N_H(D)| - 1$ distinct conjugates of H which intersect H in D. However, there are $|H : N_H(D)|$ distinct conjugates of D in H, and there are $|G : H| - 1$ intersections of H with its conjugates, so

$$|H : N_H(D)| \left(|N_G(D) : N_H(D)| - 1\right) = |G : H| - 1. \tag{8.1}$$

Also, it is easy to show that there are

$$|G| \left(|D| - 1\right)\left(\frac{1}{|N_H(D)|} + \frac{1}{|N_G(D)|}\right) + |G : H| \tag{8.2}$$

distinct elements not contained in H or its conjugates together with the identity element.

Under assumption a') of Section 7, the numerical relation (8.1) becomes

$$|H:D|^2 = \frac{|G|-|H|}{|N_G(D)|-|D|}. \tag{8.3}$$

We proceed, at first, in an heuristic manner. We saw previously that there always exist one dimensional groups of order qp^{q-1} where q and p are distinct primes. We would like to embed this group in a two dimensional group G where by (8.3) we want

$$|H:D|^2 = \frac{|G|-|H|}{|N_G(D)|-|D|}.$$

If we further assume that $|N_G(D)| = 2|D|$, then we are lead to consider groups of order $qp^{q-1}(1+p^{q-1})$. The case $p=3$, $q=2$ yields a group of order 24, and we will presently see that S_4, the symmetric group of degree 4, is a two dimensional group satisfying a'), b), c) of section 7. The case $p=2$, $q=3$ gives a group G of order 60 and a subgroup H of order 12. We have previously noted that A_4 is a one dimensional group, and direct computation shows that the alternating group of order 60, A_5, and its subgroup A_4 determine a two dimensional geometry but b) of section 7 is not satisfied in A_5 since $N_G(D)$ is isomorphic to S_3. Thus we see the need of b) in establishing the existence of a translation group.

If we proceed in a similar heuristic manner only now considering those one dimensional groups of order qp, we are led to consider groups G of order $pq(1+q)$ and subgroups H of order pq. The case $p=2$, $q=5$ leads to a consideration of A_5 and its subgroup of order 10. It can be shown that this pair determines a two dimensional geometry satisfying a') and b) but not c) of Section 7. Thus we see the need of c).

Now we proceed in a rigorous manner to consider groups of order $pq(1+q)$. In this connsection, one should also refer to FROBENIUS ([3], pp. 363, 365) where other properties of such groups are discussed and also where groups of degree p and order $pq(np+1)$ are considered.

THEOREM 8.1. *Let G be a group of order $pq(q+1)$ where p and q are primes such that $q \equiv 1 \pmod{p}$ in which the Frobenius pair (H, D) (where $|H| = pq$, $|D| = p$) can be embedded. If the Sylow subgroup of order q of G is not normal in G, then G is a two dimensional group satisfying* a') *of Section 7.*

Proof. We note, trivially, that G actually contains a Sylow subgroup H_0 of order q. By assumption, this subgroup is not normal in G. Hence the number of its conjugate subgroups is of the form $kq+1$ where $k \geqq 1$. Furthermore, we have that $N_H(H_0) = H$. Thus $|N_G(H_0)| = pqs$ where $s/1+q$ properly, but then the number of conjugates is equal to

$$\frac{1+q}{s} \leqq 1+q \leqq 1+kq.$$

Thus $s=1$, and $N_G(H_0)=H$, and H_0 has $q+1$ conjugates. However, the normalizer of a Sylow subgroup is its own normalizer, so H is its own normalizer in G and, by assumption, $H=H_0D$.

Let us see now how the $q+1$ conjugates of H can intersect. First we observe that a conjugate of H cannot intersect H in a proper subgroup of H_0 since $|H_0|=q$. Also it is impossible that $H\cap gHg^{-1}=H_0$, for all elements $(\neq e)$ of H_0 are of order q and all elements $(\neq e)$ of D and its conjugates are of order p. Thus this would imply that $gH_0g^{-1}=H_0$; whence $g\in H$ which is a contradiction. Likewise, we eliminate the case where $gHg^{-1}\cap H=S>D$ or any conjugate of D properly, for then $|S|/pq$ and $p/|S|$, so $|S|=pq$, again a contradiction. Similarly the case $gHg^{-1}\cap H=S$ where $S\cap D$, or any conjugate, is not the identity is eliminated.

There are two cases to consider now.

1) $N_G(D)=D$. Suppose $gHg^{-1}\cap H=D$. Then we must have $gh_0Dh_0^{-1}g^{-1}=D$ where $h_0\in H_0$. Therefore, $gh_0\in D$, which implies that $g\in H$, a contradiction. Thus, in this case, $gHg^{-1}\cap H\neq D$, nor can it equal any conjugate of D in H, and since all other possibilities have been eliminated, we must have $gHg^{-1}\cap H=e$. Thus we would have that (G, H) is a Frobenius pair, but $pq\nmid q$, so this case can be eliminated.

2) $N_G(D)>D$ properly. Let D_i, $i=1, \ldots, q$ denote the conjugates of D in H. If $g\in N_G(D_i)-D_i$ for some i, then $g\notin H$. Moreover, $gHg^{-1}>D_i$. Thus for each $g\in N_G(D_i)-D_i$ we get a conjugate, gHg^{-1}, and $gHg^{-1}\cap H=D_i$ since all other possibilities have been eliminated. Since there are q conjugates of D in H and $q+1$ conjugates of H in G, this implies that any conjugate of H in G must intersect H in one of the D_i. Also, we have previously seen that $|N_G(D):D|-1$ [since $N_H(D)=D$ here] gives the number of different conjugates of H intersecting H in a fixed D. Hence we must have $|N_G(D)|=2|D|$.

Collecting all this information, we see that the group G is a two dimensional group satisfying a') of Section 7. That b) and c) of Section 7 need not be satisfied has already been demonstrated in the previously considered examples.

Remark. If the pair (G, H) of Theorem 8.1 also satisfies b) and c), then we know that G must contain a normal subgroup of order $(q+1)$. Furthermore, we get that G contains a subgroup of order $p(q+1)$ which is its own normalizer and such that any of its conjugates intersect in the normal subgroup of order $(q+1)$. Also, G then contains a normal subgroup of order $q(q+1)$.

9. Two dimensional groups of motions containing a subgroup of translations

We shall now obtain examples of two dimensional groups which satisfy a'), b), c), and which can, therefore, be considered as two dimensional groups of motions containing a subgroup of translations.

Let p be a prime number; we consider the totality of one-to-one mappings of the Galois field $GF(p^n)$ onto itself given by $x\to ax^{\sigma^\nu}+b$ where σ^ν runs through the Galois group, so $x^{\sigma^\nu}=x^{p^\nu}$; also $0\neq a\in GF(p^n)$, and $b\in GF(p^n)$.

Such a mapping will be denoted by $f(a, b, \nu)$. It is not difficult to show that the group G of all $f(a, b, \nu)$ satisfies the axioms of Section 2 (see, e.g., CARMICHAEL [2], pp. 267–272).

Now we further assume that the Galois field is $GF(2^p)$ where p is a prime such that $2^p - 1 = q$ is also a prime (i.e. a Mersenne prime). We consider the subgroup D of all $f(1, 0, \nu)$ of order p in the subgroup H of all $f(a, 0, \nu)$ of order qp. This pair (H, D) can be shown to satisfy the conditions of Theorem 8.1 (see HUPPERT [4], pp. 306, 307, and FROBENIUS [3], pp. 358–359). Thus G is a two dimensional group satisfying a').

One can easily see that $N_G(D)$ is a direct product of D and a group of order 2, so b) is also satisfied, and that

$$M = \left\{ \bigcup_{h_0 \in H_0} h_0 N_0 h_0^{-1} \right\}_G$$

is the totality of all $f(1, a, 0)$ so that $M \cap H = e$, and c) is satisfied.

Thus we've shown

THEOREM 9.1. *If p is a prime such that $2^p - 1 = q$ is a prime, then there always exists a two dimensional group of motions of order $p(2^p - 1)2^p$. Such a group then contains a normal subgroup (of translations) of order 2^p, and it also contains a subgroup of order $p2^p$ which is its own normalizer and such that any two of its conjugates intersect in the normal subgroup of order 2^p; and, finally, such a group contains also a normal subgroup of order $(2^p - 1)2^p$.*

The case $p = 2$ leads to the symmetric group S_4 and the Klein four-group as the subgroup of translations. The case $p = 3$ leads to a solvable group of order 168 and a subgroup of translations of order 8. (We wish to express our appreciation to Professor E. ARTIN for first suggesting this particular example.)

The case of the symmetric group S_4 also shows that the appropriate group to consider as a subgroup of translations in the two dimensional case is not the set of elements outside of $H = S_3$ and its conjugates (i.e., the analogue of the one dimensional case) since, here, this collection of elements does not even form a subgroup.

References

[1] BURNSIDE, W.: Theory of Groups of Finite Order. Dover Publications 1955. — [2] CARMICHEAL, R. D.: Introduction to the Theory of Groups of Finite Order. Dover Publications 1956. — [3] FROBENIUS, G.: Über Gruppen des Grades p oder $p + 1$. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **1902**, 351–369. — [4] HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Arch. Math. **6**, 303–310 (1955). — [5] SHAW, R. H.: Remark on a Theorem of Frobenius. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 970–972 (1952). — [6] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Dover Publications 1943. — [7] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **11**, 187–220 (1935).

New York University and Rutgers University

(Eingegangen am 20. August 1958)